

Poliedri regolari e poliedri regolari troncati

In questo articolo esporrò le proprietà topologiche dei poliedri regolari e di quelli troncati.

Premetto alcune definizioni.

Angolo diedro è la regione di spazio compresa tra due semipiani (**facce**) aventi la stessa retta origine (**spigolo**). In realtà si formano, così, due angoli diedri; in questo articolo mi interessa quello convesso, cioè non contenente il prolungamento delle facce. *Questo è un concetto dello spazio affine*

Ampiezza dell'angolo diedro è l'angolo compreso tra le semirette ottenute intersecando le facce con un piano perpendicolare allo spigolo. Si dimostra che l'ampiezza di tale angolo non dipende dalla scelta del piano perpendicolare. *Questo è un concetto dello spazio metrico.*

Angoloide è definito come segue: Si fissi un punto V dello spazio (**vertice** dell'angoloide) e una linea poligonale chiusa *non intrecciata* giacente in un piano non passante per V. Angoloide è la superficie piramidale (illimitata) costituita da tutte le semirette di origine V, che passano per i punti della linea poligonale (**direttrice** dell'angoloide). Le semirette passanti per i vertici della direttrice si chiamano spigoli dell'angoloide. Le regioni angolari comprese tra spigoli consecutivi si chiamano **facce** dell'angoloide (facce consecutive delimitano gli angoli diedri dell'angoloide). *Questo è un concetto affine.*

Per il seguito è importante il seguente **teorema:** *la somma delle ampiezze angolari delle facce è minore di un angolo giro.* Una giustificazione intuitiva è la seguente: se l'angoloide si *chiude*, cioè se i suoi spigoli si sovrappongono, tutte le facce hanno ampiezza zero; **viceversa**, man mano che l'angoloide si apre l'ampiezza angolare delle facce aumenta, fino al caso limite in cui tutti gli spigoli diventano complanari (angoloide **degenere**) e le facce riempiono un **angolo giro**. *Questa è una proprietà metrica.*

Poliedro è la regione di spazio racchiusa da una superficie poliedrica **chiusa**, cioè costituita da poligoni (**facce del poliedro**) a due a due attaccati per uno spigolo e tali che una retta non giacente nel piano di una faccia, **se interseca una faccia** ne deve intersecare **un'altra**, e **una sola** (condizione di **chiusura** della superficie **semplicemente connessa**). **Perciò il poliedro si può trasformare in una sfera con un'opportuna trasformazione, che smussa gli spigoli e i vertici.** *Trasformazione topologica.*

Invariante topologico.

Si chiama invariante topologico un numero o una proprietà di una figura che resta invariato quando si sottopone la figura a deformazioni qualsiasi, che però non produca lacerazioni.

Per esempio, tutti i poligoni sono topologicamente equivalenti a un cerchio, tutti i poliedri sono equivalenti a una sfera. Perciò i poliedri devono avere una caratteristica, numero invariante, lo stesso per tutti i poliedri.

Conviene partire dai poligoni del piano. Un triangolo possiede una faccia, 3 vertici e 3 spigoli. Detti F il numero delle facce, V il numero dei vertici ed S il numero degli spigoli, si ha $F+V-S=1$. Ma anche $F+S-V=1$. **Per dirimere la questione** considero un quadrilatero, diviso in due triangoli da una diagonale. Si ottengono 2 facce, e 5 spigoli (i vertici restano 4). Perciò $F+V-S=2+4-5=1$.

A questo punto avanziamo la congettura che una catena di triangoli, **anche non complanari**, purché **non** formanti una superficie **chiusa**, connessi attraverso spigoli comuni a due facce, abbia $F+V-S=1$ come invariante topologico. **Il teorema è vero** per un solo triangolo; sia vero per una catena di n triangoli e dimostriamo che è vero per $n+1$ triangoli. L'aggiunta di un triangolo tramite uno spigolo fa aumentare di 1 le facce, di 1 i vertici e di 2 gli spigoli, perciò $F+V-S$ diventa $(F+1) + (V+1) - (S+2) = F+V-S=1$, q.e.d.

Considero ora un poliedro. Non importa che tipi di poligoni siano le facce, tanto possiamo sempre immaginare la sua superficie costituita da triangoli, tracciando opportune diagonali. Togliendo una faccia del poliedro, si ha una superficie poliedrica **aperta**, il cui invariante $F+V-S=1$. Aggiungendo il poligono di chiusura (**il coperchio**), **F aumenta di 1**, mentre V ed S restano invariati; perciò **$F+V-S=2$** . (*Caratteristica di Eulero*).

Ora mi propongo di calcolare per ogni poliedro regolare il numero F delle facce, il numero V dei vertici e il numero S degli spigoli.

Ricordo che un **poliedro** si dice **regolare** se le sue facce sono poligoni regolari **uguali** tra loro e se sono tutti **uguali** tra loro i suoi **angoli diedri** e i suoi **angoloidi**.

*Un poliedro regolare è un **oggetto metrico** del quale intendo determinare una **proprietà topologica**.*

Comincio con i poliedri regolari aventi facce **triangolari**.

Le facce concorrenti in un vertice formano un angoloide e il numero delle sue facce può essere 3, 4 o 5. Se fossero 6, la somma delle ampiezze delle facce sarebbe $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ e l'angoloide sarebbe degenerare. Si **conclude** che con triangoli regolari si possono ottenere solo **tre tipi di poliedri (regolari)**.

Caso di 3 triangoli. I vertici di un triangolo sono 3, perciò, detto F il numero delle facce del poliedro, il numero V dei vertici dovrebbe essere $3F$; ma tenendo conto che in ogni vertice del poliedro concorrono 3 facce, si conclude che $V=3F/3=F$. Il numero S degli spigoli è $3F/2$, perché in ogni spigolo concorrono due facce. Utilizzando l'invariante topologico: $F+V-S=2$, si ottiene l'equazione $F+F-3F/2=2$ e infine **$F=4$, $V=4$, $S=6$** . Tale poliedro è detto **tetraedro** (4 facce).

Caso di 4 triangoli. Il numero V dei vertici è $3F/4$. Per l'invariante topologico ho $F+3F/4-3F/2=2$ e quindi **$F=8$, $V=3F/4=6$ e $S=3F/2=12$** . Il poliedro si chiama **ottaedro** (8 facce).

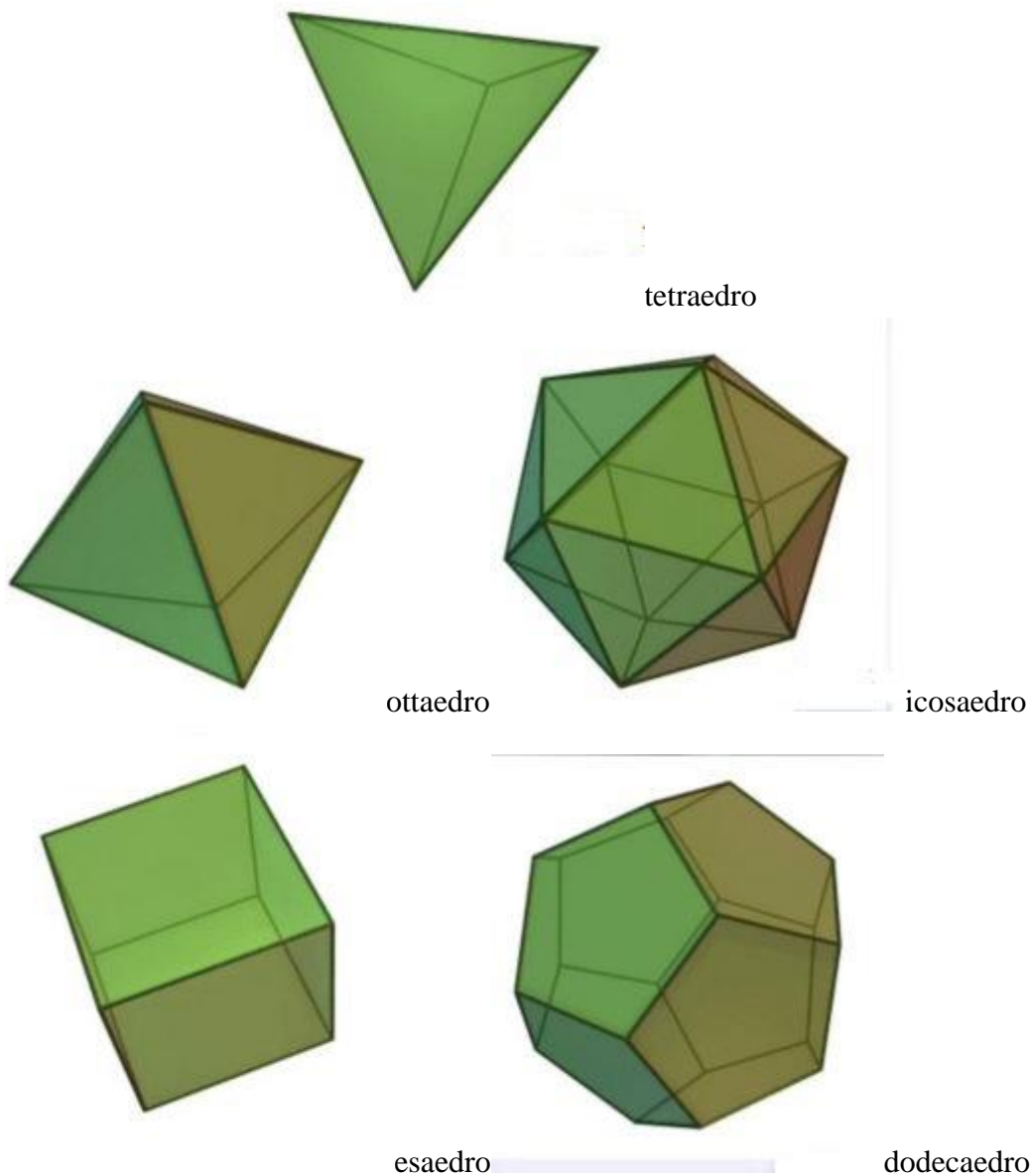
Caso di 5 triangoli. $V=3F/5$, $S=3F/2$ e perciò $F+3F/5-3F/2=2$. Segue **$F=20$, $V=12$, $S=30$** .

Tale poliedro si chiama **icosaedro** (20 facce).

C'è un solo poliedro con facce quadrate, perché in un vertice possono concorrere solo 3 facce ($3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$, 4 facce quadrate porterebbero la somma delle ampiezze delle facce a un angolo giro). Si ha, perciò, **$V=4F/3$, $S=4F/2$** e il vincolo dell'invariante dà $F+4F/3-4F/2=2$, da cui segue:

$F=6$, $V=8$, $S=12$. Tale poliedro si chiama **esaedro** (ha 6 facce). E il noto **cubo**.

Il quinto e ultimo poliedro ha facce pentagonali. Avendo angoli interni di 108° , solo 3 facce possono concorrere in un vertice. Si ha perciò **$V=5F/3$, $S=5F/2$** . Segue **$F+5F/3-5F/2=2$, da cui $F=12$, $V=20$, $S=30$** . Si chiama **dodecaedro**, perché ha 12 facce.



Ricapitolando, abbiamo

1. Tetraedro: facce concorrenti in un vertice, **3 triangoli**. $F=4, V=4, S=6$.
2. Ottaedro: facce concorrenti in un vertice, **4 triangoli**. $F=8, V=6, S=12$.
3. Icosaedro: facce concorrenti in un vertice, **5 triangoli**. $F=20, V=12, S=30$.
4. Esaedro: facce concorrenti in un vertice, **3 quadrati**. $F=6, V=8, S=12$.
5. Dodecaedro: facce concorrenti in un vertice, **3 pentagoni**. $F=12, V=20, S=30$.

Si noti che ottaedro ed esaedro scambiano il numero delle facce con quello dei vertici, perciò ottaedro ed esaedro si dicono **duali**. Lo stesso fanno icosaedro e dodecaedro. Il tetraedro ha 4 facce e 4 vertici, perciò è **autoduale** (duale di se stesso). Il numero degli **spigoli** è **invariante** per dualità.

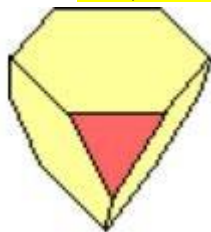
La dualità tra coppie di poliedri è una forma di **simmetria** (topologica).

Poliedri regolari troncati.

Si ottengono dai cinque poliedri regolari **smussandone** i vertici, cioè eliminando le piramidi che hanno i vertici nei vertici del poliedro da troncare e spigoli *lateral*i tali che tutti gli spigoli dei poliedri troncati siano uguali tra loro, in modo che facce adiacenti, anche se di due tipi diversi, si possano raccordare lungo gli spigoli.

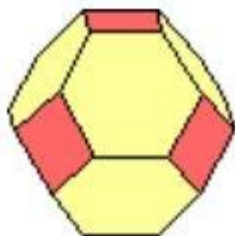
Questi cinque poliedri troncati fanno parte dei 13 poliedri **semi-regolari** studiati da Archimede. (Vedi i disegni realizzati da Leonardo da Vinci per la **Divina Proportione** di Luca Pacioli).

Tetraedro troncato. Indichiamo con **a** la lunghezza dello spigolo del tetraedro. Si smussa ciascuno dei 4 vertici, secando il tetraedro con piani che intersecano gli spigoli uscenti da quel vertice a distanza di $a/3$ dal vertice (**perché?**). Le vecchie facce triangolari diventano 4 esagoni (regolari) di spigolo $a/3$, in più si formano 4 facce triangolari per effetto dei tagli, perciò in tutto abbiamo 8 facce. I tagli producono 3 vertici per ciascuno dei 4 tagli triangolari, perciò in tutto 12 vertici. Infine gli spigoli sono i 6 iniziali (la cui lunghezza è ridotta a $1/3$) più i 12 delle 4 facce triangolari prodotte dai tagli, in tutto 18 spigoli. In conclusione, **F=8, V=12, S=18.**



Tetraedro troncato

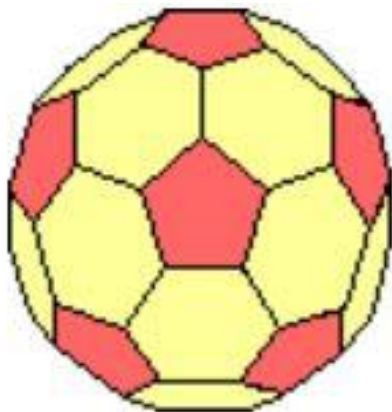
Ottaedro troncato. Le 8 facce triangolari diventano esagonali; a queste vanno aggiunte 6 facce quadrate in corrispondenza dei 6 tagli; in tutto 14 facce. I vertici sono 4 per ciascun dei 6 vertici originali, perciò in tutto 24. Infine gli spigoli sono i 12 originali (sempre ridotti in lunghezza ad $a/3$) più 4 per ciascuno dei 6 tagli, in tutto 36. In conclusione **F=14, V=24, S=36.**



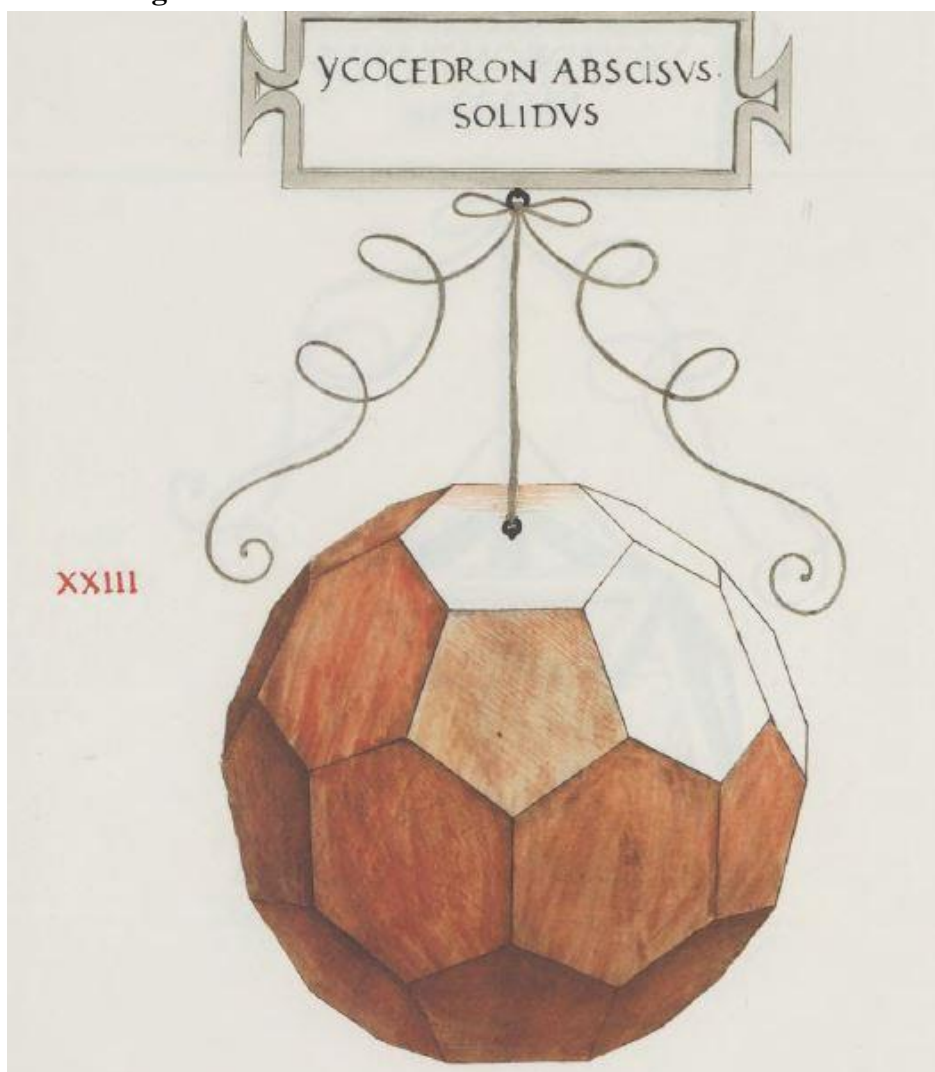
Ottaedro troncato

Icosaedro troncato. Le 20 facce triangolari diventano 20 facce esagonali; a queste vanno aggiunte 12 facce pentagonali in corrispondenza dei 12 vertici tagliati, in tutto 32 facce. I vertici sono 5 per ciascuno dei 12 vertici tagliati, in tutto 60. Infine, gli spigoli sono i 30 originali (ridotti in lunghezza

ad a/3) più 5 per ciascuno dei 12 vertici tagliati, in tutto $30+60$. In conclusione **$F=32$, $V=60$, $S=90$** .

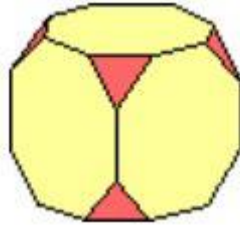


Il pallone da calcio è un icosaedro troncato
Qui sotto riporto il disegno di Leonardo.



Esaedro troncato. Le 6 facce quadrate diventano 6 facce ottagonali, alle quali si aggiungono 8 facce triangolari derivanti dal taglio degli 8 vertici, perciò $F=14$. I vertici sono 3 per ogni vertice originario, perciò $V=24$. Infine gli spigoli sono i 12 originari (accorciati) più i 24 delle 8 facce triangolari, perciò $S=36$. In conclusione, **$F=14, V=24, S=36$** .

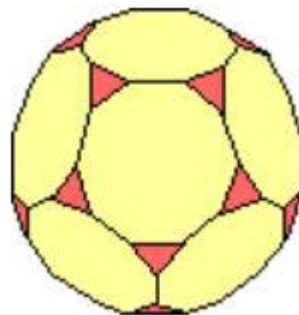
Calcolare esattamente la lunghezza degli spigoli dell'esaedro troncato (circa il 41% di a)



Esaedro troncato

Dodecaedro troncato. Le 12 facce pentagonali diventano 12 facce decagonali, alle quali vanno aggiunte 20 facce triangolari dovute ai tagli dei 20 vertici, perciò $F=32$. Siccome i 20 vertici del dodecaedro sono sostituiti dai vertici dei 20 triangoli dei tagli, $V=60$. Infine gli spigoli sono i 30 originari (accorciati) più i 60 delle 20 facce triangolari, perciò $S=90$. In conclusione, **$F=32, V=60, S=90$** .

Calcolare esattamente la lunghezza degli spigoli del dodecaedro troncato (circa il 45% di a)



Dodecaedro troncato

Si noti che in ogni caso vale l'invarianza topologica $F+V-S=2$.

Riepilogando

1. Tetraedro troncato $F=8$ (4 esagoni, 4 triangoli), $V=12, S=18$.
2. Ottaedro troncato $F=14$ (8 esagoni, 6 quadrati), $V=24, S=36$.
3. Icosaedro troncato $F=32$ (20 esagoni, 12 pentagoni), $V=60, S=90$.
4. Esaedro troncato $F=14$ (6 ottagonali, 8 triangoli), $V=24, S=36$.
5. Dodecaedro troncato $F=32$ (12 decagoni, 20 triangoli), $V=60, S=90$.

Si noti che, passando dai poliedri regolari a quelli troncati, la simmetria per dualità diventa ancora più stringente, anzi, se decidiamo di **non distinguere** i due tipi di facce poligonali, i poliedri troncati derivanti da poliedri duali, avendo lo stesso numero di facce, di vertici e di spigoli, sono addirittura indistinguibili, **sono lo stesso poliedro**.