Ottavio Serra

Spigolature di aritmetica algebra analisi

0. Premessa

Nella prima parte di questo articolo esaminerò alcuni quesiti di teoria dei numeri (aritmetica dei numeri naturali), che richiedono solo conoscenze elementari, anche se appaiono esotici.
Quando si notano particolari proprietà o simmetrie, cercherò di generalizzare i quesiti inizialmente proposti come esercizi numerici, per capire se quelle proprietà sono valide in generale.
Nella seconda parte tratterò, nel campo dei numeri reali o complessi, esempi di equazioni *strane* e di funzioni dipendenti da un parametro e solleverò alcune questioni che non credo si trovino nei manuali.

1. Questioni aritmetiche.

Premetto, per comodità, *alcuni concetti, certamente noti agli studenti di un triennio liceale.*
Ogni numero naturale n è certamente divisibile per 1 e per n. Infatti, n:1=n e n: n=1. Tali divisori di n (1 ed n) si dicono impropri. Un divisore k di n, diverso da 1 e da n, se esiste, si dice divisore proprio. Un numero naturale si dice ***primo*** se è maggiore di 1 e non ha divisori propri. Il numero **1,** pur non avendo divisori propri, non è considerato primo, per rendere unica la fattorizzazione di ogni numero naturale n in fattori primi. **Teorema fondamentale dell'aritmetica: ogni numero naturale n>1 è fattorizzabile sul sottoinsieme dei numeri primi.** Esempi: 2 è primo, perciò 2=2. Analogamente, 3=3. Invece 4=2x2, 5=5, 6=2X3, $48=2^4$x3, eccetera.

(1.1) Determinare tutti i valori di n per i quali $P(n)=n^2- 5n+6$ è primo.
P(n) si può scrivere P(n)=(n-2).(n-3); se n=4, il secondo fattore è 1, perciò (n-2) è primo.
Se scriviamo P(n)=(2-n).(3-n), il primo fattore è 1 per n=1, perciò (3-n) è primo.
Nota. Il problema si risolve più rapidamente, se *immergiamo* i numeri naturali nell'anello degli interi. In tal caro P(n)=|n-2|.|n-3|; se n=1, |n-2|=1, quindi |n-3| è primo; se n=4, |n-3|=1 e |n-2| è primo.
Si noti che in entrambi i casi P(1)=P(4)=2. Accade sempre così?
(1.2) Stesso problema per $P(n)=n^2-8n+12$. P(n) è primo per 4 valori di n: trovarli. Che cosa notate per i valori di P(n)?
(1.3) **Idem, per** $P(n)=n^2-11n+30$. Quanti valori di n rendono primo P(n)?
(1.4) $P(n)=n^2-11n+18$. Come sopra.
A questo punto, se P(n) è un polinomio di 2° grado con due variazioni, quali **conclusioni generali vi sentite di trarre?**
(1.5) Sia ora $P(n)=n^2-(k+1)n+k$, che si fattorizza in (n-1).(n-k). Dimostrare che P(n) è primo solo se k è primo. Se anche k-2 è primo (si dice che k-2 e k sono primi gemelli), esistono tre valori di n per i quali P(n) è primo, mentre se k-2 è composto (no è primo), esiste un solo valore di n che rende primo P(n).
(1.6) Siano x e y due numeri **reali** o **complessi** tali che x+y=3 e xy=3. Si trova facilmente che x e y sono complessi coniugati, tuttavia, senza utilizzare tali valori, verificare la correttezza delle seguenti uguaglianze: $x^2+y^2=3$, $x^3+y^3=0$ (senza calcolare x^3, dire qual è la parte reale di x^3), $x^4+y^4= -9$ e poi $x^5+y^5=-27$, $x^6+y^6=-54$.
Notare che il calcolo di ogni somma di potenze si basa su quello delle potenze con esponente minore. Questo modo di procedere si chiama ***ricorsivo.*** Per il calcolo delle potenze con n pari si faccia il quadrato delle somme con esponente n/2, se n è dispari si moltiplichi per x+y la somma delle potenze con esponente n-1
Un algoritmo ***ricorsivo*** generale per calcolare x^n+y^n richiede il calcolo combinatorio per la potenza n^{ma} del binomio:

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}.y^k = x^n + y^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k}.y^k$, ma non scoraggiatevi se vi sembra complicato, è preferibile procedere passo passo come precedentemente indicato.

(1.7) Calcolare x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4 sapendo che x+y=6 e xy=7. Procedere come in (1.6).

Ripetere gli stessi calcoli nell'ipotesi che x+y=-6 e xy=10.

(1.8) **Siani** ora **x** e **y** numeri **naturali,** zero incluso. Trovare **tutte le coppie (x, y) che risolvono le seguenti equazioni:**

(a) $x^2-4y^2=45$,

(b) $x^2-4y^2==20$,

(c) 4$x^2-9y^2==27$,

(d) $4x^2-9y^2==20$.

(1.9) **Sia x un numero reale.** Risolvere

(a) $49^x-42^x=36^x$ in forma chiusa (con formula ***esatta***.

(b) $49^x-42^x=18^x$ in modo approssimato Solo la parte intera,; con la calcolatrice a meno di un decimo).

(c) $49^x-42^x=66^x$ (se possibile, come sopra).

2. Aritmetica modulare.

Siano a, b interi (relativi), n un numero naturale. Si dice che a e b sono congrui modulo n e si scrive a=b (Mod n), se a-b è multiplo di n, ovvero se divisi per n danno lo stesso resto: a=nh+r, b=nk+r.

Verificare che la relazione di congruenza è una relazione di equivalenza (è riflessiva, simmetrica e transitiva). Inoltre è compatibile con le operazioni di addizione e moltiplicazione.

Infatti, se a=b (Mod n) e a'=b' (Mod n) vuol dire che a=nh+r, b=nk+r, a'=nh'+s, b'=nk'+s. Perciò a+a'=n(h+h')+(r+s) e b+b'=n(k+k')+(r+s). Analogamente, raccogliendo i termini aventi il fattore n in comune, si ottiene aa'=n(v)+rs, e bb'=n(w)+rs. Inoltre, come corollario della moltiplicazione, segue che a=b Mod n, implica $a^k = b^k$ Mod n per ogni numero naturale k.

Esercizi.

(2.1) **Calcolare** la cifra delle unità di 2^{1237}e di 3^{4583}.Risolvo il primo esercizio, il secondo segue un algoritmo analogo. **Risoliamo allora il primo:**

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$ e poi le cifre delle unità si ripetono ogni 4: **2, 4, 8, 6.** Ecco allora la regola: si divide l'esponente per 4 e si prende il resto (congruo all'esponente Mod 4); tale resto può essere 1, 2, 3, 0 e in corrispondenza la cifra delle unità è **2** o **4** o **8** o **6**.Nel nostro caso 1237 diviso 4 dà il resto 1, perciò la cifra delle unità è 2.

Calcolare la cifra delle unità di 3269^{4327}, di 3268^{4327} e di 5403^{6231}. Trovare prima un numero piccolo congruo alla base (Mod 10.) Osservare che 3269 è congruo a 9 Mod 10 e 9 è congruo a -1 Mod 10.

Siccome (-1) è elevato a un esponente dispari, è uguale a -1, perciò la cifra delle unità è la cifra compresa tra 0 e 9 congrua a -1 (Mod 10), cioè 9.

(2.2) **5^{3127}** termina **certamente** con 25 (perché?). Calcolate, perciò, la cifra delle centinaia e quella delle migliaia.

(2.3) Il 1° gennaio del 1601 è caduto di **lunedì.** Di che **giorno** è caduto il 15 agosto del 1604? (Il 1604 è stato bisestile).

(2.4) Gli orologi analogici (a lancette) hanno il quadrante diviso in 12 ore. Sapendo che a un certo istante l'orologio del municipio segnava le 7, che ora segnerà dopo 511 ore?

Sapendo che le 7 iniziali sono AM o PM, posso stabilire se l'ora indicata dopo 511 ore si riferisce al mattino o al pomeriggio?

Nota. L'aritmetica modulare non è solo un giochino**, è fondamentale nella crittografia a chiave pubblica, sulla quale si basa la sicurezza delle transazioni finanziarie, delle comunicazioni militari, delle carte di credito**[1]

3. Equazioni

Un'equazione (in un'incognita) è un'uguaglianza del tipo f(x)=0, dove f(x) è una finzione. Qui ci limitiamo alle funzioni reali. Una soluzione (o radice) dell'equazione è un numero, reale o complesso, x_1 tale $f(x_{1)=0}$ è vero. Per questo motivo x_1 è detto, anche, ***zero*** di f. Se f(x) è un polinomio, l'equazione si dice algebrica, altrimenti trascendente. Esistono formule generali per le equazioni algebriche fino al 4° grado, quelle di 2° grado risolte dagli antichi, quelle di 3° e 4° grado dagli algebristi bolognesi del '500. Poi si dimostrò che **non esistono** formule risolutive per le equazioni generali di grado superiore, tranne che in casi particolari. Le equazioni trascendenti non ammettono in generale formule risolutive; le equazioni goniometriche o con esponenziali e logaritmi che si assegnano a scuola sono scelte col lanternino. Sen(x)+Cos(x) =0 la sappiamo risolvere tutti, ma provate Sen(x)+Cos(x)-x =0.

Provate a giustificare la seguente proposizione. Questa equazione ammette **almeno una radice reale** compresa tra 0 e $\pi/2$. Questo è il primo passo per un algoritmo di approssimazioni successive che consente di calcolare uno zero con una precisione prefissata, *anche se non c'è la formula.*

Una proprietà molto importante delle equazioni algebriche è la seguente (**teorema fondamentale dell'algebra** dimostrato da Gauss): nel campo complesso un'equazione algebrica dii grado n possiede **n radici**, contate con la dovuta **molteplicità.** Se i coefficienti dell'equazione sono **reali,** le eventuali radici complesse sono **a coppie coniugate,** perciò un'equazione di grado dispari **ha almeno una radice reale.**

Questo è molto utile nello studio delle funzioni algebriche, spesso permette di capire al volo alcune proprietà del grafico.

Un altro teorema utile per lo studio di equazioni algebriche a coefficienti razionali (e quindi riducibile a coefficienti interi) è il seguente **teorema di Ruffini**: sia $\mathbf{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0}$ **un'equazione a coefficienti interi**; se ammette una soluzione reale razionale p/q (ridotta ai minimi termini), p dovrà essere un divisore del termine noto a_0 e q un divisore del primo coefficiente a_n. Provate a dimostrarlo, sostituire p/q nell'equazione, ridurla a forma intera, portare il termine che non contiene p dall'altra parte del segno di uguaglianza e osservando che p, dividendo il primo membro, divide anche il secondo membro, ma è primo con q, dunque divide a_0. Ripetere il procedimento per q.

Tenere poi presente che, se x_1 è uno zero del polinomio, allora questo è divisibile per $x-x_1$.

Proporrò ora dei quesiti che richiedono solo la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado e il teorema di Ruffini (per le equazioni algebriche), nonché un pò di fantasia, o molta, secondo i casi.

(3.1) Risolvere le seguenti equazioni:

$\mathbf{x^3+2x^2-x-2=0}$ (mettere in evidenza un fattore).
Tre radici reali distinte (*semplici*, cioé ciascuna di molteplicità 1).

$\mathbf{x^3-x^2-4x-6=0}$ (Usare il teorema di Ruffini per abbassare il grado).
Due radici complesse **coniugate e** una reale (ovviamente semplice)**.**

$\mathbf{4x^3-20x^2+33x-18=0.}$ Tre radici reali, una semplice e una doppia (di molteplicità 2).

$\mathbf{27x^3+54x^2+36x+8=0.}$ Una radice reale **tripla (**di molteplicità 3, una contata tre volte).

$\mathbf{x^3+2x^2+10x-20=0}$. (Non provate con i 12 divisori di 20, nessuno va bene).
Tuttavia, siccome il polinomio è di grado dispari, **deve** avere almeno uno zero reale.
Se avete il concetto di funzione continua (e un polinomio è una funzione continua), potete dimostrare che esiste almeno una radice reale nell'intervallo [1, 2].
Giustificate poi, con i mezzi a vostra disposizione, l'unicità di questa radice reale.

[1] Vedi *http://digilander.libero.it/ottavioserra0* **Cartella Articoli, Sezione Miscellanea, Art. n° 30**

$x^4+1=0$. (Aggiungete ad ambo i membri il termine che rende il primo membro il quadrato di un binomio, estraete le due radici quadrate, avrete due equazioni di 2° grado. Risolvendole, troverete le quattro radici quarte di -1, a coppie coniugate.

(**3.2) Equazioni reciproche.**

Un'equazione algebrica di grado n si dice reciproca se per tutti gli indici i, j tali che i+j=n risulta $a_i=a_j$ (reciproca di prima specie) oppure $a_i=-a_j$ (reciproca di seconda specie).

Notare che le radici di un'equazione reciproca non possono mai essere zero (perché?).

Dimostrare le seguenti proprietà:

- Se z è una radice, anche 1/z lo è (da qui il nome). Nota bene: 0 non è mai una radice.
- Le reciproche di grado pari di seconda specie mancano del termine centrale, perché $a_{n/2}=0$.
- Tutte le reciproche di seconda specie hanno 1 tra le radici, perciò sono divisibili per x-1.
- Le reciproche di prima specie di grado dispari hanno -1 tra le radici, perciò…
- Le reciproche di prima specie di grado pari hanno il termine centrale col coefficiente $a_{n/2}$ arbitrario, perciò non è possibile, in generale, trovare una radice col teorema di Ruffini per poterla abbassare di grado. Si deve procedere così: si divide 1° e 2° membro per x^2, si può perché x è diverso da 0, si raccolgono i termini con lo stesso coefficiente, di pone $x+1/x=y$, si calcola x^2+1/x^2 in funzione di y, eccetera. Buon lavoro.

Risolvere ora le seguenti equazioni.

$x^3+2x^2-2x-1=0$; $x^3-2x^2-2x+1=0$; $x^4-3x^3+3x-1=0$; $x^4+3x^3+3x+1=0$; $x^4+3x^3-5x^2+3x+1=0$.

Le due seguenti si risolvano in due modi: **$x^4+3x^3-8x^2+3x+1=0$; $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$.**

(3.3) Equazioni trascendenti.

Per tali equazioni in generale non esistono formule risolutive. Per capire, a volte basta un'occhiata, se una certa equazione ha radici reali, aiuta la rappresentazione grafica, anche solo qualitativa.

Le **radici rea**li dell'equazione **f(x)=0** sono le **ascisse** dei pinti di **intersezione dei grafici delle funzioni y=f(x) e y=0.** Se l'equazione è posta nella forma **f(x)=g(x)**, le eventuali radici reali sono le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle funzioni **y=f(x) e y=g(x).**

Esercizi.

Dire se l'equazione **Cos(x)-x=0** ha una radice reale e in caso affermativo determinare due numeri interi consecutivi tra i quali si trova la soluzione.

Verificare che l'equazione **$5^x=x$** non ha soluzioni (reali**),** mentre **$5^x= -x$** ne ha una, compresa tra…

(3.4) Alcune equazioni trascendenti strane ammettono soluzione ***esatta***.

Considero dapprima $x^{\left(x^6\right)}=144.$ Elevando ambo i membri alla sesta, ho

$\left(x^6\right)^{\left(x^6\right)}=144^6=12^{12}$ e quindi $x^6=12,$ da cui le due soluzioni reali $x=\pm\sqrt[6]{12}$

Le altre 4 radici seste sono complesse (a coppie coniugate).

Provate $x^{\left(x^5\right)}=100$ e $x^{\left(x^4\right)}=64.$ (**Come vedete, le sto scegliendo col *lanternino*).**

Per la prossima: $x^{\left(x^2\right)}=15007$, si può approssimare la radice con metodi numerici. Determinate i due numeri interi consecutivi (positivi!) tra cui cade l'**unica** radice **reale**.

(3.5) L'equazione $x^{\left(x^2\right)}=2$ si risolve in modo ***esatto*,** provare.

Invece, $\left(x^x\right)^2=2$ non si può risolvere in modo esatto. Approssimare la soluzione a meno di 1/10.

(3.6) L'equazione $x^{(x^{\alpha})}=\alpha$ generalizza la prima delle **(3.5)**, con **α** reale. Dimostrare che **α deve essere positiva** e che la soluzione è $x=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$.

4. Funzioni

Si richiede la conoscenza dei **limiti** e, ***possibilmente***, delle **derivate**.

(4.1) Date le due funzioni polinomiali $P(x)=x^2+3x-4$ e $Q(x)=x^2-7x+10$, trovare dominio, asintoti e disegnare il grafico, **almeno qualitativo**, delle tre funzioni f, g, h. Dire, anche, se vedete punti di massimo, di minimo e di flesso. Se conoscete le derivate, calcolarli.

$$f(x)=\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}, g(x)=\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}, \mathrm{h}(x)=\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}.$$

(4.2) La soluzione dell'equazione **(3.6)**, cioè $x=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$, esprime x in funzione di α. Denotando, come è usuale, con y la soluzione x e con x la variabile α, si chiede di studiare la funzione $y=x^{\frac{1}{x}}$. Perché il dominio è la semiretta aperta]0; +∞ [? Verificare che $\lim_{x\to 0}(y)=0$, perciò si può prolungare il dominio fino a 0 (zero). Calcolate la derivata y' di y e dimostrate, con gli ordini di infinitesimi, che y' tende a 0 (zero) per x tendente a 0. Determinate il punto di massimo (assoluto) e il comportamento per x→ +∝ e disegnate il grafico. **Senza calcolare la derivata seconda di y**, stabiliite quanti flessi presenta il grafico.

(4,3) Ricordo che una funzione f: A→B si dice **biunivoc**a se è iniettiva e suriettiva, cioè se: per tutti gli x, x' elementi di A f(x)=f(x') implica x=x'e per ogni y di B esiste un x di A tale che f(x)=y.

In tal caso esiste una funzione f^{-1}di B su A, detta inversa di f, tale che, per ogni y di B $f^{-1}(y)=x$, se e solo se f(x)=y. Verificate che $f^{-1}(f(x)) = x$ [$f^{-1}.f$ è la funzione identica su A] e, analogamente, $f(f^{-1}(y)) =y$ [$f.^{f}1$ è la funzione identica su B].

Si noti che i grafici delle funzioni y=f(x) e $y=f^{-1}(x)$ sono simmetrici rispetto alla diagonale del piano cartesiano y=x, infatti se (a, b) è un punto di f, (b, a) è un punto di f^{-1}. Perciò, se i loro grafici si intersecano, si devono intersecare sulla retta y=x.

Dimostrare che i grafici di $y=b^x$ e di $y=\log_b(x)$ si intersecano in un solo punto se 0<b<1, in due punti distinti se $1<b<e^{(1/e)}$, coincidenti se $b=e^{(1/e)}$, nel qual caso il loro punto di contatto è (e, e). Infine, se $b>e^{(1/e)}$, i grafici sono disgiunti.

Suggerimento: si studi la funzione $f(x)=\log_b(x)-x$ per trovare le intersezioni di $y= \log_b(x)$ e di y=x per b>1 e si imponga che l'ordinata del massimo sia positiva. (Perché?).

5. Terne pitagoriche.

Si dice che tre numeri **naturali** x y z formano una terna pitagorica, se $z^2=x^2+y^2$, cioè+ se essi rappresentano le misure dei cateti e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo. La più nota, conosciuta anche dagli antichi Egizi, è la più piccola: 3 4 5. Di tali terne ne esistono infinite: **determinarle tutte.**

Primo procedimento, di natura aritmetica. Da $z^2-y^2=x^2$ segue $\frac{z+y}{x}=\frac{x}{z-y}$. Se vogliamo che x y e z siano numeri naturali, occorre che queste due frazioni (uguali) siano uguali al rapporto di due numeri naturali, m ed n, perciò si ottiene il sistema

$$\begin{cases}\frac{z+y}{x}=\frac{m}{n}\\ \frac{z-y}{x}=\frac{n}{m}\end{cases}.$$ Sommando e sottraendo, si ottiene $z=m^2+n^2$, $y=m=m^2-n^2$, $x=2mn$.

Volendo ottenere solo terne irriducibili, cioè terne corrispondenti a triangoli **non simili**, come 6 8 10 riducibile a 3 4 5, devono valere le seguenti condizioni, **che dovete giustificare**: m ed n devono avere parità opposta, ovvero uno deve essere pari e l'altro dispari; inoltre, m ed n devono essere primi tra loro.

Secondo procedimento, di natura geometrica. Si ponga $x/z=X$, $y/z=Y$. La relazione pitagorica tra x y e z conduce all'equazione del cerchio canonico (goniometrico) $X^2+Y^2=1$. Si scriva l'equazione della retta passante per il punto $A(X=-1, Y=0)$ di coefficiente angolare positivo k, che interseca il cerchio nell'ulteriore punto $P(X, Y)$. Determinate le coordinate di P in funzione di k, si imponga che k sia un numero **razionale (rapporto di due numeri naturali n ed m).**