Ottavio Serra

Piani arguesiani e non arguesiani.

1. Piano arguesiano[1].

Nel piano cartesiano usuale, munito di coordinate reali, vale la configurazione (teorema) di Desargues: “Se due triangoli ABC e A’B’C’ sono disposti in modo tale che punti corrispondenti (AA’, BB’, CC’) stanno su rette parallele a, b, c e se A’B’ $\parallel$ AB, A’C’ $\parallel$ AC , allora B’C’ $\parallel$ BC”. Vedi fig.1

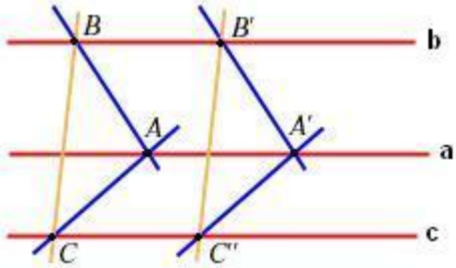

fig.1

(Configurazione *Da*: Desargues affine).

Il teorema vale anche se le tre rette a, b, c concorrono in un punto P. Vedi fig.2

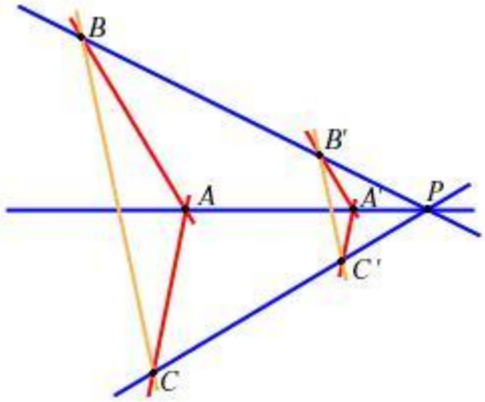

fig.2

(Configurazione *DP*)

Da è un caso particolare di *DP*, quando P è un punto improprio.

Entrambi i casi rientrano nella configurazione proiettiva di Desarguesa: “Se le rette AA’, BB’, CC’ sono incidenti in P e le rette A’B’ e AB, A’C’ e AC si intersecano su una retta l, rispettivamente in R ed S, allora anche B’C’ e BC si intersecano sulla retta l, in T”. Vedi fig.3.

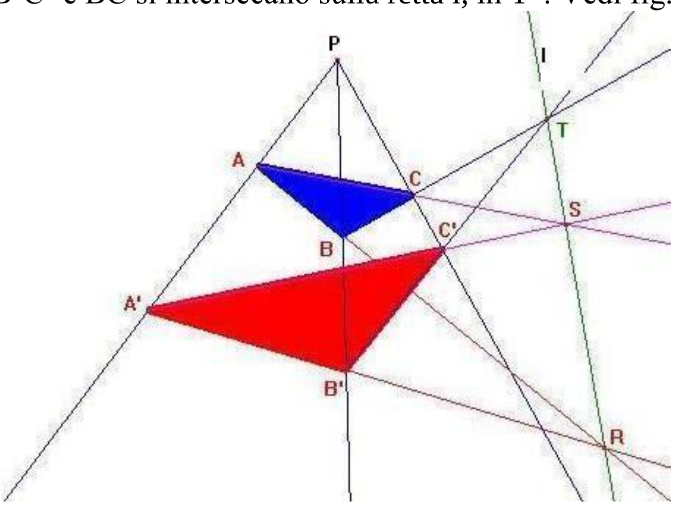

fig.3

[1] Girard Desargues, Lione 1591 – Lionr 1661, fondatore della geometria proiettiva.

I triangoli ABC e A'B'C' nella fig.3 sono disposti in modo tale da dare l'illusione di appartenere a piani distinti. In tal caso ABC e $A'B'C'$ sono sezioni di una piramide di vertice P e i piani α e ά delle due sezioni si intersecano in una retta l (eventualmente impropria). Siccome le rette AB e A'B' sono complanari (giacciono nel piano della faccia PAB della piramide) e inoltre giacciono rispettivamente sui piani α e ά, si devono intersecare su l, intersezione di α e ά, nel punto R. Per lo stesso motivo le rette A'C' e AC si intersecano su l (in S) e B'C' e BC si intersecano su l (in T). Se i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono complanari, basta proiettarne uno da un punto P fuori del loro piano e ricondursi a una configurazione spaziale. Così Desargues dimostrò il teorema che porta il suo nome, utilizzando i soli postulati di incidenza (geometria proiettiva, che nasce con lui). Nel 1896 Hilbert[2], nei suoi *Fondamenti della geometria*, dimostrò che il teorema di Desargues proiettivo (o affine, se si aggiunge il parallelismo) è una proprietà caratteristica dei piani che si possono pensare immersi in uno spazio tridimensionale, nel senso che, con i soli postulati di incidenza (ed eventualmente di parallelismo) non è possibile dimostrarlo restando nel piano. Come mostrò Artin nella sua *Algebra geometrica*[3], volendo dimostrare il teorema restando nel piano affine, ai postulati di incidenza e parallelismo occorre aggiungere l'assioma: "*Dati due punti distinti A e A' esiste una traslazione che porta A in A'.*", equivalente alla configurazione *Da* di fig.1, (assioma 4a, pag. 65 dell'edizione Feltrinelli). Esso a sua volta è equivalente all'assioma "*Dati tre punti allineati P A A', esiste una e una sola dilatazione di centro P che porta A in A'.*", equivalente alla configurazione *DP* di fig.2, (assioma 4bP di pag. 71 del testo citato). Inoltre Artin dimostra che i due assiomi di cui sopra, o le equivalenti configurazioni di Desargues, consentono di munire il piano di coordinate appartenenti a un corpo (**non necessariamente commutativo**).
Il viceversa è falso, nel senso che esistono piani con le coordinate dei punti appartenenti a un corpo e in cui tuttavia non vale il teorema di Desargues. Si chiamano *piani non arguesiani*.

2. Un modello di piano non arguesiano.

David Hilbert diede un tale esempio nel 1901, esempio semplificato l'anno dopo dall'astronomo e matematico americano Moulton[4] e ora noto come *Piano di Moulton*.
I punti sono le usuali coppie di numeri reali (volendo, ci si può limitare al corpo razionale), le rette invece sono definite come segue:
(1) le usuali rette cartesiane, se il coefficiente angolare è ∞ o non positivo ($x=h$, $y=mx+q$ con $m\leq 0$);
(2) le spezzate $y=mx+q$, se $y\geq 0$; $y=2mx+2q$ se $y<0$, con $m>0$. Le due semirette della spezzata si raccordano nel punto $(-q/m, 0)$ dell'asse delle ascisse.
Si dimostra agevolmente che nel piano di Moulton valgono gli assiomi di incidenza e parallelismo. Per esempio, la retta passante per i punti (1, 1), (3,2) è

$$\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, x\geq -1\right\}\cup\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=x+1, x<-1\right\}.$$

La parallela (unica) per il punto P(4,7) parallela alla precedente retta è

$$\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=\frac{1}{2}x+5, x\geq -10\right\}\cup\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=x+10, x<-10\right\}.$$

La parallela a queste due rette per il punto (-5,-2) è

$$\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, x\geq -3\right\}\cup\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=x+3, x<-3\right\}.$$

[2] David Hilbert, Konisberg 1863, Gottinga 1943
[3] Emil Artin, Vienna 1898, Amburgo 1962. " *Algebra geometrica*", U.S.A 1964, Feltrinelli 1968
[4] Forest Ray Moulton, Le Roy, 1872, Wilmette, 1952)

La parallela alle precedenti per il punto (5,-2) è

$$\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, x\geq -7\right\}\cup\left\{(x,y)\in R^2 \mid y=x-7, x<7\right\}.$$

Gli esempi addotti dovrebbero aver chiarito il procedimento.
Orbene, nel piano affine di Moulton non vale il teorema di Desargues, come si evince dalla seguente fig.4

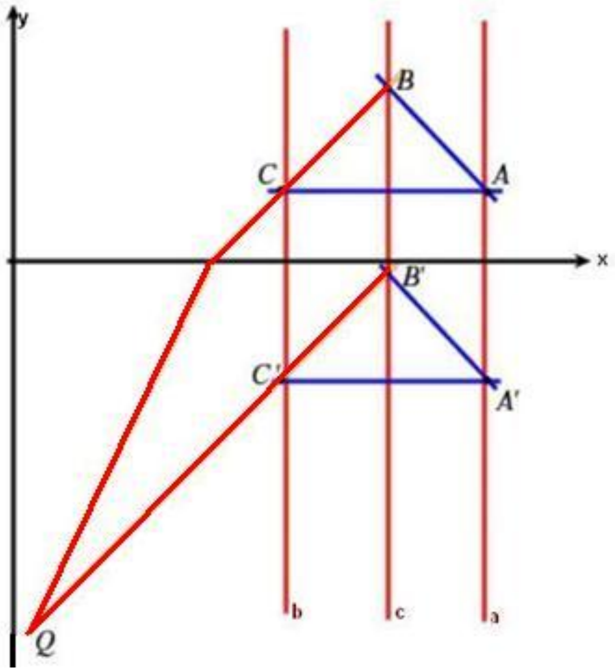

fig.4

Le coppie di punti corrispondenti A A', B B', C C' stanno sulle rette parallele a, b, c e inoltre A'B' è parallela ad AB, A'C' è parallela ad AC; ma B'C' e BC si intersecano in Q.
Questa fig.4 è l'analogo non arguesiano della fig.1.
Esercizio. Supponendo che i vertici dei due triangoli ABC e $A'B'C'$ abbiano coordinate

A(6, 2), B(5, 4), C(4, 2) e A'(6, -2), B'(5, 0), C'(4, -2),

si verifica facilmente che sono parallele le rette dei lati A'B' e AB, A'C' e AC, ma non le rette dei lati B'C' e BC.
Verificare che la loro intersezione è il punto Q(1, -8).

3. Un modello di piano non arguesiano e non affine.

Considero l'insieme delle coppie di numeri interi $\boldsymbol{Z}^2$ come punti di un piano *discreto*, l'insieme delle rette di tale piano siano le equazioni lineari ax+by+c=0, con a, b, c, x, y numeri interi. E' chiaro che due punti distinti individuano una retta, che esistono almeno tre punti non allineati, che esistono rette parallele. Però non vale l'unicità della parallela per un punto a una retta data, nel senso che esistono infinite rette per un punto che non intersecano una retta data; inoltre la relazione di parallelismo non è transitiva.
Faccio un esempio. Sia P(3,7) ed r la retta x+y=0. Le rette s per P sono a(x-3)+b(y-7)=0, con a, b, x, y interi. Se a=b, si ottiene la retta x+y-10=0 che è parallela ad r. Se a è diverso da b l'eventuale intersezione di r con la generica retta s per P fornisce (a-b)x=3a+7b da cui $x=\frac{3a+7b}{a-b}$ e y=-x. L'intersezione Q tra s ed r è un punto (di $\boldsymbol{Z}^2$) solo se 3a+7b è un multiplo di a-b, per es. a=-b, da cui Q(-2, 2), oppure a=-4b, da cui Q(1, -1), oppure a=-9b, da cui Q(2, -2), oppure a=0, da cui Q(-7, 7), oppure a=2b, da cui Q(13, -13), oppure a=3b, da cui Q(8, -), eccetera. Tutti questi valori di a indivi-

duano rette per P secanti r. Invece valori di a come -2b, -3b, -5b, -6b, -7b, -8b, …+7b, 8b,… danno luogo a rette per P non secanti r e quindi da chiamare rette parallele. Inoltre non vale la proprietà transitiva del parallelismo. Per esempio, la retta r: $x+y=0$ è parallela alla retta s: $x+y-10=0$, la retta s è parallela alla retta t: $x-2y=0$ (l'intersezione non è un "punto" di Z^2), però t non è parallela ad r, perché t ed r si intersecano in O(0, 0).

Vediamo ora che in $\boldsymbol{Z}^2$ non vale il teorema di Desargues.

Considero le rette parallele a: $y = x$, b: $y = -x+1$, c: $y = 3x-5$ e su a i punti A(1, 1) e A'(2, 2), su b i punti B(1, 0) e B'(2, -1), su c i punti C(3,4) e C'(α, $3\alpha-5$); tra poco sceglierò α in modo opportuno.

La retta AB ha equazione $x=1$, la retta A'B' ha equazione $x=2$, perciò AB||A'B'.

La retta AC ha equazione $3x-2y-1=0$, la retta A'C' ha equazione $(3\alpha-7)x-(\alpha-2)y-4\alpha+10=0$, perciò AC||A'C' scegliendo, per esempio, $\alpha=6$; in tal caso l'equazione di A'C' è $11x-4y-14=0$.

Con $\alpha=6$ si ha C'(6,13) e la retta B'C' avrà equazione $7x-2y-16=0$. L'equazione di BC è $2x-y-2=0$ e le rette BC e B'C' si intersecano nel punto Q(4, 6). Vedi fig.5

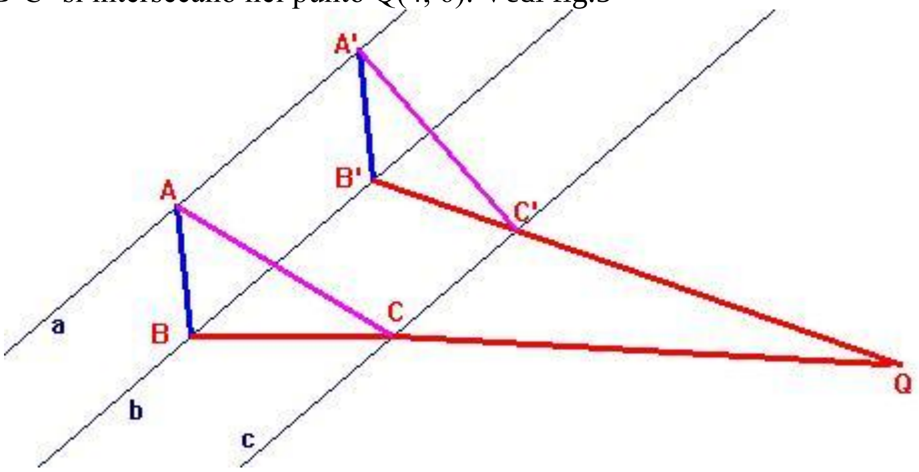

fig.5

Piano arguesiano e teorema di Pappo[5]

Abbiamo detto che in un piano arguesiamo le coordinate dei punti formano un corpo, non necessariamente commutativo. Il corpo è commutativo, se vale il seguente teorema di Pappo: "Se su due rette, r ed r', si prendono rispettivamente i punti A, B, C e A', B', C', allora le intersezioni delle coppie di rette AB' e A'B, BC' e B'C, CA' e C'A sono allineate (Vedi fig.6, R,S,T su s).

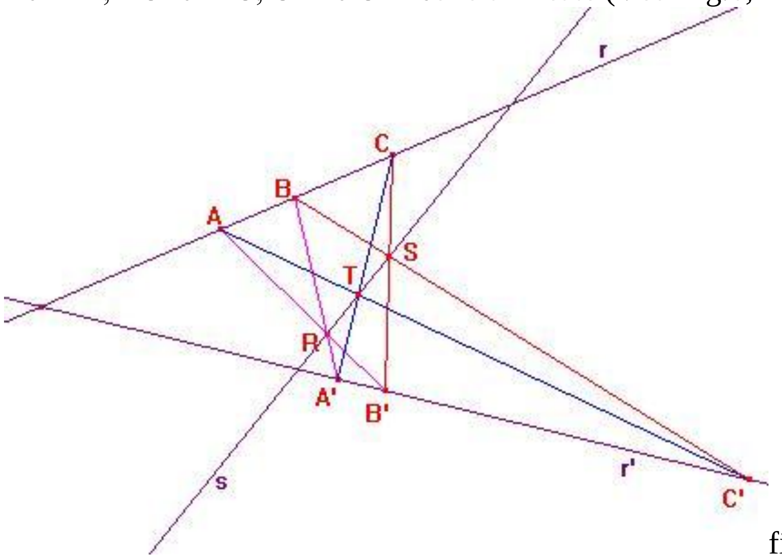

fig.6

La retta s può anche essere impropria, come suggerisce la seguente fig.7.

[5] Pappo di Alessandria, 3° secolo d.C. "Sinagoge" o "Collectiones mathemathicae".

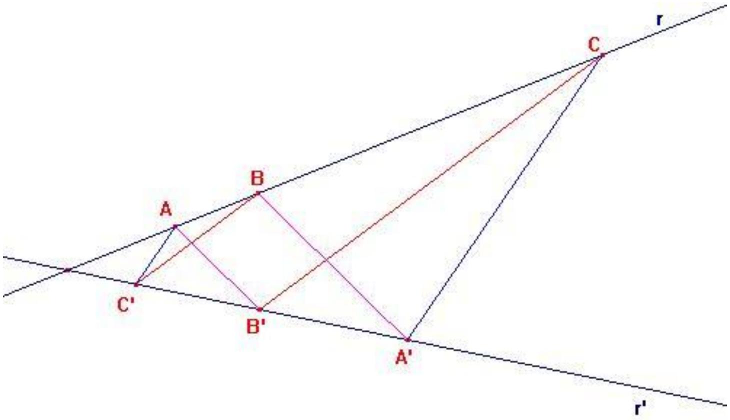

fig.7

nel qual caso le tre coppie di rette sono parallele.
E' notevole, come dimostra Artin nella sua "*Algebra geometrica*" citata in nota [3], pag.82, che il teorema di Pappo vale se e solo se il corpo delle coordinate è un campo (corpo commutativo).
N.B. Anche r ed r' possono essere parallele.
Il teorema di Pappo è un caso particolare di Pascal[6] sulle coniche (infatti una coppia di rette del piano è una conica degenere): "Coppie di lati opposti di un esagono inscritto in una conica si intersecano su una retta" (fig.8 ellisse o fig.9 iperbole)

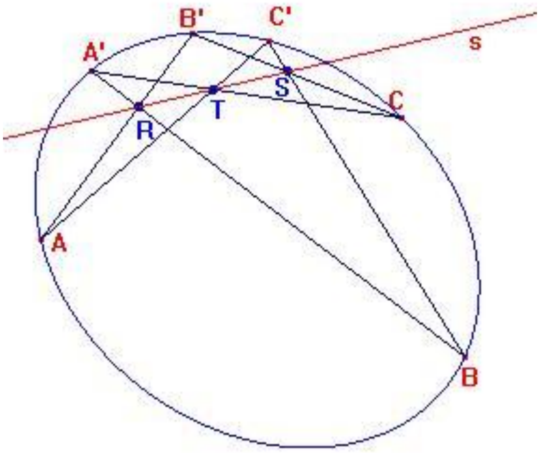

fig.8

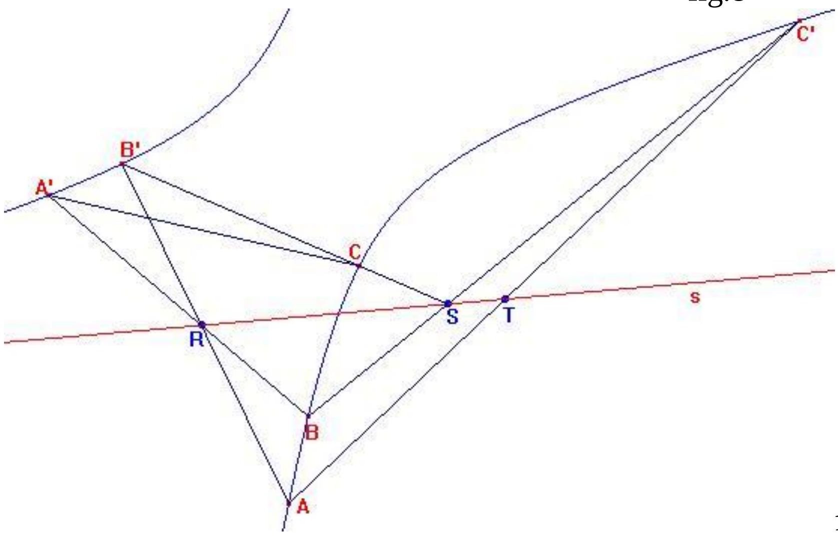

fig.9

[6] Blaise Pascal, Clermont-Ferrand,1623 – Parigi, 1662.

Siccome in geometria proiettiva vale il *principio di dualità* (Se nel piano proiettivo si scambiano le parole "punto" e "retta", da un teorema vero si ottiene ancora un teorema vero), dal teorema di Pascal si ricava il teorema di Brianchon[7]:
"Coppie di vertici opposti di un sei-latero circoscritto a una conica determinano tre rette passanti per un punto" (fig.10):

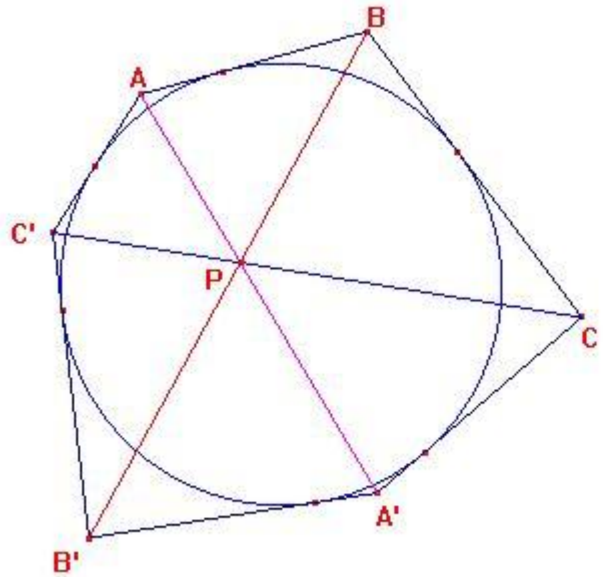

fig.10

Nota sul piano proiettivo.
Un punto è individuato da una terna di numeri (reali o complessi), quando si identificano terne proporzionali. Un'equazione lineare
(*) $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$
individua una retta nelle coordinate u e un punto nelle coordinate a. Due punti (distinti) determinano una e una sola retta, così due rette (distinte) determinano uno e un solo punto: non ci sono rette parallele. Nella doppia interpretazione dell'equazione (*) sta il principio di dualità.

[7] **Charles Julien Brianchon** (Sèvres, 1783 – Versailles, 1864)