Ottavio Serra

Quadriche

Elementi metrici col metodo degli invarianti.

Equazione generale:

[1] $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$.

N.B. le coordinate metriche sono ottenute da quelle proiettive omogenee dai quozienti $x=x_1/x_4$, $y=x_2/x4$, $z=x_3/x_4$, quando $x_4 \pm 0$. $x_4=0$ è l'equazione del piano improprio.

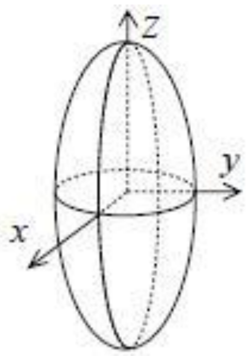
La matrice completa simmetrica ($a_{ik}=a_{ki}$) della quadrica è

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} \\ a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} \end{pmatrix}$$ col suo annullarsi (rango<4) dice che la quadrica si specializza in un cono o in una coppia di piani e precisamente, se il rango è 3 in un cono, se il rango è 2 in due piani distinti, se il rango è 1 in due piani coincidenti.

In questo articolo mi occuperò delle quadriche non degeneri (rango(A)=4).

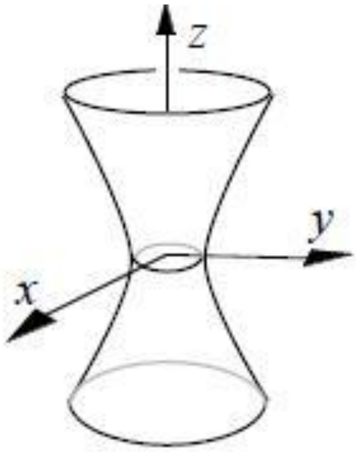
Dal punto di vista metrico esistono 5 tipi di quadriche non degeneri, che si possono ridurre alle seguenti forme canoniche:

[2] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$ (ellissoide reale)

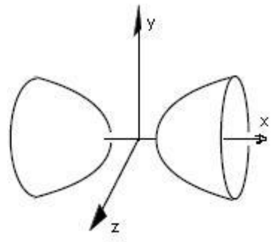


[2 bis] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$$ (ellissoide immaginario)

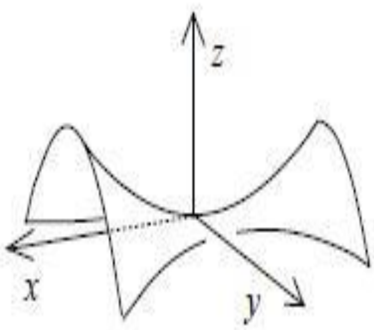
[3] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$ (iperboloide iperbolico o rigato o a una falda)



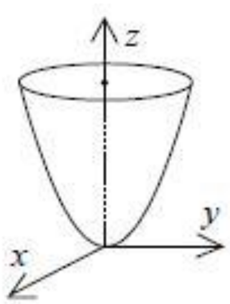
[4] $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$ (iperboloide ellittico o a due falde)



[5] $$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$$ (paraboloide iperbolico o rigato o a sella)



[6] $$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$ (paraboloide ellittico).



Ellissoide e iperboloidi sono quadriche a centro: il centro, polo del piano improprio, è centro di simmetria; esso si determina come intersezione dei piani polari di tre punti impropri, per esempio (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0). Il centro è pertanto il punto, se esiste, le cui coordinate x,y,z risolvono il sistema: $$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0 \end{cases}.$$

I paraboloidi, tangenti al piano improprio, hanno come centro improprio il punto di contatto o, dal punto di vista affine e metrico, non hanno centro.

Prima di occuparci della riduzione a forma canonica, vediamo come si determinano gli assi e i piani diametrali principali. Sia (l,m,n) un vettore direzione ((l,m,n,0) un punto improprio). Il suo piano polare è il piano $(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)x+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)y+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)z+(a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n)=0$. Tale piano, essendo polare di un punto improprio, passa per il centro (se la quadrica è a centro): piano diametrale; la retta per il centro di direzione (l,m,n) è il diametro coniugato (nei paraboloidi tutti i diametri passano per il centro improprio e sono perciò paralleli). Se un diametro e il piano diametrale coniugato sono ortogonali, si ha un asse e il corrispondente piano diametrale principale, La condizione è che il vettore (l,m,n) coincida, a meno di un fattore $\lambda\neq 0$, col vettore normale al piano e quindi $\begin{cases} a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n=\lambda l \\ a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n=\lambda m \\ a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n=\lambda n \end{cases}$. Questo sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali purché il determinante della sua matrice sia zero. Siamo così condotti all'equazione agli auto valori

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}-\lambda, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Questa ammette soluzioni tutte reali, perché la matrice associata è simmetrica, e gli auto vettori sono ortogonali e danno la direzione degli assi. Se i tre auto valori sono distinti, la quadrica ha tre assi di simmetria ortogonali. Se un auto valore è doppio, l'auto spazio associato ha dimensione due e perciò in esso si possono scegliere infinite coppie di direzioni ortogonali: la quadrica è rotonda intorno all'altro asse. Se infine l'auto valore è triplo, la quadrica è una sfera.
Nel caso dei paraboloidi un auto valore è zero e il corrispondente auto vettore dà la direzione dei diametri.
Per la riduzione a forma canonica mediante il metodo degli invarianti, notiamo che sono invarianti relativi (vedi analogia con le coniche) le seguenti quantità:

[7] A, $A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$, $J = (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)+(a_{33}a_{11}-a_{13}^2)$, $T = a_{11}+a_{22}+a_{33}$.

(Si noti che T, traccia di A_{44}, è la somma dei suoi minori principali del 1° ordine, J del 2° ordine).
Sono invece invarianti assoluti i rapporti

[8] $\frac{A}{T^4}, \frac{A_{44}}{T^3}, \frac{J}{T^2}$. (Vedi analogo argomento sulle coniche).

Distinguiamo i due casi, **(a)** delle quadriche a centro e **(b)** dei paraboloidi.
(a) Quadriche a centro. Scritta l'equazione delle quadriche a centro nella forma

[9] $ux^2+vy^2+wz^2-1=0$, $A' = \begin{pmatrix} u,0,0,0 \\ 0,v,0,0 \\ 0,0,w,0 \\ 0,0,0,-1 \end{pmatrix}$, perciò $A'=-uvw$, $A'_{44}=uvw$, $J'=uv+vw+wu$, $T'=u+v+w$,

avendo indicato con lo stesso simbolo le matrici e i determinanti delle due matrici. Segue che

[10] $\dfrac{A}{T^4}=\dfrac{-uvw}{(u+v+w)^4},\dfrac{A_{44}}{T^3}=\dfrac{uvw}{(u+v+w)^3},\dfrac{J}{T^2}=\dfrac{uv+vw+wu}{(u+v+w)^2}$. Risolvendo tale sistema si trova

$$s_1=u+v+w=\frac{-TA_{44}}{A},$$

$$s_2=uv+vw+wu=\frac{J}{T^2}\frac{T^2A_{44}^2}{A^2}=\frac{JA_{44}^2}{A^2},$$

$$s_3\equiv uvw=\frac{A_{44}}{T^3}s_1^3=\frac{A_{44}}{T^3}\frac{-T^3A_{44}^3}{A^3}=\frac{-A_{44}^4}{A^3}.$$

Ricordando che un'equazione di 3° grado avente u, v, w come soluzioni ha la forma $z^3 - s_1z^2 + s_2z - s_3 = 0$, i coefficienti u v w della quadrica sono radici dell'equazione

[11] $A^3t^3+A^2A_{44}Tt^2+AA_{44}^2Jt+A_{44}^4=0$.

(b) Paraboloidi. Scritta l'equazione dei paraboloidi nella forma

[12] $ux^2+vy^2-2z=0,\ A'=\begin{pmatrix}u,0,0,0\\0,v,0,0\\0,0,0,-1\\0,0,-1,0\end{pmatrix}$, perciò A'=-uv, A'_{44}=0, J'=uv, T'=u+v. Segue

$$\frac{A}{T^4}=\frac{-uv}{(u+v)^4},\frac{J}{T^2}=\frac{uv}{(u+v)^2}$$

[13] $(u+v)^2=\dfrac{-JT^2}{A},uv=\dfrac{-J}{A}$: u e v sono perciò radici di

[14] $t^2-T\sqrt{\dfrac{-J}{A}}t-\dfrac{J^2}{A}=0.$

Esempi.

(1) $3x^2+2xy+3y^2+8z^2-8=0$.

$A=\begin{pmatrix}3,1,0,0\\1,3,0,0\\0,0,8,0\\0,0,0,-8\end{pmatrix}$. Perciò $A_{44}= 8(9-1)=64=8^2$, $A = -8^3$, J=(9-1)+24+24=56, T=14.

Applicando la [11] si ottiene $-8^9z^3+8^6.8^2.14z^2-8^3.8^4.56z+8^8=0$. Semplificando: $8t^3-14t^2+7t-1=0$ le cui radici sono 1, 1/2, 1/4. La quadrica è perciò un ellissoide di equazione canonica $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1.$

Verificare che, nel riferimento originario, le direzioni degli assi sono (0,0,1), (1,-1,0), (1,1,0) e che i piani diametrali principali (di simmetria ortogonale) sono z=0, x+y=0, x-y=0. (Il centro è l'origine).

(2) $3x^2+10xy+3y^2+16z=0$.

$A=\begin{pmatrix}3,5,0,0\\5,3,0,0\\0,0,0,8\\0,0,8,0\end{pmatrix}$; perciò A_{44}=0 (paraboloide), $A=-8\begin{pmatrix}3,5,0\\5,3,0\\0,0,8\end{pmatrix}=-8.8.(9-25)=8^2.16=2.8^3$,

J=-16, T=6. L'equazione [14] si scrive $t^2-6.\sqrt{\frac{16}{2.8^3}}t-\frac{16^2}{2.8^3}=0\to t^2-\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}=0\to$ $4t^2$-3t-1=0, le cui soluzioni sono u=1/p=1 e v=1/q = -1/4, ovvero, con uno scambio degli assi x y, p=4 e q = -1. Si tratta di un paraboloide iperbolico (a sella) di equazione $\frac{x^2}{4}-y^2=2z$.

(3) $5x^2+4xy+2y^2+3x-2z=0$.

$A=\begin{pmatrix}5,2,0,3/2\\2,2,0,0\\0,0,0,-1\\3/2,0,-1,0\end{pmatrix}=-6$. A_{44}=0 (paraboloide), J = 6, T = 7. La [14] fornisce

$t^2-7\sqrt{\frac{-6}{-6}}t-\frac{36}{-6}=0\to t^2-7t+6=0\Rightarrow t\in\{1,6\}$. Paraboloide ellittico $\frac{x^2}{(1/6)}+y^2=2z$.

(4) $3x^2+10xy+3y^2+8z^2+8=0$.

$A=\begin{pmatrix}3,5,0,0\\5,3,0,0\\0,0,8,0\\0,0,0,8\end{pmatrix}$ da cui $\mathbf{A_{44}}$=8(9-25)=8(-16)= $\mathbf{-2^7}$, **J**=-16+24+24=$\mathbf{2^5}$, **T**=**14**, **A**=8.A_{44}= $\mathbf{-2^{10}}$.

L'equazione [11] dà $\mathbf{-2^{30}t^3\ -2^{20}2^7 14t^2\ --2^{10}2^{14}2^5t+2^{28}=0}$ → $\mathbf{4t^3+7t^2+2t-1=0}$, le cui soluzioni sono 1/4, -1, -1. Si tratta di un iperboloide ellittico (a due falde): $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=1$. Si noti che è un iperboloide rotondo: le sezioni con piani perpendicolari all'asse x (al nuovo asse x) sono cerchi di raggio $\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}$, reali se x ≤ -2 o x ≥ 2.

(5) $3x^2-y^2-z^2-10yz-12=0$. Verificare che si tratta di un iperboloide iperbolico di equazione canonica $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{2}=1$.

(6) $2x^2+y^2+z^2-2yz-2\sqrt{2}(y+z)=0$. $A=\begin{pmatrix}2,0,0,0\\0,1,-1,-\sqrt{2}\\0,-1,1,-\sqrt{2}\\0,-\sqrt{2},-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, da cui si ricava A = -16, A_{44}=0 (paraboloide), J=2, T=4. L'equazione [14] fornisce t^2-2t+1=0, quindi t=1 (doppia) →p=q=1. Equazione canonica $2z=x^2+y^2$ (paraboloide ellittico rotondo). Nel riferimento originario l'equazione agli auto valori è $\begin{vmatrix}(2-\lambda),0,0\\0,(1-\lambda),-1\\0,-1,(1-\lambda)\end{vmatrix}=0$ da cui λ=0 (paraboloide) e λ=2 (doppio: rotondo). L'autovettore relativo all'auto valore zero dà la direzione dei diametri: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; l'auto spazio relativo all'auto valore doppio 2 è il piano (ortogonale ai diametri) y+z=0. Questo è tangente al paraboloide nell'origine , infatti l'intersezione è $2x^2+y^2+y^2+2y^2=0$, che ammette solamente la soluzione doppia x=y=0 e quindi x=y=z=0. **L'asse di rotazione** è perciò il diametro per O: **x = 0, y = t, z = t.**