Ottavio Serra

Probabilità e simmetria

a) In una prova Invalsi di matematica per la licenza media, ho trovato il seguente quesito di calcolo delle probabilità: "*Luca e Andrea lanciano tre dadi. Luca dice: io vinco se la somma dei tre numeri è pari; Andrea dice: io vinco se il prodotto dei tre numeri è pari. Prima domanda: dire, giustificando la risposta, chi dei due ha maggiore probabilità di vincere; seconda domanda: calcolare la probabilità di vincita di Andrea.".*
Non entro nel merito della difficoltà del quesito per ragazzi di scuola media, ma indubbiamente si tratta di un problema interessante che merita di essere sviscerato e ampliato, anche con considerazioni di simmetria.

b) **La risoluzione.** Conviene considerare le probabilità contrarie, Q_L la probabilità che Luca perda, Q_A che perda Andrea. Andrea perde se il prodotto è dispari, cioè se i tre dadi danno tutti risultati dispari. I casi corrispondenti a questo risultato sono quante le disposizioni con ripetizione di tre oggetti (i numeri 1, 3, 5) a tre a tre, cioè 3^3. Siccome i casi possibili sono 6^3, la probabilità $Q_A = \frac{3^3}{6^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Invece la probabilità che Luca perda è maggiore; infatti, la probabilità che la somma sia dispari è che i tre numeri siano tutti dispari, come per Andrea, più i casi in cui escano due numeri pari e uno dispari. Perciò $Q_L>Q_A$ e di conseguenza $P_A>P_L$: Andrea ha una probabilità di vincere maggiore di quella di Luca. Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che $P_A=1-Q_A=7/8$, per il risultato precedente; perciò $P_A=0{,}875=87{,}5\%$.

c) **Ci chiediamo ora quale sia la probabilità che Luca vinca**. Luca vince se i tre numeri sono tutti pari oppure due dispari e uno pari; perde se i tre numeri sono tutti dispari oppure due pari e un dispari. Le due situazioni sono ***simmetriche*** rispetto allo scambio dei termini *pari* e *dispari*, e siccome in un dado ci sono 3 numeri pari e 3 dispari, risulta $P_L=Q_L$.
Ma $P_L+Q_L=1$ (Luca o vince o perde, *tertium non datur*), perciò $P_L=Q_L= 1/2=50\%$. Viene confermato così che $P_A>P_L$.

d) **Vogliamo generalizzare il problema al caso di n dadi.** Per Andrea il calcolo è facile. $Q_A(n) = \frac{3^n}{6^n} = \frac{1}{2^n}$ e di conseguenza $P_A(n) = 1 - \frac{1}{2^n}$ ($\forall n \geq 1$). Si noti che $\lim_{n\to\infty} P_A(n) = 1$, , come era prevedibile: basta un solo numero pari (2, 4 o 6) perché il prodotto sia pari e un numero pari prima o poi esce.
Più difficile è calcolare $P_L(n)$. Indichiamo con P l'uscita di un numero pari, con D l'uscita di un numero dispari. Se il numero dei dadi è dispari, n=2k-1, la somma è pari se si ha un numero pari di addendi dispari e perciò Luca vince se si verifica la seguente situazione:
(2k-3) P e 2 D, oppure (2k-5) P e 4 D, oppure … 1 P e 2k-2 D; perde se la situazione è:
(2k-3) D e 2 P, oppure (2k-3) D e 4 P, oppure … 1 D e 2k-2 P. Come si vede, le due situazioni sono simmetriche rispetto allo scambio dei termini P (*pari*) e D (*dispari*), e siccome i pari sono tre, come i dispari, le probabilità di somma pari o di somma dispari sono uguali. Per Luca, nel caso di un numero dispari di lanci, le probabilità di vincita (somma pari) o di perdita (somma dispari) sono uguali: $P_L(2k-1) = Q_L(2k-1) = 1/2$.

Se invece n è pari, n=2k, si immagini di lanciare 2k-1 dadi; sarà $P_L(2k-1) = Q_L(2k-1) = 1/2$. Si lanci ora l'ultimo dado, che darà risultato pari con probabilità p=1/2 o risultato dispari con probabilità q=1/2. Avremo $P_L(2k) = P_L(2k-1).p + Q_L(2k-1).q = 1/2.1/2+1/2.1/2=1/2$.
(I prodotti delle probabilità si giustificano perché gli eventi, esiti dei dadi, sono indipendenti e la somma si giustifica perché gli eventi: *somma pari* o *somma dispari*, sono incompatibili).
Dunque, qualunque sia il numero dei dadi, la probabilità di somma pari è uguale alla probabilità di somma dispari.
La probabilità di somma pari (o di somma dispari) si può calcolare in modo più semplice per induzione su n. (*Il principio di induzione numerabile di Peano si può considerare una sorta di simmetria traslatoria sulla successione dei numeri naturali*). Il risultato è vero per n=1: $P_L(1) = 1/2$ (e $Q_L(1) = 1/2$) è vero; sia vero per n: $P_L(n)=1/2$ [e $Q_L(n)=1/2$]. Considerando un ulteriore dado, questo darà risultato pari con probabilità p=1/2 o dispari con probabilità q=1/2. Pertanto
$P_L(n+1) = P_L(n)p+ Q_L(n)q = 1/2.1/2+1/2.1/2=1/2$. Analogamente
$Q_L(n+1) = Q_L(n)p+ P_L(n)q = 1/2.1/2+1/2.1/2=1/2$.

e) **Vogliamo, a titolo di esercizio, calcolare $P_L(3)$ e $Q_L(3)$, probabilità di somma pari e di somma dispari per 3 dadi, come nel quesito proposto nella prova Invalsi.**
Luca vince (somma pari) se si verifica la configurazione PPP (tre pari) oppure PDD (un pari e due dispari). La configurazione PPP si verifica in $3^3=27$ modi. La configurazione DD si verifica in $3^2=9$ modi; un numero pari può stare a sinistra dei due dispari DD, in mezzo o a destra, perciò per ognuno dei numeri pari (2, 4, 6) si hanno 9.3=27 configurazioni e per i tre numeri pari si hanno in tutto 27.3=81 configurazioni. Siccome i casi possibili per tre dadi sono $6^3=216$, $P_L(3)= [(n(PPP)+n(PDD)]/216=[27+81]/216=108/216=1/2$, come abbiamo già trovato.
Naturalmente, $Q_L(3)=1- P_L(3)=1/2$.

f) **Vogliamo ora calcolare, come ulteriore esercizio, $P_L(4)$ e $Q_L(4)$.**
Il numero dei casi possibili è $N=6^4=1296$. Il numero dei casi favorevoli a $P_L(4)$ è la somma delle configurazioni n(PPPP+PPDD+DDDD). È più facile calcolare il numero delle configurazioni contrarie (Somma dispari): n(PPPD)+n(DDDP). Le configurazioni PPP sono quante le disposizioni con ripetizione di tre oggetti a 3 a 3, cioè $3^3=27$. Un dispari, rispetto a PPP, può stare in 1ª, 2ª, 3ª o 4ª posizione, perciò per ciascun dispari abbiamo 27.4=108 configurazioni e siccome i dispari sono tre (1, 3, 5), n(PPPD)=108.3=324. Per ovvi motivi di simmetria, anche n(DDDP)=324, e quindi i casi favorevoli a somma dispari, sono 648. Segue che $Q_L(4)=648/1296=1/2$ e altrettanto dicasi per $P_L(4)$.
Rispondere al volo: quante sono le configurazioni PPDD?