Ottavio Serra

Poligoni isoperimetrici

Premessa.
Fin dall’antichità i matematici si posero il problema di studiare come varia, a parità di perimetro, l’area di una figura piana e in particolare di un poligono, al variare della forma e del numero dei lati. Virgilio nell’Eneide (primo libro) racconta la leggenda di Didone che, avendo avuto dal re del luogo il permesso di edificare una città, la futura Cartagine, grande quanto ne poteva delimitare una pelle di toro, ridotta la pelle in sottili strisce, delimitò una zona di terreno di forma semicircolare, con il diametro lungo la spiaggia per avere un lungo tratto dove costruire il porto.
Lasciamo ora Didone e cominciamo a studiare il problema.

Figure convesse. Una figura si dice convessa se, insieme a due punti contiene tuti i punti del segmento che li ha per estremi. Se una figura non è convessa, si dice concava. Sono, per esempio, convessi i triangoli e i cerchi. I quadrilateri e in generale i poligoni o figure a contorno curvilineo possono essere convessi o concavi a secondo che sono privi di rientranze oppure no. Vedere i disegni seguenti nella fig1:

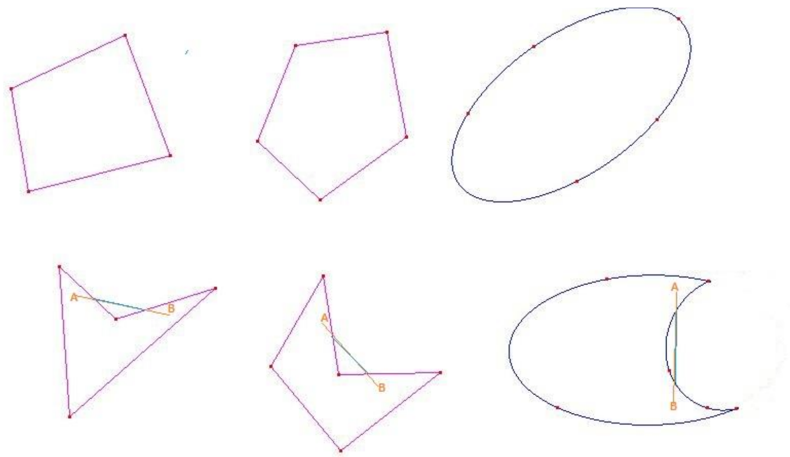

fig1

Le tre figure superiori sono convesse, quelle inferiori sono concave: infatti il segmento AB ha la parte centrale non interna alle figure.
Appare evidente che, a parità di contorno (di perimetro) e di numero di lati, un poligono concavo ha un’area minore del corrispondente poligono convesso (fig2).

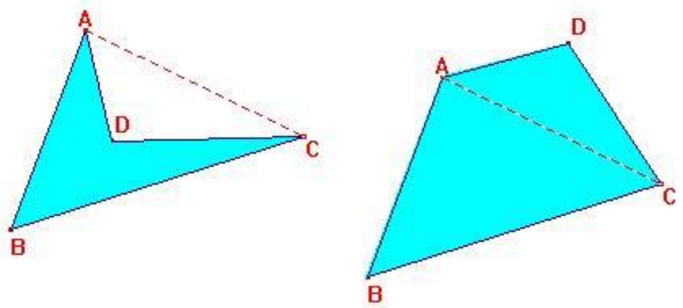

fig2

Il poligono di destra è stato ottenuta da quello di sinistra ribaltando la cavità triangolare ADC rispetto al segmento AC; chiaramente, l’area del quadrilatero concavo ABCD è crescita del doppio dell’area del triangolo ADC. Perciò, a parità di perimetro, l’area massima va cercata tra le figure convesse e, per motivi di simmetria, tra le figure più regolari.

Triangolo. Tra tutti i triangoli di uguale perimetro quello di area massima deve essere equilatero. Infatti, se un angolo va a zero o a 180°, l'area va a zero; perciò, per motivi di simmetria, l'area massima si avrà per il triangolo più simmetrico possibile, cioè quello equilatero.
Un esempio. Sia p =12 il perimetro e i lati siano 3, 4, 5. L'area è 6. Consideriamo ora il triangolo equilatero di perimetro 12, il lato è l=4 e l'area è $S_3 = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \sim 6{,}928 > 6$.
Dunque, per il triangolo equilatero di perimetro p il lato l risulta p/3 e perciò
[1] $S_3 = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{p^2}{36}\sqrt{3}$ ($\sim p^2.0{,}048\ldots$).

Quadrilatero (convesso). Se due angoli vanno a zero e quindi gli altri due a 180°, l'area va a zero, perciò per simmetria l'area cresce quando gli angoli tendono a 90°. Il quadrilatero deve essere un rettangolo. Ora mostriamo che, tra tutti i rettangoli di uguale perimetro, l'area massima ce l'ha il quadrato. Siano x e y il lati del rettangolo di perimetro p. Dalla disuguaglianza

$0 \le (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x+y-2\sqrt{(xy)}$, valendo il segno "=" quando y=x, segue che :

$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, valendo il segno "=" quando y=x. Perciò il massimo di xy si ha per y=x, cioè per il quadrato: x=y=l. Segue
[2] $S_4 = l^2 = \frac{p^2}{16}$ ($=p^2.0{,}0625$). Si noti che $S_4 > S_3$.

Esagono. Siccome il caso del pentagono è più difficile, passiamo **all'esagono regolare**. Siccome l'esagono è costituito da 6 triangoli equilateri, risulta
[3] $S_6 = 6.\frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{p^2}{24}\sqrt{3}$ ($\sim p^2.0{,}072\ldots$) $> S_4$.
Sembra che, a parità di perimetro, l'area vada crescendo col numero dei lati.

Decagono. Facciamo una verifica col decagono regolare.
Occorre sapere che il lato del decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto; ciò perché il decagono consta di 10 triangoli isosceli (uguali), aventi per base i lati del decagono, ciascuno dei quali ha l'angolo al vertice di 36° e perciò la base l è sezione aurea del lato obliquo r, come si dimostra facilmente.

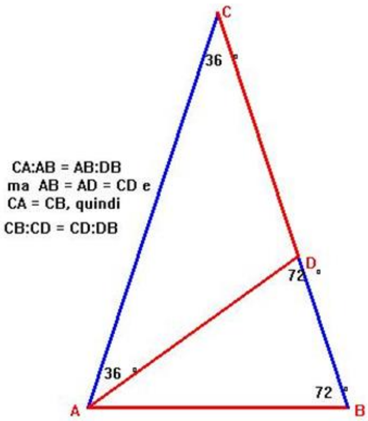

fig3

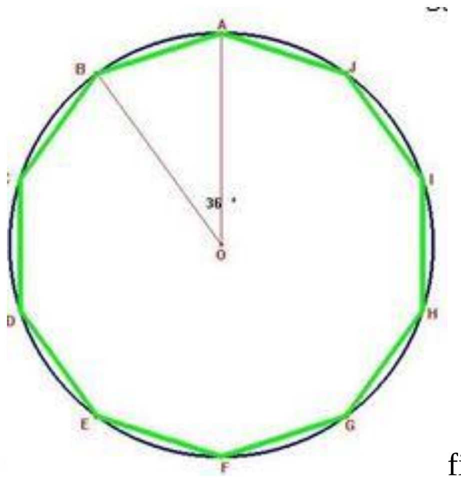

fig3 bis

Dunque $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$. Viceversa $r = \frac{2l}{\sqrt{5}-1} = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{p(\sqrt{5}-1)}{20}$.

L'altezza dei 10 triangoli isosceli è $h=\sqrt{r^2-l^2/4}$ $=\sqrt{\frac{l^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)^2-\frac{l^2}{4}}=\frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Perciò l'area del decagono regolare sarà

[4] $S_{10}=10\frac{lh}{2}=10\frac{l^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}=10\frac{p^2}{400}\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\frac{p^2}{40}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ($\sim p^2.0,0769...$).

Siccome $S_{10}>S_6$, la congettura è rafforzata. Ma vale in generale?
Affrontiamo allora il caso generale con tecniche trigonometriche.

Avendo nozioni di trigonometria, è semplice calcolare l'area del poligono regolare di n lati (di assegnato perimetro p). Il poligono consiste di n triangoli isosceli di base l=p/n e altezza $h=\frac{l}{2}\text{cotang}\frac{\alpha}{2}$, essendo α l'angolo al vertice opposto ad l, α =n-ma parte dell'angolo giro: quindi $h=\frac{l}{2}\text{cotang}\frac{\pi}{n}$ e l'area dell'ennagono regolare sarà

[5] $S_n=n\frac{lh}{2}=n\frac{l^2}{4}\text{cotang}\frac{\pi}{n}=\frac{p^2}{4n}\text{cotang}\frac{\pi}{n}$.

S_n si può scrivere nella seguente forma più utile per il seguito:

[6] $S_n=\dfrac{p^2}{4\pi\left(\dfrac{\text{tang}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)}$.

Che cosa succede al crescere del numero n dei lati (e quindi al decrescere di α) ?
Posto π/n = z, se si misurano gli angoli in radianti e si assume uguale a 1 il raggio del cerchio (cerchio goniometrico, vedi fig4), l'arco PAP' = angolo POP' = 2z, OH=Cosz, PP' = 2Senz, TT' = 2tangz.

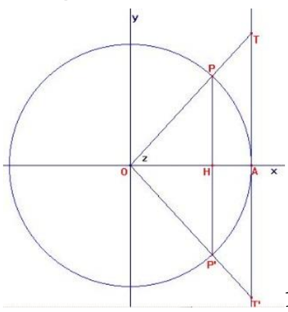

fig4

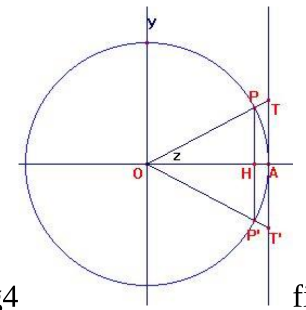

fig5

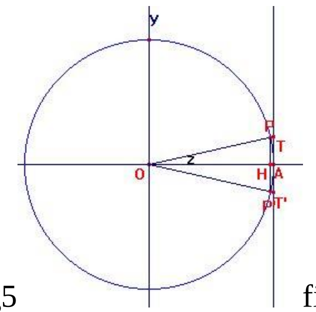

fig6

Valgono le seguenti disuguaglianze: Area(Triangolo POP')<Area(Settore POP'A)<Area(Triangolo TOT'). Perciò

[7] Senz.Cosz < z < Tangz. Si noti, per inciso, che da questa doppia disuguaglianza segue $Cosz<\frac{z}{Senz}<\frac{1}{Cosz}$ e siccome, per z tendente a zero, Cosz tende a 1, si ottiene un famoso limite: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{Senz}{z}=1$. (se l'angolo si misura in gradi, il limite non è 1, ma …).

Ma ora ci interessa la seconda disuguaglianza della [7], che ci dice: Tangz/z >1, ovvero

$$\frac{Tang\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} > 1$$ e, per n→ ∞ (equivalente a z → 0) la frazione decresce a 1. (Vedi fig5 e fig6).

La [6], pertanto, conferma quanto intuito dai casi particolari, cioè che S_n cresce al crescere di n e il suo estremo superiore è $\frac{p^2}{4\pi}$, area del cerchio di perimetro p.

Tornando a Didone.

Secondo la leggenda ricordata all'inizio, Didone utilizzò la lunga striscia p di pelle del toro per delimitare un semicerchio avente il diametro lungo la spiaggia, supposta rettilinea. Siccome è presumibile che non abbia dovuto utilizzare parte della striscia di pelle lungo la spiaggia, (lì a delimitare il terreno c'era il mare), la pelle fu distesa lungo la semicirconferenza. L'area del terreno che in tal modo l'astuta Didone si procacciò è maggiore di $\frac{p^2}{4\pi}$, area del cerchio di perimetro p?

Alcuni risultati goniometrici.

Confrontando la formula [4] per l'area del decagono regolare con la formula [5] che dà l'area dell'ennagono, si ottiene la cotangente di 18°. Calcolare anche seno, coseno e tangente di 18°.

$$\left[Sen18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, Cos18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, Tang18° = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}, Cotg18° = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \right]$$

Calcolare poi Seno e Coseno di 36° e di 9°.

$$\left[Sen36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, Cos36° = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}, Tang36° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, Cotg36° = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} \right]$$

$$\left[Sen9° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}, Cos9° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \right].$$