

Ottavio Serra

La scala di Planck

Introduzione: La numerologia e la scienza.

Il fascino dei numeri (interi) nella spiegazione dei fenomeni naturali ha radici antiche. I pitagorici furono tra i primi, per quanto ne sappia, a introdurre formule aritmetiche per interpretare i fenomeni, dagli accordi musicali al moto dei corpi celesti. A volte forzarono la natura per adattarla ai loro schemi numerici, si pensi al mistico (per loro) numero dieci e all'invenzione dell'Anti Terra per far quadrare i conti. La commistione tra pitagorismo e kabbala ebraica ebbe grande fortuna tra gli studiosi italiani dell'umanesimo e del rinascimento, tra i quali spiccano Marsilio Ficino (1433–1499) e Pico della Mirandola (1463–1494); nel resto d'Europa ricordo gli astronomi Ticho Brahe (1546–1601) e Giovanni Keplero (1571–1630). Quest'ultimo nel trattato *Harmonice mundi*, in cui tra l'altro enuncia la sua terza legge, parla anche dei solidi platonici e del loro significato astronomico, nonché dei rapporti tra i periodi di rivoluzione dei pianeti e numeri interi *piccoli*. Lo sviluppo della meccanica celeste basata sulla legge di gravitazione universale di Newton (che tra l'altro si occupò e scrisse anche di esoterismo e di cabbala), giustificò alcune idee che Keplero aveva avanzato su basi kabbalistiche, come il fatto che Plutone non venga espulso dal sistema solare, perché il suo periodo orbitale è in risonanza con quello di Nettuno nel rapporto *semplice* di 3/2. Un altro esempio di risonanza è il rapporto 3/2 tra il periodo di rivoluzione intorno al Sole e il periodo di rotazione sul proprio asse del pianeta Mercurio, come pure il rapporto 1/1 tra il mese sinodico (periodo di rivoluzione della Luna intorno alla Terra rispetto al Sole di 29^g12^h44^m2^s,9) e il periodo di rotazione della Luna intorno al proprio asse; la conseguenza è che la Luna ci mostra sempre la stessa faccia.

Nel linguaggio della fisica atomica si parla di accoppiamento *spin-orbita*.

In seguito anche fisici come l'irlandese George Stoney (1826-1911), Max Planck e l'astronomo Arthur Eddington si dedicarono a considerazioni numerologiche applicate alla scienza, ma è chiaro che in questo campo occorre molta cautela, come ammonisce Umberto Eco in una brillante *Lectio magistralis* tenuta a Roma il 2008 al II festival della matematica, dal titolo "*Usi perverso della matematica*".

Veniamo ora a parlare delle grandezze fisiche alla scala di Planck e cercheremo di capire perché si dice che le leggi fisiche non sono applicabili all'universo prima di 10⁻⁴³s dopo il big bang o perché le forze si unificano (hanno intensità comparabili) all'energia di 10¹⁹ GeV.

Che cos'è la scala di Planck.

È l'insieme delle unità di misure di lunghezza, tempo, massa, energia, temperatura, carica elettrica, eccetera, rispetto alle quali le intensità delle interazioni forti, elettromagnetiche, deboli e gravitazionali si unificano. (Scala della *grande unificazione e della gravità quantistica*).

Occorre perciò esprimere le unità di misura delle grandezze fondamentali in funzione di alcune costanti universali, in modo da renderle indipendenti da unità costruite a misura d'uomo (geocentrica e antropocentrica), come il metro, il secondo, il chilogrammo. Si verifica che questo obiettivo può essere realizzato con tre sole costanti universali; di solito si usano, seguendo Max Planck, la costante della gravitazione universale G, la velocità della luce (nel vuoto) c, la costante di Planck h. Siccome si è interessati all'ordine di grandezza, è ininfluente usare h, oppure $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. (\hbar è l'unità di

misura usuale dell'azione e del momento angolare, orbitale o di spin).

I valori numerici che utilizzerò nei calcoli sono:

$$G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{Kg}^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{Kg}^{-1};$$

$$c=3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1};$$

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2\text{s}^{-1}\text{Kg};$$

Ogni unità di Planck sarà perciò una combinazione del tipo $G^\alpha \cdot c^\beta \cdot h^\gamma$ e la dimensione fisica sarà espressa dalla seguente combinazione: $\text{m}^{3\alpha}\text{s}^{-2\alpha}\text{Kg}^{-\alpha} \cdot \text{m}^\beta\text{s}^{-\beta} \cdot \text{m}^{2\gamma}\text{s}^{-\gamma}\text{Kg}^\gamma$, ovvero

$$[1] m^{3\alpha+\beta+2\gamma} \cdot s^{-2\alpha-\beta-\gamma} \cdot \text{Kg}^{-\alpha+\gamma}$$

Gli esponenti α , β , γ vanno calcolati caso per caso.

Determiniamo ora le unità di Planck.

a) **Lunghezza di Planck l_p** . Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \text{ . Si trova } \alpha=1/2, \beta=-3/2, \gamma=1/2.$$

Pertanto otterremo per l_p la seguente espressione:

$$l_p = \sqrt{\frac{G \cdot h}{c^3}} = (6,67 \cdot 10^{-11})^{\frac{1}{2}} \cdot (3 \cdot 10^8)^{\frac{-3}{2}} \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6,67 \cdot 6,63 \cdot 10}}{3\sqrt{3}} \cdot 10^{-35} = 4,05 \cdot 10^{-35} \text{ m}.$$

Se avessimo usato la costante di Planck *ridotta* \hbar , avremmo ottenuto $1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$, perciò **[2] $l_p=10^{-35} \text{ m}$** , come ordine di grandezza.

b) **Tempo di Planck t_p** . Il sistema da risolvere è il seguente (vedi la formula [1]):

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 1 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \text{ . Si trova } \alpha=1/2, \beta=-5/2, \gamma=1/2.$$

Pertanto otterremo per t_p la seguente espressione:

$$t_p = (6,67 \cdot 10^{-11})^{\frac{-1}{2}} \cdot (3 \cdot 10^8)^{\frac{-5}{2}} \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^{\frac{-1}{2}} = \frac{\sqrt{6,67 \cdot 6,63 \cdot 10}}{9\sqrt{3}} \cdot 10^{-43} = 1,35 \cdot 10^{-43} \text{ s}, \text{ perciò}$$

[3] $t_p=10^{-43} \text{ s}$, come ordine di grandezza.

Si noti come l_p e t_p siano estremamente piccoli, al disotto di ogni possibilità di misura sperimentale. Per farsi un'idea, il rapporto tra il diametro del protone e la lunghezza di Planck l_p è $10^{-15}/10^{-35} = 10^{20}$ (cento miliardi di miliardi!); il rapporto tra un tipico tempo di interazione nucleare forte e il tempo t_p è $10^{-23}/10^{-43} = 10^{20}$ (come prima!).

c) **Massa di Planck m_p** . Il sistema da risolvere ora è il seguente:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 1 \end{cases} \text{ . Si trova } \alpha=-1/2, \beta=1/2, \gamma=1/2. \text{ Perciò}$$

$$m_p = (6,67 \cdot 10^{-11})^{\frac{-1}{2}} \cdot (3 \cdot 10^8)^{\frac{1}{2}} \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3,6,63}{6,67 \cdot 10}} \cdot 10^{-7} = 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ Kg} , \text{ perciò}$$

[4] $m_p = 10^{-8} \text{ Kg}$, come ordine di grandezza.

Questa massa ha un valore piccolo, ma non in modo esagerato ed è accessibile agli strumenti di misura della fisica nucleare, come uno spettrometro di massa.

d) Energia di Planck E_P . Possiamo usare la formula relativistica $E = m \cdot c^2$ e otteniamo

[4] $E_P = 5,5 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 4,95 \cdot 10^9 \text{ J}$. (Questa, a livello nucleare, è un'energia enorme).

Esprimiamola, come è d'uso, in eV (elettron Volt).

$$E_P = \frac{4,95 \cdot 10^9}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,1 \cdot 10^{28} \text{ eV} \approx 3 \cdot 10^{19} \text{ GeV}. \text{ Perciò}$$

[5] $E_P = 10^{19} \text{ GeV}$ come ordine di grandezza.

(Un milione di miliardi di volte maggiore dell'energia che si può raggiungere all'LHC del CERN!).

Questa è un'energia enorme rispetto alle normali energie in gioco nella fisica nucleare, di gran lunga al di sopra della portata di LHC, che è dell'ordine di 10^4 GeV ; 10^{19} GeV è l'energia della cosiddetta *grande unificazione*, alla quale, secondo la *gravità quantistica*, tutte le interazioni (le forze) hanno uguale intensità.

e) Temperatura di Planck T_P . La determineremo tramite la legge di Boltzmann; l'energia media di un grado di libertà vale $E = kT$, dove $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}/(^{\circ}\text{K mole})$ è la costante di Boltzmann.

Si ottiene, perciò, come ordine di grandezza,

[6] $T_P = 10^{32} \text{ }^{\circ}\text{K}$.

Questa dovrebbe essere stata la temperatura dell'universo subito dopo il *big bang*, alla presumibile (teorica) età di 10^{-43} secondi.

f) Vediamo ora come si può ottenere la carica elettrica di Planck.

Siccome dobbiamo esprimerla in funzione di G, c, h, partiamo dalla legge di Coulomb in unità elettrostatiche CGS: $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$. Segue $[q_P] = \left[\sqrt{F r^2} \right] = cm \sqrt{g \cdot cm \cdot s^{-2}} = cm^{\frac{3}{2}} \cdot s^{-1} \cdot g^{\frac{1}{2}}$.

Il sistema da risolvere è pertanto

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = \frac{3}{2} \\ -2\alpha - \beta - \gamma = -1 \quad . \quad \text{Si trova } \alpha=0, \beta=1/2, \gamma=1/2. \\ -\alpha + \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il fatto che α sia zero ci dice che l'unità di carica elettrica di Planck non dipende dalla costante di gravitazione universale e ciò può essere gradito e plausibile (*col senno di poi*). In definitiva, si trova

$$q_P = \sqrt{3 \cdot 10^{10} \text{ cm} / s \cdot 6,63 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot s} \approx 14,1 \cdot 10^{-9} \text{ u.e.s.CGS} = \frac{14,1 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^9} = 4,7 \cdot 10^{-18} \text{ C}$$

(Si ricordi che 1 C (un Coulomb) è $3 \cdot 10^9$ unità elettrostatica CGS di carica). In definitiva [7] $q_p = 47 \cdot 10^{-19}$ C, pari circa alla carica di 30 protoni (30e).

g) La grande unificazione.

Confrontiamo ora forza elettrica e forza gravitazionale.

La forza elettrostatica tra due protoni è

$$F_e = k \frac{q^2}{r^2} ; \text{ quella gravitazionale è, invece, } F_G = G \frac{m^2}{r^2} \text{ perciò il rapporto è}$$

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{k}{G} \left(\frac{q}{m} \right)^2 = \frac{9 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11}} \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \right)^2 = 1,24 \cdot 10^{36} . \text{ L'intensità della forza elettrica supera quella}$$

gravitazionale di oltre un miliardo di miliardi di miliardi di miliardi di volte!

Calcolo invece il rapporto tra le due forze alla scala di Planck.

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{k}{G} \left(\frac{q_p}{m_p} \right)^2 = \frac{9 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11}} \left(\frac{4,7 \cdot 10^{-18}}{5,5 \cdot 10^{-8}} \right)^2 = 0,985 \cdot 10^0 \approx 1 .$$

Alla scala di Planck forza elettrica e forza di gravitazione sono di uguale intensità!

Secondo la gravità quantistica anche le forze nucleari, alla scala di Planck, dovrebbero avere questa stessa intensità

h) Buchi neri alla scala di Planck.

Ci chiediamo ora quale dimensione dovrebbe avere una particella avente la massa di Planck per essere un buco nero. La relatività generale dice che il raggio di un buco nero (supponendo che abbia simmetria sferica) è $r = 2GM/c^2$. (Vedi bibliografia: Elio Fabbri oppure Ottavio Serra).

Già Laplace aveva ipotizzato che un corpo sferico (una stella, un pianeta) avente massa *abbastanza grande* e raggio *abbastanza piccolo* potrebbe avere una velocità di fuga pari alla velocità della luce.

In generale, per ottenere la velocità di fuga occorre uguagliare l'energia meccanica sulla superficie della stella all'energia minima (in valore assoluto) necessaria per portare una particella di massa m all'infinito. Siccome l'energia cinetica è $K = m \cdot v^2 / 2$ e l'energia potenziale di gravitazione è

$$U = \frac{-GMm}{R} , \text{ dove } R \text{ è il raggio della stella ed } M \text{ la sua massa, l'energia della particella sulla super-}$$

ficie della stella è $K+U$. Deve essere perciò $K+U=0$ e pertanto $v^2 = 2GM/R$. Se $v=c$, conclude Laplace, il raggio del buco nero sarà $R_S = 2GM/c^2$ (raggio di Schwarzschild). E' notevole che il risultato coincida con quello che si ottiene nella relatività generale, pur avendo usato considerazioni classiche e addirittura la formula non relativistica dell'energia cinetica.

Nel nostro caso $R_S = 2 \cdot (6,67 \cdot 10^{-11}) \cdot (5,5 \cdot 10^{-8}) / (9 \cdot 10^{16}) = 8,15 \cdot 10^{-35}$ m. Perciò, come ordine di grandezza si trova

$$[8] R_S = 10^{-35} \text{ m} = l_p \text{ (lunghezza di Planck).}$$

Ciò fa supporre che non sia possibile considerare lunghezze più piccole della lunghezza di Planck (e tempi più piccoli del tempo di Planck).

Nel caso dei buchi neri Schwarzschild definisce orizzonte degli eventi una superficie sferica che circonda una singolarità posta al centro della sfera; quest'ultima è un punto nel quale la densità sarebbe infinita e le leggi della fisica, secondo la teoria della relatività generale, perdono significato.

La singolarità potrebbe non essere necessaria, secondo alcune teorie di gravità quantistica (*gravità quantistica a loop*, vedi Carlo Rovelli). Secondo la gravità quantistica a loop lo spazio, così come il tempo, è granulare, quantizzato come la materia, suddiviso in elementi discreti delle dimensioni di una lunghezza di Planck. In altri termini, lo spazio-tempo avrebbe, secondo la suddetta teoria ancora agli inizi, un ruolo fisicamente attivo, come nella relatività generale, e in più la sua struttura intima sarebbe costituita da veri e propri "quanti" di spazio-tempo che formerebbero una densa rete in continua evoluzione.

Lo stesso Einstein nel 1955, pochi giorni prima della morte, nella prefazione da Lui scritta per "Cinquanta anni di Relatività" a cura di Mario Pantaleo (edizioni Giunti-Sansoni, 1955) conclude che forse va abbandonato il *continuum spazio-temporale* a favore di una descrizione del mondo puramente aritmetica (il cerchio si chiude e si ritorna a Pitagora?).

In condizioni normali, *macroscopiche*, non si percepirebbe la struttura *atomica* dello spazio-tempo, il quale appare un continuo matematico e l'Universo è descritto dalla relatività generale, ma a dimensioni dell'ordine della lunghezza di Planck le cose cambierebbero radicalmente: gli effetti quantistici e gravitazionali assumerebbero intensità confrontabili. Ciò, fra l'altro, eliminerebbe gli *infiniti* dalla fisica: Forze infinite, temperature e densità infinite, serie divergenti dell'elettrodinamica quantistica (QED), i cui infiniti sono eliminati mediante l'artificiosa tecnica di *rinormalizzazione* ideata da Richard Feynman, Swinger e Tomonaga. Nell'ambito della QED la rinormalizzazione dà risultati eccezionalmente precisi, mirabilmente in accordo con le misure sperimentali, ma la rinormalizzazione non funziona per eliminare le *singolarità* della Relatività Generale. Se lo spazio-tempo è quantizzato come la materia, si potrebbe creare una teoria che unifica fisica quantistica e relatività generale, nella quale non si presenterebbero più *infiniti e singolarità*.

Che l'infinito in fisica sia il segno di una *schematizzazione inadeguata* si può capire mediante un esempio elementare. La forza agente tra due cariche puntiformi è inversamente proporzionale al quadrato della distanza; perciò, se la distanza tende a zero, la forza tende all'infinito. Ciò appare veramente fantastico e non realistico; si deve perciò concludere che non esistono cariche puntiformi, corpi ridotti veramente a punti geometrici; due corpi si possono schematizzare come punti geometrici solo se sono *abbastanza* distanti tra loro.

Alcuni dei problemi più attuali, riguardanti la fisica dell'orizzonte degli eventi dei buchi neri, sono l'emissione della radiazione di Hawking, l'entropia dei buchi neri ed altre questioni correlate, ad esempio la fusione di buchi neri.

Molti risultati sono solo di tipo speculativo o ipotetico, considerando che, al momento, nessuno ha mai visto "da vicino" un buco nero (sono di dimensioni trascurabili, quelli stellari hanno solo pochi chilometri di diametro, non emettono radiazione misurabile e sono spesso avvolti da dischi di accrescimento o densi aloni di materia). C'è, inoltre, da osservare che dall'interno di un buco nero non può uscire alcuna informazione che possa dire alcunché sulla sua struttura intima o, perlomeno, non esiste una teoria di riferimento ben consolidata e suffragata da dati osservativi.

La teoria di riferimento potrebbe essere la *gravità quantistica*, la quale, andando oltre la relatività generale e oltre la meccanica quantistica, dovrebbe unificarle e trovare il quadro matematico dal quale scaturiscono entrambe. Ovviamente, non è semplice, visto che, nonostante notevoli studi in più università del mondo, tale quadro ancora non c'è. Che, però, alla base delle due grandi teorie della Natura ci sia qualcosa di unitario è molto probabile, considerato che, se si parte dai punti di contatto tra le due teorie, si giunge ad interessanti risultati che alimentano attualmente molti filoni di ricerca, in Fisica e in cosmologia.

Riferimenti bibliografici.

- 1) John Barrow: “I numeri dell’Universo”, Oscar Mondadori, 2002;
- 2) Vincenzo Barone: “L’ordine del mondo”, Bollati Boringhieri, 2013;
- 3) Carlo Rovelli: “La realtà non è come ci appare”, Raffaello Cortina, 2014;
- 4) Stephen Hawking: “Dal big bang ai buchi neri”, Rizzoli, 1990;
- 5) Richard Feynman: “QED – *La strana teoria della luce e della materia*”, Adelphi, 1992;
- 6) Elio Fabbri: “Per un insegnamento moderno della Relatività”, A.I.F. Pisa, 1989;
- 7) Ottavio Serra: “*Teoria della relatività*”, Annuario del Liceo Scientifico Scorza, 2007. Vedi anche sul sito digilander.libero.it/ottavioserra0 la cartella *Articoli/Liceo scientifico Scorza di Cosenza* e l’articolo “*La relatività nella scuola (chi l’ha vista?)*” nella cartella *Liceo classico Garibaldi di Castrovillari*.