Ottavio Serra

Successioni di Fibonacci e generalizzazione

(Numero aureo e numeri metallici)

Le notevoli proprietà delle successioni metalliche.

Sulla successione di Fibonacci ho scritto in varie riprese[1].

Veramente, si deve parlare al plurale, perché la relazione ricorsiva $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ è del 2° ordine e dà luogo a un'equazione caratteristica di 2° grado $\mathbf{x^2=x+1}$. La soluzione generale è pertanto

$$[1]F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Si ottiene perciò una doppia infinità di successioni particolari, a seconda dei valori che si attribuiscono alle ***costanti arbitrarie*** $\mathbf{c_1}$ **e** $\mathbf{c_2}$.

La successione usuale di Fibonacci, $F_0=0$, $F_1=1$ e poi procedendo ricorsivamente, si ricava proprio imponendo $F_0=0$, $F_1=1$, da cui segue $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, c_2=-c_1.$

Per questa particolare successione, che chiamerò ***successione standard di Fibonacci***, si dimostra (per induzione su n) che $(F_n)^2- F_{n-1}.F_{n+1}$ cambia segno, ma non valore assoluto, passando da n ad n+1, e siccome $(F_1)^2-F_0.F_2=1^2-0.1=1$, segue la notevole proprietà[2]:

$$[2]F_n^2 - F_{n-1}.F_{n+1} = -(-1)^n.$$

(Veramente in "QED" (nota[2]) Lolli trova $+(-1)^n$, perché parte con $F_0=1$, $F_1=1$, $F_2=F_1+F_0$, eccetera).

Dalla [2] deriva che termini consecutivi della successione standard (per n>0) sono co-primi (primi tra loro); infatti, se Fn e F_{n+1} avessero un fattore primo comune, questo, dividendo il primo membro, dovrebbe dividere anche il secondo membro della **[2]**, il cui valore assoluto è 1, e ciò è impossibile.

[1] "*Sezione aurea e successioni di Fibonacci*" sull'Annuario del Liceo Scientifico Scorza di Cosenza, "*L'infinito in matematica*" sulla rivista "Orizzonti" del Liceo Classico Gioacchino da Fiore di Rende. Entrambi reperibili sul mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0,* cartella Articoli, sottocartelle Liceo scientifico Scorza e Liceo classico da Fiore. Nella stessa cartella, sottocartella Miscellaea, si trova l'articolo "*Frazioni continue e numeri metallici*."
Vedi anche Pierre Arnoux: *Dynamique du nombre d'or* reperibile su internet.

[2] Vedi per esempio Gabriele Lolli, "*QED fenomenologia della dimostrazione*", Bollati Boringhieri 2005, pag. 177.

Come è noto e facilmente verificabile, $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\equiv\Phi,$ (il numero aureo) e questo limite è lo stesso per tutte le successioni di Fibonacci, per tutte le scelte di c_1 e di c_2, ossia per tutti i valori di F_0 e F_1, anche non interi, perché $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1.$

Io ho trovato una generalizzazione della **[2]** che vale per tutte le successioni d Fibonacci:

$$[3] F_n^2-F_{n-1}.F_{n+1}=-(-1)^n\left(F_1^2-F_0.F_2\right).$$

Per dimostrare la [3] ho seguito il procedimento di Gabriele Lolli in QED (vedi in nota[2]), ma, a mio avviso, in modo più breve e lineare. Ecco come:

$$F_n^2-F_{n-1}.F_{n+1}=F_n^2-F_{n-1}.(F_n+F_{n-1})=F_n^2-F_{n-1}.F_n-F_{n-1}^2=$$

$$=(F_n-F_{n-1}).F_n-F_{n-1}^2=F_{n-2}.F_n-F_{n-1}^2,$$

vale a dire: passando da un indice n al precedente (o al successivo), il primo membro della [3] cambia nel suo opposto. Siccome per n=1 la [3 è banalmente vera, segue che per n=2 deve cambiar segno e pertanto per tutti gli n dispari il primo membro della [3] vale $(F_1)^2$-$F_0.F_2$, per tutti gli n pari vale l'opposto: **segue la [3].**

Si osservi che se $F_0=0$, qualunque sia $F_1=b$, si ottiene una successione multipla di quella standard: 0, b, b, 2b 3b, 5b, 8b, … e, se b è intero diverso da zero, tutti i termini sono divisibili per b.

Se si pone $F_0=a$, $F_1=b$, la [3] si può scrivere

$$[4] F_n^2-F_{n-1}.F_{n+1}=(-1)^n\left(a.(a+b)-b^2\right).$$

Il caso a=1, b=2 dà ancora la successione standard, salvo una lieve differenza iniziale: 1, 2 ,3, …

Per avere successioni essenzialmente diverse da quella standard occorre iniziare con altri valori, scegliendo a e b diversi, per esempio a=1, b=3; {1, 3, 4, 7, 11, …}, per la quale la [4] dà -5. $(-1)^n$.

Questa volta pare che termini consecutivi possono essere o co-primi o entrambi divisibili per 5, ma esaminando un tratto sufficientemente lungo si nota che da F_{12} in poi l'ultima cifra si ripete (1, 3, 4, …), perciò termini consecutivi non terminano mai per 0 o per 5 e vale la co-primalità.

Analogamente, si consideri la successione $F_0=1$, $F_1=4$, $F_2=5$, $F_4=9$, $F_5=14$, …

Questa volta la [4] fornisce $-11(-1)^n$ ed è più difficile **escludere** che ci siano termini consecutivi aventi 11 come fattore comune.

Che cosa può dirsi in generale? Intanto, perchè abbia senso parlare di co-primalità, occorre che i valori iniziali $F_0=a$ e $F_1=b$ siano interi. Inoltre, se a=qx e b=qy, il fattore comune **q** si propaga a tutti i termini della successione e non esistono, in particolare, termini consecutivi co-primi.

Supponiamo pertanto a e b co-primi. In tal caso b e a+b sono co-primi (Se b=qx e a+b=qy, avremmo a+qx=qy, a=q(y-x); a e b avrebbero il fattore comune q e non sarebbero co-primi). Dico che tutte le coppie di termini consecutivi sono co-prime. Sia, per assurdo, F_n e F_{n+1} la prima coppia di termini **non co-primi**; esiste allora un numero primo q che divide entrambi, ma non F_{n-1}; q divide anche $(F_n)^2-F_{n-1}.F_{n+1}$. Poniamo $F_n=qx$, $F_{n+1}=qy$; perciò esiste un numero intero z tale che

$(F_n)^2-F_{n-1}.F_{n+1}=qz$. Perciò

$qz=(F_n)^2-F_{n-1}.F_{n+1}=(F_n)^2-F_{n-1}.(F_n+F_{n-1})=(F_n)^2-F_n.F_{n-1}-(F_{n-1})^2$. Segue

$(qx)^2-qx.F_{n-1}-qz=(F_{n-1})^2$, dunque q divide il quadrato di F_{n-1}, ma q è primo, dunque deve dividere anche F_{n-1}, contro l'ipotesi.

Ritornando, in particolare, alla successione 1, 4, 5, 9, 14, … possiamo essere certi che tutte le coppie di termini consecutivi sono co-prime.

Generalizzazione delle successioni di Fibonacci.

La generalizzazione si ottiene scegliendo la formula ricorsiva

[5] $F_n=p.F_{n-1}+F_{n-2}$ o, equivalentemente, **$F_{n+1}=p.F_n+F_{n-1}$,** essendo p un numero reale positivo (per p=1 otteniamo le successioni di Fibonacci). Si ottengono le infinite successioni generalizzate (**successioni *metalliche di classe p)*** in base alla scelta dei valori iniziali F_0 e F_1. Se questi sono interi e p è pure intero (positivo), per ogni n anche F_n sarà intero. Dalla [5] si ricava l'equazione caratteristica

$x^2-px-1=0$, le cui soluzioni sono

$\Psi=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}, \psi_2=\dfrac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}$. Ψ è chiamato *numero metallico (di classe p)*. Per p=1, Ψ coincide col numero aureo, per p=2, il numero $\Psi=1+\sqrt{2}$ è detto numero argenteo.

La soluzione generale della [5] è

$$[6]\, F_n=c_1\Psi^n+c_2\psi_2^n \equiv c_1\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^n$$

Si noti che $-\psi_2=1/\Psi$. Segue che $\Psi+\psi_2=\Psi-1/\Psi=p$ e perciò, se p è intero, il numero metallico Ψ e il suo inverso hanno la stessa parte decimale, come accade per il numero aureo Φ.

In generale, dall'equazione caratteristica $x^2=px+1$ segue, per tutti i numeri metallici, $\Psi = p + \frac{1}{\Psi}$ che si espande in frazione continua

$$[7]\,\Psi = p + \frac{1}{\Psi} = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \ldots}}} .$$

Da $\Psi^2 = p\Psi + 1$ segue $\Psi^3 = (p\Psi + 1)\Psi = p\Psi^2 + \Psi = (p^2 + 1)\Psi + p$.

Se consideriamo la successione metallica di parametro p <u>con le condizioni standard $F_0=0$, $F_1=1$</u>, le relazioni precedenti si possono scrivere $\Psi^2 = F_2\Psi + F_1, \Psi^3 = F_3\Psi + F_2$, che suggeriscono la relazione generale

$$[8]\,\Psi^n = F_n\Psi + F_{n-1} .$$

Questa si dimostra per induzione: è vera per n=1 (e per n=2); allora

$$\begin{aligned}\Psi^{n+1} &= (F_n\Psi + F_{n-1})\Psi = F_n\Psi^2 + F_{n-1}\Psi = F_n(\mathrm{p}\,\Psi + 1) + F_{n-1}\Psi = \\ &= (pF_n + F_{n-1})\Psi + F_n = F_{n+1}\Psi + F_n\end{aligned},$$

che è quanto ci si deve aspettare nel passaggio da n a n+1.

Vogliamo ora dimostrare che per tutti i valori (reali) di p e per tutte le condizioni iniziali F_0 e F_1 le successioni metalliche soddisfano la relazione

$$[9]\,F_n^2 - F_{n-1}.F_{n+1)} = -(-1)^n(F_1^2 - F_0.F_2).$$ Infatti,

$$F_n^2 - F_{n-1}.F_{n+1} = F_n^2 - F_{n-1}(pF_n + F_{n-1}) = F_n^2 - pF_{n-1}.F_n - F_{n-1}^2 = F_n(F_n - pF_{n-1}) - F_{n-1}^2 =$$

$$= F_n.F_{n-2} - F_{n-1}^2 = -(F_{n-1}^2 - F_n.F_{n-2}) .$$

Ciò significa che il primo membro della [9] cambia segno ma non valore assoluto quando n varia di 1. Siccome per n=1 la [9] è banalmente vera, segue che, per tutti gli n dispari, risulta

$F_n^2 - F_{n-1}.F_{n+1)} = F_1^2 - F_0.F_2$, e quindi, per tutti gli n pari, $F_n^2 - F_{n-1}.F_{n+1)} = -(F_1^2 - F_0.F_2)$.

Perciò la [9] è vera in generale. Si noti che la [9] è identica alla [3] dimostrata nel caso particolare delle successioni di Fibonacci (p=1),

Dimostro ora che, se p, F_0, F_1 sono interi e se D è il massimo comun divisore di F_0 e F_1, allora

[10] D divide tutti gli F_n e

[11] D è il massimo comun divisore di ogni coppia di termini consecutivi della successione metallica.

1°) Se D non dividesse tutti i termini F_n, chiamo m il minimo indice per cui D non divide F_m. Siccome D divide F_{m-1} e F_{m-2}, F_{m-1} sarà uguale a Dx e F_{m-2} sarà uguale a Dy, essendo x e y opportuni interi. Ma $F_m=p.F_{m-1}+F_{m-2}=D(px+y)$, dunque D divide F_m, contro l'ipotesi e la [10] è dimostrata.

2°) Se la [11] non fosse vera, siccome D divide tutti i termini della successione, esisterebbe un indice minimo n>1 tale che MCD(F_n, F_{n+1})=D' multiplo di D (D'$\geq D$), perciò F_{n+1}=D'.x e F_n=D'.y per opportuni x e y interi. Ma $F_{n+1}=pF_n+F_{n-1}$, perciò D'.x=pD'y+F_{n-1}, e si evince che D' divide F_{n-1}; ma D' divide anche F_n, dunque D' divide il massimo comun divisore D di F_{n-1} e di F_n. Segue allora che D'$\leq D$, ma era D'$\geq D$, dunque **D'=D** e la **[11] è dimostrata**.

Corollario. Se F_0 e F_1 sono co-primi, sono co-prime tutte le coppie di termini consecutive.[3]

Un'altra notevole proprietà delle successioni metalliche.

$$\Psi = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$$

Maggiore di 1 se p è positivo. Allora la serie geometrica di ragione 1/Ψ converge e si ha

$$[12]\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Psi}\right)^n = \frac{\Psi}{\Psi-1},$$

$$[13]\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Psi}\right)^{2n} = \frac{\Psi^2}{\Psi^2-1} = \frac{\Psi}{p},$$

$$[14]\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Psi}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\Psi}\frac{\Psi}{p} = \frac{1}{p}.$$

(Verificare che Ψ/p+1/p= Ψ/(Ψ-1).

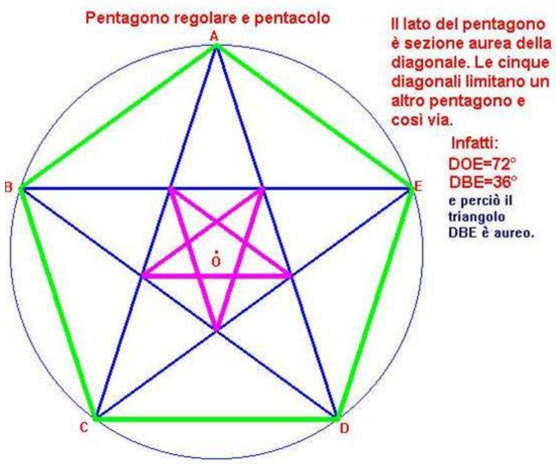
Le formule precedenti diventano molto più eleganti se Ψ è sostituito dal numero aureo ϕ (p=1).

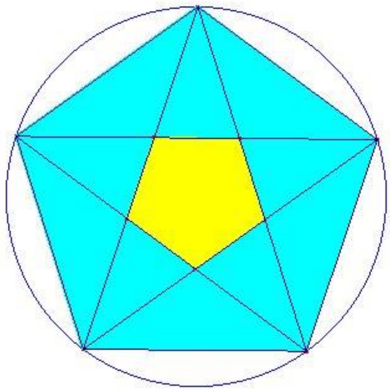
La somma della [12] diventa 1+ $\phi = \phi^2$, la somma della [13] diventa ϕ e della [14] diventa 1.

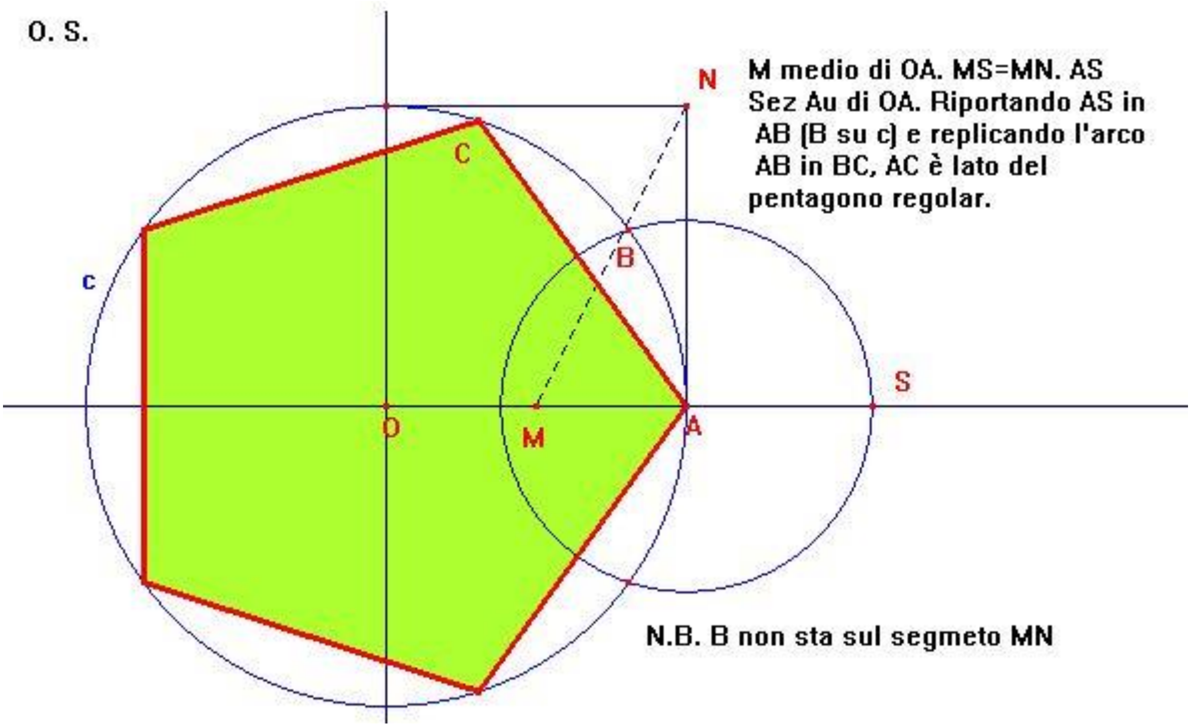
Queste belle proprietà, in aggiunta alle mirabili proprietà geometriche che si manifestano nel pentagono regolare, giustificano pienamente il nome di *numero d'oro* dato a ϕ (Fidia?), che geometricamente proviene dal problema euclideo di dividere un segmento in media ed estrema ragione, fornendo la proporzione che Luca Pacioli chiamò *divina* e la cui media proporzionale fu detta *sezione aurea* dai matematici successivi.

[3] Per il software relativo alle proprietà dimostrate vedi digilander.libero.it/ottavioserra0 Programmi eseguibili, sotto-cartelle Algebra, file "Successioni di Fibonacci e generalizzazioni" in *Pasca*, con numeri interi grandi fino a 2000 cifre e sotto-cartella *Delphi*, files "Numeri metallici in Z" che utilizza il tipo *LongInt* e "Numeri metallici in R" che utilizza il tipo *Exteended.*

Inserisco infine alcuni disegni realizzati con "Cabri" dai quali si evincono le proprietà del pentagono, compresa quella che le diagonali limitano un pentagono più piccolo il cui lato è la media ragione (la sezione aurea) dell'estrema ragione della diagonale del pentagono originario. In particolare, la diagonale del secondo pentagono è uguale all'estrema ragione della diagonale del primo pentagono. L'incapsulamento dei pentagoni continua in un processo senza fine. Tutte le proprietà si dimostrano osservando che le due diagonali uscenti da un vertice del pentagono dividono l'angolo in tre angoli di 36° ciascuno. (La terza figura indica una possibile costruzione della sezione aurea).







Esercizi.

1) Determinare i parametri c_1 e c_2 della formula **[1]** per le *condizioni iniziali* $F_0=1$, $F_1=3$.
Idem per $F_0=1$, $F_1=4$.

2) Data la relazione ricorsiva $A_{n+1}=2A_n+A_{n-1}$, con le condizioni iniziali $A_0=0$, $A_1=1$, scrivere i termini dall'indice 0 all'indice 6; scrivere l'equazione caratteristica e trovare una formula chiusa per A_n analoga alla **[1],** specificando i valori dei parametri c_1 e c_2; vale una relazione analoga alla **[2]**? Sapreste darne una dimostrazione? Vale una generalizzazione analoga alla formula **[3]**?

3) Data la relazione ricorsiva $A_{n+1}=-A_n+A_{n-1}$, (potremmo chiamarla successione *anti*-aurea, in generale *anti-metallica* quando p è negativo), scrivere la soluzione generale analoga alla [1] e calcolare il $\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}$ (il numero *anti-aureo*).

4) Data la successione argentea standard ($p=2$, $F_0=0$, $F_1=1$), determinare con calcolo algebrico diretto il cubo del numero argenteo e verificare il risultato applicando la **[8].**

Stesso calcolo per la successione standard con $p=3$ (Standard vuol dire $F_0=0$, $F_1=1$).