Ottavio Serra

Ricorsione, iterazione e formule chiuse.

1. La ricorsione consiste nella possibilità di definire una funzione richiamando la funzione stessa. Chiaramente, per evitare una regressione infinita, occorre introdurre una condizione di arresto.
Faccio degli esempi. La funzione *potenza* [Potenza(x,n)=x^n], x reale, n naturale, può essere definita come segue: <se n è 0 allora Potenza:=1, altrimenti Potenza:=x. Potenza(x,n-1)>. Il condizionale iniziale (prima di *altrimenti*) è la condizione di *arresto.* Si noti il simbolo di *assegnazione* "***:=***".
Esercizio: scrivere una definizione ricorsiva del fattoriale (n!), usando la condizione di arresto 0!=1.
La ricorsione fornisce una definizione elegante, maneggevole e potente di *polinomio*:
<**polinomio** è una lista concatenata di *monomi*; monomio è un record (un complesso) di tre *campi*, il 1°, chiamiamolo *coefficiente*, è un numero reale (o razionale), il 2°, chiamiamolo *grado*, è un numero naturale, il 3° è un **polinomio** (***sic***! In ciò sta la ricorsione; naturalmente, ci vuole una condizione di arresto: in fase di esecuzione deve essere previsto che la lista concatenata termini con un oggetto speciale, l'oggetto "***NIL***", analogo all'insieme vuoto della teoria degli insiemi.
La tecnica della ricorsione è molto elegante e maneggevole, ma l'implementazione in un linguaggio di programmazione impegna una grande mole di memoria e conduce spesso, in fase di esecuzione, all'errore di "*stack overfloow* (traboccamento della *pilla* (*catasta)* dei registri di memoria). Perciò, quando è possibile, conviene trasformare il ciclo *ricorsivo* in un ciclo *iterativo*.
Una versione iterativa di x^n potrebbe essere <P: = 1; mentre n>0 fai (P: =P.x; n: =n-1); Potenza: =P>. Questa funzione occupa pochissima memoria, però, come del resto la gemella ricorsiva, è *ingenua*: per calcolare, poniamo, $(1+1 \text{ miliardesimo})^{1 \text{ miliardo}}$ il ciclo è ripetuto un miliardo di volte (circa 10 secondi di tempo su un pc), ma esistono tecniche matematiche molto efficienti per eseguire il calcolo con sole 30 iterazioni!
Esercizio. Scrivere una versione iterativa del fattoriale. Ciò è molto semplice.
Ben diverso è il caso della successione di Fibonacci, che ammette una elegante rappresentazione ricorsiva, ma la cui versione iterativa non è immediata: **<Fib(n):= Fib(n-1)+Fib(n-2)>,** con le condizioni iniziali (di arresto) Fib(1):=1, Fib(0):=0. Qui c'è una doppia ricorsione, che richiede un grosso impiego di memoria e un notevole tempo di elaborazione; è quindi necessario, se non ci si vuole limitare a piccoli valori di n, ricorrere a una versione iterativa, che richiede tre variabili ausiliarie, a b c. La versione iterativa di Fib(n) è: **<a:=1; b:=0; mentre n>0 fai (c:=a, a:=b; b:=b+c; n:=n-1); Fib:=b;>**. Con la versione iterativa anche la durata del ciclo è piccola. **Nota.** Fib(n) ammette una **formula chiusa**, che si ottiene risolvendo l'equazione alle differenze suggerita dalla definizione ricorsiva. La soluzione generale è $Fib(n) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

La successione usuale si ottiene imponendo le condizioni iniziali Fib(0)=0, Fih(1)=1. Risulta
$Fib(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Badate: viene, come era da attendersi, dati i valori iniziali o e 1, una successione di **numeri naturali (interi positivi)**!

2. Presenterò ora lo studio di una lista di successioni di difficoltà crescente.

Le successioni saranno definite in modo ricorsivo; il problema consiste: 1° nel trovare la versione iterativa (facile), 2° nel trovare la formula chiusa (non sempre facile).

2.1. $a_n=a_{n-1}+n$ per n>1. (formula ricorsiva). La condizione di arresto è data da a_1. Si ottiene

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3$

………

$a_n=a_{n-1}+n$. Sommando membro a membro e cancellando gli addendi comuni al primo e al secondo membro (*metodo telescopico o della fisarmonica*), si ottiene la forma iterativa

$a_n= a_1+(2+3+...+n)\equiv a_1+\sum_{k=2}^{n}k$ e siccome questa somma si sa esprimere in forma chiusa, ottengo

[1] $a_n= a_1+\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)$.[1]

Esercizio. Si trovi la formula chiusa per la successione analoga $a_n=a_{n-1}+r.n+s$, con r ed s costanti.

2.2. $a_n=a_{n-1}+n^2$. Procedendo come nell'esempio 2.1, si trova $a_n=a_1+(2^2+3^2+…+n^2) = a_1+\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-1\right)$ e

[2] $a_n=a_1+\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)$. (Vedi nota[1]).

Esercizio. Si trovi la formula chiusa per la successione $a_n=a_{n-1}+(n-1)^2$.

Idem, per le succession $a_n=a_{n-1}+(n+1)^2$ e $a_n=a_{n-1}+(2n-1)^2$.

2.3. $a_n=a_{n-1}+n^3$. Procedendo come sopra, si ottiene la versione iterativa $a_n=a_1+\left(2^3+3^3+...+n^3\right)$,cioè

[3] $a_n=a_1+\left(\sum_{k=1}^{n}k^3-1\right)=a_1+\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-1\right)$. (Vedi nota[1]).

Esercizio. Si trovi la formula chiusa per $a_n=a_{n-1}+(2n-1)^3$.

2.4. $a_n=a_{n-1}+(-1)^n n$. Prepariamo la f*isarmonica*:

$a_2=a_1+2$

$a_3=a2-3$

$a_4=a_3+4$

………

$a_n=a_{n-1}+(-1)^n n$. Comprimendo la fisarmonica, si ottiene

$a_n=a_1+(2+4+…+2p)-(3+5+…+2d+1)$, essendo p il numero degli addendi pari e d quello degli addendi dispari. Ora, p= n div 2, parte intera di n/2; d=n-1-p (le righe della fisarmonica sono n-1). Segue

[4] $a_n=a_1+2\frac{p(p+1)}{2}-\frac{3+2d+1}{2}d=a_1+p(p+1)-d(d+2)$.

---

[1] Per le somme $\sum_{k=1}^{n}k, \sum_{k=1}^{n}k^2, \sum_{k=1}^{n}k^3$, che si incontrano negli esempi proposti, vedi nel sito digilander.libero.it/ottavioerra0 la cartella *Lezioni allo Scorza* e in particolare in Probabilità 2016 l'articolo "Il tacchino di Russell e altre storie".

Un modo alternativo di ottenere una formula chiusa per la successione 2.4 e che è utile per i casi seguenti è di scrivere $a_n=a_1+(2+4+\ldots 2p)-[(2+3+4+5+\ldots+n)-(2+4+\ldots+2p)]$, da cui segue $a_n=a_1+2(2+4+\ldots+2p)-(2+3+4+5+\ldots+n)=a_1+4(1+2+\ldots+p)-(2+3+4+5+\ldots n)$ e infine

[4 bis] $a_n = a_1 + 2p(p+1) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$. **In tal modo mi devo preoccupare solo di p=n div 2.**

2.5. $\mathbf{a_n=a_{n-1}+(-1)^n n^2}$**.** Si procede come per 2.4 e si ottiene $a_n=a_1+(2^2+4^2+\ldots (2p)^2) - [2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2-(2^2+4^2+\ldots(2p)^2)]$ e infine

[5] $a_n = a_1 + 8\sum_{k=1}^{p} k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - 1\right) = a_1 + \frac{4}{3}p(p+1)(2p+1) - \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right)$.

2.6. $\mathbf{a_n=a_{n-1}+(-1)^n n^3}$. Controllare che si ottiene quanto segue: $a_n=a_1+(2^3+4^3+\ldots+(2p)^3-[(2^3+3^3+4^3+5^3+\ldots+n^3)-(2^3+4^3+\ldots+(2p)^3]$ e infine

[6] $a_n = a_1 + 16\sum_{k=1}^{p} k^3 - \left(\sum_{k=1}^{n} k^3 - 1\right) = a_1 + 4p^2(p+1)^2 - \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1\right)$.

Esercizi. Trovare una formula chiusa per le successioni $a_n=a_{n-1}+(-1)^n(2n-1)$, $a_n=a_{n-1}+(-1)^n(2n-1)^2$, $a_n=a_{n-1}+(-1)^n(2n-1)^3$.

3. La forma chiusa delle sommatorie indicate in nota [1] si verifica applicando il principio di induzione *numerabile* di Peano: Se una proprietà è vera per n=k (numero naturale) e se, essendo vera per n, segue che è vera per n+1, allora è vera per tutti i numeri naturali da k in poi. In simboli:

(P(k) e P(n)$\rightarrow \boldsymbol{P(n+1)}) \rightarrow (\forall \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{P(n)})$. Consideriamo $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n$. Si dimostra che

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. L'uguaglianza è vera per n=1 (ovvio). Resta da verificare che, se è vera per n, allora è vera per n+1, cioè che $\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, cosa molto facile da verificare.

Per esercizio si verifichi che $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e che $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Si noti la curiosità $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, cioè $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3= (1+2+3+\ldots+n)^2$.

ORSSERVAZIONE. D'accordo, il principio di Peano ci permette di verificare che le uguaglianze suggerite sono vere, ma come diamine hanno fatto le persone (*i matematici*) a ***indovinare*** che le formule dovevano essere proprio quelle? Non si può credere che siano andate a tentativi, serviva un'idea intelligente. Qualcosa di analogo era successa nell'antichità con Archimede, che ogni tanto spediva una lettera ai colleghi matematici del Museo di Alessandria (Egitto), nella quale riportava la dimostrazione che una certa formula doveva essere necessariamente quella e non altra, per esempio che l'area di un segmento parabolico doveva essere i 2/3 dell'area del rettangolo circoscritto o che il volume della sfera era i 2/3 del volume del cilindro circoscritto, dimostrando che il rapporto non poteva essere né minore né maggiore. Giusto! Dicevano i matematici di Alessandria, ma come ha fatto quel diavolo di un Siracusano a ***indovinare*** quel 2/3? Archimede non andava certo a tentoni, aveva escogitato infatti un metodo *euristico* molto ingegnoso, ma non semplice da applicare per noi comuni mortali, basato sul bilanciamento di una leva ideale e perciò da lui chiamato *metodo meccanico.* La lettera spedita da Archimede a Eratostene, direttore della biblioteca di Alessandria, in cui spiegava all'amico il suo metodo, rimase sconosciuta fino al 1906, quando fu trovata dal danese

Heiberg, insigne filologo e storico della matematica, in un palinsesto scovato in una vecchia libreria di Istambul.

Analogamente procederò io, usando la formula delle potenze del binomio.

Comincio dal primo caso, il più semplice, per calcolare $\sum_{k=1}^{n} k$. Si fa una "fisarmonica" di quadrati:

$1^2=1$
$2^2=(1+1)^2=1^2+2.1+1$
$3^2=(2+1)^2=2^2 2.2+1$
……………………
$(n+1)^2= n^2+2.n+1$.
Sommando membro a membro e cancellando i termini uguali ricavo

$(n+1)^2=2(1+2+…+n) +(n+1).1$ e infine $1+2+...+n=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+1-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Si noti che in questo caso 1, 2, …, n costituisce una progressione aritmetica di ragione 1, ma la formula trovata vale in generale per ogni progressione aritmetica perché la somma di due termini equidistanti dai termini estremi è costante e uguale alla somma degli estremi, perciò la somma è uguale alla semisomma dei termini estremi per il numero dei termini. Io la chiamo "*regola del trapezio*", perché i termini estremi fungono da basi di un trapezio rettangolo immaginario la cui altezza è il numero degli addendi. Ciò è lecito, perché i termini variano con incremento costante e i valori a_1, a_2, …, a_n si allineano su un segmento ideale che è il lato obliquo del trapezio.

Forse avete capito come calcolare $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$1^3= 1$
$2^3= (1+1)^3=1^3+3.1^2+3.1+1$
$3^3= (2+1)^3=2^3+3.2^2+3.2+1$
…………………………
$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$
Sommando al solito, ottengo
$(n+1)^3=3(1^2+2^2+3^2+…+n^2) + 3(1+2+3+…+n) +(n+1)$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=(1^2+...+n^2)=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-3\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\right)=\frac{2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Come vedete, il procedimento **è ricorsivo,** per calcolare la somma delle potenze k^r di base k ed esponente r occorre calcolare prima le somme di potenze con esponente da 1 a r-1. Vediamo come calcolare $1^3+2^3+…+n^3$.
$1^4=1$
$2^4=1^4+4.1^3+6.1^2+4.1+1$
$3^4=2^4+4.2^3+6.2^2+4.2+1$
………………………
$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$
e sommando:
$(n+1)^4=4(1^3+2^3+…+n^3) +6(1^2+2^2+…+n^2)+4(1+2+…+n)+(n+1)$, da cui
$(n+1)^4=4\sum_{k=1}^{n} k^3+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\Big((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\Big) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Esercizio. Calcolare $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^3$.

[Detto p il numero degli indici pari, dovreste trovare $n^2(n+1)^2/4-2p^2(p+1)^2$].

Calcolate anche $\sum_{k=1}^{n} k^4$. Dovreste trovare $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n+1}{30}\left[3n^3(2n+3)+n(n-1)\right]$.

3. Generalizzazione.

Volendo calcolare $\sum_{k=1}^{n} k^r$, r numero naturale, occorre sviluppare le potenze del binomio $(k+1)^{r+1}$, per k che va da 0 a n. Costruendo la *fisarmonica e comprimendo*, ottengo

$(n+1)^{r+1} = \sum_{s=1}^{r+1}\left[\binom{r+1}{s}\sum_{k=1}^{n} k^{r+1-s}\right]+1$. (Questo 1 finale proviene dal primo rigo della fisarmonica).

Isolando la sommatoria di interesse, ricavo

$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{1}{r+1}\left\{(n+1)^{r+1} - \sum_{s=2}^{r+1}\left[\binom{r+1}{s}\sum_{k=1}^{n} k^{r+1-s}\right]-1\right\}$, che riscrivo

[7] $$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{1}{r+1}\left\{(n+1)^{r+1} - (n+1) - \sum_{s=2}^{r}\left[\binom{r+1}{s}\sum_{k=1}^{n} k^{r+1-s}\right]\right\}.$$

4. Limiti. Avrete notato che, per esponente intero positivo la somma $\sum_{k=1}^{n} k^r$, per n→∞ è un infinito di ordine r+1. Infatti, dalle formule chiuse trovate, dapprima nei casi particolari [1], [2], [3] e poi in quella generale **[7],** si evince che tutti gli addendi, salvo il primo che ha ordine di infin, r+1, hanno ordine di infinito minore.

Pertanto vale il seguente risultato:

[8] $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k^r}{n^{r+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r+1}(n+1)^{r+1}}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1}.$$

Commentato [OS1]:

Osservando, poi, che, se x è un numero reale positivo, detta r la sua parte intera, per ogni k numero naturale k^x è compreso tra k^r e k^{r+1}, si conclude che $\sum_{k=1}^{n} k^x$ è compreso tra $\sum_{k=1}^{n} k^r$ e $\sum_{k=1}^{n} k^{r+1}$, perciò il suo ordine di infinito è compreso tra r+1 e r+2. (**Fin qui il ragionamento è rigoroso**).

Per analogia col caso degli esponenti interi (positivi) l'ordine di infinito dovrebbe essere x+1 e

[9] $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k^x}{n^{x+1}} = \frac{1}{x+1}.$$

Io non ho una dimostrazione di questa **congettura**, perché per esponenti reali non sono riuscito a trovare una formula chiusa per la sommatoria, ma l'ho **verificata** con un programma che ho implementato in *Pascal* e in *Delphi*, perciò ritengo che sia **quasi certamente vera.** (Il *quasi* è d'obbligo).