Ottavio Serra

La rovina del giocatore e altri problemi di probabilità.

Perché non conviene giocare d'azzardo. Perché prima o poi il giocatore verrà spennato da chi tiene il banco, casinò o stato che sia; perché chi tiene il banco ha un capitale di gran lunga maggiore di chi gioca, che di solito è un povero diavolo che si illude di potersi arricchire facilmente. Per fare un esempio, alla roulette il gioco più semplice è puntare sul colore "rouge" o "noir"; i numeri colorati sono 36, 18 rossi e 18 neri, però c'è lo zero che è a favore del banco. Quella piccola probabilità, 1/37, a favore del banco fa la differenza, è quella che fa arricchire i proprietari dei casinò di Las Vegas, Monte Carlo, Venezia. La roulette non è equa, la probabilità, anche se di poco, è a favore del banco. Lo stesso succede in tutti gli altri giochi d'azzardo. Al lotto la probabilità di un estratto su una data ruota, poniamo la ruota di Napoli, cioè che tra i 5 numeri estratti sul totale di 90 ci sia quello giocato, è di 5/90 uguale a 1/18; ma in caso che esca il tuo numero lo stato non ti dà 18 volte la posta, bensì poco più di 10 euro per ogni euro giocato. Questo è da aspettarsi e in un certo senso è anche giusto: lo stato non tiene il banco del lotto per far divertire e arricchire la gente, ma per far cassa. L'ambo ha una probabilità di 2/801, all'incirca un caso a favore contro 400; però se vinci il lotto non ti dà 400 volte la posta, bensì 250 volte (al lordo della tassa governativa, è ovvio!). Ma anche in caso di gioco equo, cioè nel caso che giocatore e banco abbiano la stessa probabilità di vincere ad ogni giocata, se il giocatore si intestardisce nel gioco finirà per rovinarsi, come dimostreremo più avanti.
Vediamo ora vari problemi.

Probabilità di indovinare k numeri (k tra 1 e 5) su una ruota del lotto. Lo spazio degli eventi misura $\binom{90}{5}$, numero delle possibili cinquine, l'evento favorevole misura $\binom{90-k}{5-k}$, perciò la probabilità di indovinare k numeri sui 5 estratti è $P(\mathrm{k}) = \dfrac{\binom{90-k}{5-k}}{\binom{90}{5}}$.

Ricordo che il simbolo $\binom{n}{k}$ rappresenta il numero delle combinazioni semplici (senza elementi ripetuti) di n elementi di classe k (presi, cioè, a k a k) e risulta
$\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1).(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$.
Il simbolo n! (n fattoriale) è definito come segue:
se n=0, n!=1, altrimenti n!=n.(n-1)!
Per il calcolo combinatorio e il calcolo delle probabilità si possono consultare le mie "Lezioni allo Scorza" sul Sito *digilander.libero.it/ottavioserra0,* in particolare le lezioni contenute nella cartella "*10 in matematica*" dell'anno 2010.

Quante volte devo lanciare due dadi perché la probabilità di ottenere un doppio "6" superi p?
P_n=1-(35/36)^n > p → (35/36)^n <1-p → (36/35)^n >1/(1-p) → n > -log(1-p)/log(36/35). Se per es., vogliamo P_n >0.5, n deve essere maggiore di -log(0.5)/log(36/35)=24.6,; si richiedono perciò almeno 25 lanci. Per avere P_n maggiore del 90%, deve essere n > -log(0,1)/log(36/35) = 1/0.01223 = 81.7 e quindi occorrono almeno 82 lanci.

Probabilità che in una riunione di n persone almeno due abbiano lo stesso compleanno (stesso mese e giorno). Supponiamo l'anno d 365 giorni.
La probabilità che due persone **non** abbiano lo stesso compleanno è 364/365; che una terza persona **non** abbia il compleanno in comune con la 1^a o la 2^a persona è 363/365; perciò la probabilità che le tre persone abbiano compleanni diversi, nella ragionevole ipotesi di indipendenza stocastica, è (364/365).(363/365). Così continuando, la probabilità che n persone, abbiano compleanni diversi è (364/365).(363/365)….((366-n)/365). Segue che la probabilità di almeno una coincidenza è
P_n = 1 - (364/365).(363/365)….((366-n)/365).
Per esempio, con 23 persone la probabilità di almeno una coincidenza supera il 50%; per superare il 90% occorrono 41 persone, ecc.

Problema della concordanza. Si abbiano n gettoni numerati da 1 ad n. Si chiede la probabilità di avere almeno una **concordanza,** cioè alla k^{ma} estrazione esca il gettone numero k. Risulta, dalla teoria della probabilità dell'unione di eventi che $P_n = \sum_i p_i - \sum_{i,j} p_{i,j} + \sum_{i,j,k} p_{i,j,k} - \ldots$.
Ora, p_i è data dalle permutazioni in cui c'è **i** all'i^{mo} posto e quindi p_i = (n-1)!/n! = 1/n; $p_{i,j}$ si calcola dalle permutazioni in cui c'è **i** all'i^{mo} posto e **j** al j^{mo}, perciò $p_{i,j}$ = (n-2)!/n! = 1/(n(n-1)); eccetera.
Quindi $P_n = n\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{(n-1)n} + \binom{n}{3}\frac{1}{(n-2)(n-1)n} - \ldots \binom{n}{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n!} \;=\; 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.
Segue che, se n→ ∞, P_n → 1-1/e. Si noti che la probabilità che non si abbia nessuna concordanza tende a 1/e, l'inverso del numero di Nepero-Eulero.

Problema dell'arresto di un gioco d'azzardo.
Con un celebre scambio di lettere tra Pascal e Fermat nasce il calcolo delle probabilità come scienza (Prima metà del '600**)**[1]**.** Il problema è posto come segue:
Al giocatore A mancano a partite per aggiudicarsi il torneo e la posta in gioco, al giocatore B ne mancano b; a questo punto decidono di arrestare il gioco. Come va ripartita la posta tra i due?
Sia p la probabilità costante di A di vincere una partita del torneo, q=1-p quella di B.
Caso particolare: supponiamo che le probabilità p di A e q=1-p di B siano uguali: p=q=1/2.
Si tratta di calcolare le probabilità P_A e P_B che avrebbero i due giocatori di aggiudicarsi il torneo, se avessero continuato il gioco.
[1] $P_A = (\frac{1}{2})^a + \binom{a}{1}(\frac{1}{2})^{a+1} + \binom{a+1}{2}(\frac{1}{2})^{a+2} + \ldots + \binom{a+b-2}{b-1}(\frac{1}{2})^{a+b-1}$;
P_B si ricava da P_A scambiando a con b.
Questo è il metodo combinatorio adottato da Fermat . Pascal usa invece un approccio ricorsivo:
[2] P_A(a,b)= 1/2.P_A(a-1,b)+1/2.P_A(a,b-1).
Caso generale.
[3] $P_A = p^a + \binom{a}{1}p^a q + \binom{a+1}{2}p^a q^2 + \ldots + \binom{a+b-2}{b-1}p^a q^{b-1}$. La formula ricorsiva è
[4] P_A=p.P_A(a-1,q)+q.P_A(a,b-1).
(Si veda *Problema dell'arresto* nei *programmi eseguibili* del mio sito, cartella dei programmi in **Delphi**).
Esempio. Se a=1 e b=2, (e p=q=1/2), P_A=1/2+$(1/2)^2$ = ¾; P_B=$(1/2)^2$=1/4 (come è ovvio) e la posta va ripartita nel rapporto di 3 ad 1.

[1] Keith Devlin: "La lettera di Pascal, Rizzoli 2008.

Veniamo ora alla ROVINA DEL GIOCATORE.
Se un giocatore A con capitale iniziale a affronta un giocatore B (Casinò o Banco) che dispone di un capitale molto grande b, prima o poi A perde l'intero capitale: vediamo.
Sia p la probabilità costante che A vinca una mano, q=1-p quella di B; indichiamo con P(a) la probabilità di rovina di A, cioè che il suo capitale scenda a zero. Detto x il capitale corrente di A, l'espressione ricorsiva di P(x) è:

[1] $P(x)=p.P(x+1)+q.P(x-1)$.

Questa è un'equazione alle differenze che si risolve cercando soluzioni del tipo $P(x)=\lambda^x$. Sostituendo in [1] si ricava: $p.\lambda^2-\lambda+q = 0$, che ammette le soluzioni particolari $\lambda=1$ e $\lambda=q/p$.
Distinguiamo i due casi:
I°) p=q=1/2 e quindi $\lambda=1$ con molteplicità algebrica 2. Segue $P(x)=c_1+c_2.x$. Le costanti si determinano imponendo le condizioni *iniziali* P(0)=1 (rovina certa), P(a+b)=0 (A sbanca il Casinò!). Perciò $c_1=1$, $c_2= -1/(a+b)$ e $P(x) = 1-x/(a+b)$. Si noti che, se b è immensamente grande, come è di norma il capitale di un casinò rispetto a quello di un giocatore normale, P(x) si avvicina arbitrariamente ad 1: $\lim\limits_{b\to\infty} P(x)=1$, la rovina del giocatore è certa.
II°) $p\neq q$. $P(x)=c_1+c_2(q/p)^x$. Con le solite condizioni iniziali,

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2 \\ 0=c_1+c_2\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b} \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} c_2=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}} \\ c_1=\dfrac{-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}} \end{cases} \text{. Segue}$$

$$P(x)=\frac{-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}+\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}=\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

Vediamo ora la sorte di A se il banco B è infinitamente ricco.
Se q>p (di solito questo è il caso, (mai visto un biscazziere che gioca con probabilità minore del cliente da spennare),

$$\lim_{b\to\infty} P(x)=\lim_{b\to\infty}\frac{-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}+\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}=\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}=1 \text{ (il giocatore è rovinato);}$$

se invece è p>q, (**caso non realistico!**),

$$\lim_{b\to\infty} P(x)=\lim_{b\to\infty}\frac{-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}+\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}=\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{x}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a}, \text{ se } x=a.$$

La rovina non è certa, ma quando mai si è vista p>q?

Esercizio. Una moneta e un dado vengono lanciati ripetutamente insieme. Qual è la probabilità che “Testa” esca prima di una prefissata faccia del dado, per esempio la faccia “4” ?

La legge di Poisson (1781-1840).

Vogliamo completare questa raccolta di problemi introducendo la legge di Poisson. Partiamo da un esempio tratto dal testo “Metodi matematici e statistici” di Giovanni Prodi (Vedi bibliografia nella lezione 2, *Calcolo delle probabilità e statistica* nel sito citato) .

Supponiamo che un liquido di coltura contenente m batteri venga diviso in n gocce (uguali e molto numerose); si chiede: qual è la probabilità che in una goccia capitino k batteri? (k=0,1,..m). Fissata una goccia, la probabilità che un determinato batterio vi finisca è p=1/n, perciò la probabilità che in quella goccia finiscano k batteri è data dalla legge binomiale di Bernoulli (Applicarla al totocalcio):

$P_k = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-k}$. Siccome il calcolo diretto è laborioso e praticamente intrattabile quando n ed m sono molto grandi, facciamo tendere m ed n all’infinito, supponendo però costante il rapporto a = m/n, che rappresenta il numero medio di batteri per goccia. Si avrà:

$$P_k = \frac{m.(m-1)....(m-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{m}{n}\right).\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\right)...\left(\frac{m}{n}-\frac{k-1}{n}\right).\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{1}{k!}a.\left(a-\frac{1}{n}\right)...\left(a-\frac{k-1}{n}\right).\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}.$$

Facciamo ora tendere n all’infinito.

Siccome $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k} = 1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na} = e^{-a}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}a.\left(a-\frac{1}{n}\right)...\left(a-\frac{k-1}{n}\right) = \frac{a^k}{k!}$, si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

Calcolo ora il valore medio di k: $\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} = ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a}e^{a} = a$, come era intuitivo.

La varianza di k è Var(k)=m.pq=m(1/n)(1-1/n)=a(1-1/n) che, per n→∞, tende ad a.

Per definizione una variabile aleatoria segue la legge di Poisson di parametro a, se valore medio e varianza sono uguali ad a. Una variabile aleatoria segue la legge di Poisson se la probabilità di successo p è molto piccola, minore di 0,1 o di 0,01. (Ricordiamo che nell’esempio introduttivi p=1/n ed n tende all’infinito.

Altro esempio. In una clinica nascono in media 3 bambini al giorno. Il direttore afferma che in certi giorni dell’anno ne nascono anche 8. E’ verosimile questa affermazione? Siccome in un anno nascono oltre 1000 bambini (numero abbastanza grande), possiamo pensare a una legge di Poisson di parametro a=3. $P_8 = \frac{3^8}{8!}e^{-3} = \frac{6561}{40320}0,049787 =\approx 0,0081$. Siccome l’inverso è circa123, è plausibile che in media 3 volte all’anno ci sia questo accumulo di nascite.

Ci sarebbero tante altre cose da dire, ma qui ci fermiamo.