Ottavio Serra

Spigolando tra serie

Se mi chiedessero qual è la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{4n}}{(4n)!}$, saprei solo dire che è convergente; saprei anche implementare un software per calcolarne un valore approssimato, ma non saprei giustificare la risposta di "*Mathematica*" che la somma è $\mathrm{Senh}^2(\pi)$.

Lo sviluppo in serie di Taylor di alcune funzioni consente di ricavare la somma simbolica di alcune serie numeriche, delle quali altrimenti si potrebbe solo dire che sono convergenti o dare un'approssimazione numerica.

1) La prima serie che tratterò è quella di $\mathrm{Sen}^2(x)$.

Posto $f(x)=\mathrm{Sen}^2(x)$, risulta $f(0)=0$.

$f'(x)=2\mathrm{Sen}(x)\mathrm{Cos}(x)=\mathrm{Sen}(2x)$, perciò $f'(0)=0$.

$f''(x)=2\mathrm{Cos}(2x)$ e quindi $f''(0)=2$.

$f'''(x)=-4\mathrm{Sen}(2x)$, quindi $f'''(0)=0$.

$f^{IV}(x)=-8\mathrm{Cos}(2x)$, da cui $F^{IV}(0)=-8$. …

Così continuando, si ottiene $f^{(2n)}(0)=(-1)^{n-1}2^{2n-1}$. Si trova pertanto

$$[1]\, Sen^2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\equiv\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Ponendo $x=\frac{\pi}{4}$, otteniamo

$$[2]\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n)!}=1.$$

Ponendo $x=\frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$[3]\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=2.$$

Ponendo $x=\pi$, otteniamo

$[4]\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}=0.$ Da questa identità segue che la serie dei valori assoluti dei termini dispari è uguale alla serie dei valori assoluti dei termini pari:

[5]$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{4n-2}}{(4n-2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{4n}}{(4n)!}$. Verificare che queste due serie convergono a 133,37338. (Implementare un algoritmo in un linguaggio di programmazione conosciuto o, se disponibile, utilizzare "Mathematica"; con questo software si trova, in più, che la somma di ciascuna delle due serie [5] è $\mathrm{Senh}^2(\pi)$. Verifichiamo quest'ultima affermazione.

Lo sviluppo di $\mathrm{Senh}^2(x)$ si trova come quello di $\mathrm{sen}^2(x)$, solo che non c'è l'alternanza dei segni:

$$Senh^2(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Le due serie [5], essendo uguali, ciascuna è la metà della loro somma:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{4n-2}}{(4n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{4n}}{(4n)!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}=Senh^2(\pi),$$ come si doveva verificare.

Ponendo $x=\frac{\pi}{3}, otteniamo$

$$[6]\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{3^{2n}(2n)!}=\frac{3}{2}.$$

2) Considero ora lo sviluppo in serie di Taylor di $f(x)=x\mathrm{Sen}(x)$. È immediato che

$$[7]xSen(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}.$$

In particolare, ponendo $x=\frac{\pi}{2}, otteniamo$, dopo aver diviso ambo i membri per $\frac{\pi}{2}$,

$$[8]\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}=1.$$

Ponendo $x=\pi$, otteniamo

$$[9]\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+2}}{(2n+1)!}=0$$ e, dopo aver diviso per π,

$$[10]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{4n+1}}{(4n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{4n-1}}{(4n-1)!}\ .$$

Verificare che il valore comune delle due serie [10] è $\frac{1}{2}Senh(\pi)$.

Si può calcolare un valore approssimato di ciascuna delle due serie e verificare che si trova 5,77437 che è anche il valore di $\frac{1}{2}Senh(\pi)$; oppure, in modo più elegante, osservare che, essendo le due serie uguali, ciascuna è la metà della loro somma: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}Senh(\pi)$.

3) Considero infine la funzione $f(x) = \frac{Sen(x)}{x}$. Risulta evidentemente che

[11] $\frac{Sen(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \neq 0.$

Ponendo $x = \frac{\pi}{2}$, *si* ottiene

$\frac{2}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!}$ e, moltiplicando ambo i membri per $\frac{\pi}{2}$, infine

[12] $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1.$

Ponendo x=π, si ottiene:

[13] $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} = 0$. Da questa si ricava che la serie dei termini con n pari è uguale alla serie dei termini con n dispari:

[14] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{4n}}{(4n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{4n+2}}{(4n+3)!}$.

Verificare che ciascuna delle due serie [14] vale $\frac{Senh(\pi)}{2\pi} \approx 1{,}838.$