Ottavio 0Serra

Sistemi di due equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

risolti col metodo di eliminazione.

Le funzioni incognite sono x=x(t) e y=y(t), t variabile indipendente.

Esercizio 1.

$$x'=2x+y$$

$$y'=x+2y$$

Derivo la prima delle **1** rispetto a t e ho x''=2x'+y'. Sostituisco la seconda delle **1** e ottengo x''=2x'+x+2y. **Elimino** y ricavandola dalla prima delle 1**.** Ottengo

x''=2x'+x+2x'-4x, e infine **x''-4x'+3x=0.** (equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine). **L'equazione caratteristica** è $\lambda^2-4\lambda+3=0$, le cui radici (autovalori) sono 1 e 3, pertanto due soluzioni particolari (linearmente indipendenti) so $\mathbf{e^t}$ e $\mathbf{e^{3t}}$**,** quindi la soluzione generale è $\mathbf{x(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}}$. Ricavo ora y(t) dalla prima delle **1.** $y(t)=x'-2x= c_1e^t+3c_2e^{3t}-2(c_1e^t+c_2e^{3t}) = - c_1e^t+c_2e^{3t}$. La soluzione del sistema **1.** è

$$\mathbf{x(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}}$$

$$\mathbf{y(t)= - c_1e^t+c_2e^{3t}.}$$

Esercizio 2.

$$x'=x+y$$

$$y'=x-y$$

Procedendo come nell'esercizio **1,** si trova l'equazione del secondo ordine x''=x'+x-y e, ricavando y dalla prima equazione, si ottiene x''-2x==0. Gli autovalori λ sono $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, perciò

$x(t) = c_1e^{\sqrt{2}t} + c_2e^{-\sqrt{2}t}$. Dalla prima delle 2 si ricava ora $y(t) = x'(t) - x(t)$, da cui

$y(t) = c_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - c_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} - c_1e^{\sqrt{2}t} - c_2e^{-\sqrt{2}t} = c_1(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} - c_2(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}$. La soluzione è dunque

$$x(t) = c_1e^{\sqrt{2}t} + c_2e^{-\sqrt{2}t}$$

$$y(t) = c_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - c_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t}$$

In questi primi due esercizi gli autovalori del sistema, cioè le soluzioni dell'equazione caratteristica, sono reali e distinte. Nel prossimo esercizio saranno coincidenti.

Esercizio 3.

$$x'=2x+y$$

$$y'=-x+4y$$

Al solito, $x''=2x'+y'=2x'-x+4y=2x'-x+4x'-8x$ e la risolvente è $x''-6x'+9x=0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2-6\lambda+9=0$, che ammette l'autovalore doppio $\boldsymbol{\lambda=3}$. Perciò due soluzioni particolari sono $x_1=e^{3t}$ e $x_2=t.e^{3t}$, perciò $x(t)=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}= (c_1+c_2t)e^{3t}$.

Dalla prima delle **3** ricavo $y(t)=x'-2x=(3c_1+3c_2t)e^{3t}+c_2e^{3t}-(2c_1+2c_2t)e^{3}==(c_1+c_2+c_2t)\, e^{3t}$.

La soluzione generale del sistema è

$$x(t)=(c_1+c_2t)\, e^{3t}$$

$$y(t)= (c_1+c_2+c_2t)\, e^{3t}$$

Risolvere il problema di Cauchy con le *condizioni iniziali* $x(0)=1,\ y(0)=0$.

Esercizio 4.

$$x'=x-5y$$

$$y'=x-3y$$

Verificare che la risolvente è $x''+2x'+2x=0$, perciò gli autovalori sono complessi coniugati,

$-1+i$ e $-1-i$, Due soluzioni particolari della risolvente sono $e^{-t}\, Cos(t)$ e $e^{-t}\, Sen(t)$, perciò la soluzione generale è $x(t)=[c\ Cos(t)+c_2Sen(t)]e^{-t}$ Dalla prima delle **4** ricavo $y(t)=\frac{1}{5}\,[x-x']$ e quindi

$y(t)=\frac{1}{5}\left([c_1Cos(t)+c_2Sen(t)]e^{-t}-[-c_1Sen(t)+c_2Cos(t)]e^{-t}+[c_1Cos(t)+c_2Sen(t)]e^{-t}\right)$ e semplificando

$y(t)=\frac{1}{5}\left([2c_1-c_2]Cos(t)+[c1+2c_2]Sen(t)\right)e^{-t}$. In definitiva, la soluzione generale del sistema **4** è

$$x(t)=[c_1\ Cos(t)+c_2Sen(t)]e^{-t}$$

$$y(t)=\tfrac{1}{5}\left([2c_1-c_2]Cos(t)+[c1+2c_2]Sen(t)\right)e^{-t}\ .$$

Risolvere il problema di Cauchy con le condizioni *iniziali* $\mathbf{x(0)=1,\ y(0)=0.}$

Risposta $c_1=1$, $c_2=2$, perciò $x(t)=[Cos(t)+2Sen(t)]e^{-t}$, $y(t)=Sen(t)e^{-t}$.

Idem, problema di Cauchy con $\mathbf{x(0)=0,\ y(0)=1.}$

Il caso dell'autovalore doppio, cioè di molteplicità 2.

Se l'equazione differenziale del 2° ordine x''+ax'+bx=0 ammette l'autovalore λ doppio, una soluzione particolare è $x_1(t)=e^{\lambda t}$, ma c'è bisogno di un'altra soluzione particolare $x_2(t)$ per costruire la soluzione generale come combinazione lineare di $x_1(t)$ e di $x_2(t)$. L'idea è di immaginare un secondo autovalore μ che poi si fa tendere a λ. Siccome $x_1(t)$ e $x_2(t)$ possono essere due soluzioni qualunque, si sceglie $x_2(t) = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{te^{\mu t} - 0}{1-0} = t.e^{\lambda t}$.

Ho applicato il teorema di L'Hospital derivando rispetto alla variabile μ.

Altri esercizi sui sistemi di equazioni differenziali, anche 3x3, risolti col metodo matriciale, si trovano in questo sito:

http://digilander.libero.it/ottavioserra0 nella cartella Esercitazioni di matematica (Unical), sezione Analisisi matematica, Articolo 11.