

## Ottavio Serra

### La legge della radiazione di corpo nero da Planck ad Einstein.

#### 1. Introduzione.

Come è noto, si chiama corpo nero un corpo che assorbe tutte le radiazioni (elettromagnetiche) che lo investono, qualunque sia la loro frequenza.

Il potere emissivo specifico di un corpo  $e_v(\nu, T)$  è definito come l'energia emessa in un secondo dall'unità di superficie del corpo in tutte le direzioni nella banda di frequenza unitaria e dipende, oltre che dalla frequenza e dalla temperatura, anche dalla natura del corpo:

$$[1] e_v(\nu, T) = \frac{dE}{dt dS d\nu} \text{ watt.m}^{-2}\text{Hz}^{-1}.$$

Anche il potere assorbente  $a_v(\nu, T)$ , definito come la percentuale di energia assorbita sul totale di quella incidente, dipende da  $\nu$ ,  $T$  e dalla natura del corpo. Kirchhoff ha però dimostrato<sup>1</sup> che

$$[2] E_v(\nu, T) = \frac{e_v(\nu, T)}{a_v(\nu, T)}$$
 non dipende dalla natura del corpo emittente, ma solo da  $\nu$  e da  $T$ ; è, cioè,

una **funzione universale della frequenza e della temperatura**. Per potere assorbente uguale ad 1, questa funzione universale dà il potere emissivo del corpo nero.

La densità di energia di radiazione in una cavità in equilibrio termico,  $u_v(\nu, T)$ , è definita come l'energia per unità di volume nella banda di frequenza unitaria. Siccome  $u_v$  si misura in  $\text{J.m}^{-3}\text{Hz}^{-1}$ ,  $E_v$  si ottiene da  $u_v$  moltiplicata per una velocità che, data la natura elettromagnetica della radiazione, non può essere che la velocità  $c$  della luce; in verità è  $c/4$ , come dimostra Becker in nota<sup>1</sup>.

Nello stesso testo citato in nota<sup>1</sup> viene riportata la dimostrazione di Boltzmann, basata sulla termodinamica classica, che il potere emissivo integrale del corpo nero è

$$[3] E(T) = \int_0^{\infty} E_v(\nu, T) d\nu = \sigma T^4, \text{ ma la costante } \sigma \text{ non è determinabile per via teorica.}$$

In verità in Becker si dimostra che

$$[4] u(T) = \int_0^{\infty} u_v(\nu, T) d\nu = \alpha T^4, \text{ ma ovviamente } E(T) = u(T) \cdot c/4.$$

Un fondamentale risultato è stato ottenuto da Wien applicando la termodinamica e l'effetto Doppler e riguarda la densità specifica di energia:

$$[4bis] u_v(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T), \text{ dove } f \text{ è una funzione universale del rapporto } \nu/T.$$

(La dimostrazione della [4 bis] è molto laboriosa: vedi Becker, nota<sup>1</sup>)

Volendo dimostrare la [3] (o la [4]), abbiamo bisogno di un risultato sull'energia media di un oscillatore armonico in equilibrio termico a temperatura  $T$ .

Si sa che l'energia cinetica media di una molecola monoatomica, di una particella, cioè, avente tre gradi di libertà: per esempio le tre coordinate cartesiane o le tre coordinate sferiche necessarie per individuarne la posizione in un riferimento spaziale, è  $\bar{\epsilon}_c = \frac{3}{2} KT$ , essendo  $K$  la costante di Boltzmann<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Becker, "Teoria dell'elettricità", volume II, G) Teoria della radiazione nera, pag. 437 e seguenti, Sansoni 1950.

<sup>2</sup> Vedi, ad esempio, nel mio sito <http://digilander.libero.it/ottavioserra0>, cartella *Lezioni allo Scorza, Fisica 2010:1. Termodinamica e 2. Teoria cinetica e meccanica statistica e*, in *Articoli, Miscellanea: Appunti di termodinamica*.

(Per il principio di **equipartizione** a un grado di libertà compete l'energia cinetica media  $\frac{1}{2}KT$ ).

La densità dell'energia in un gas monoatomico sarà pertanto  $u = \frac{N\varepsilon_c}{V} = \frac{3}{2} \frac{NKT}{V} = \frac{3}{2} \frac{RT}{V} = \frac{3}{2} p$ , essendo N il numero di Avogadro, V il volume occupato da una mole, p la pressione del gas. Segue [5]  $p = \frac{2}{3}u$ . (All'equilibrio termico la pressione del gas è 2/3 della densità dell'energia  $u=u(T)$ ).

Le cose vanno diversamente per la pressione della radiazione, assimilabile, seguendo Planck, a un insieme di oscillatori armonici. Ciò perché un oscillatore ha energia potenziale, oltre che cinetica. Infatti, dall'equazione  $m\ddot{x} = -kx$ , si ottiene  $x=A\cos(\omega t)$  e  $v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t)$ , essendo  $\omega^2=k/m$ .

Segue  $\varepsilon_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t)$  e  $\varepsilon_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)$ .

Siccome  $\sin^2(\alpha)$  e  $\cos^2(\alpha)$  **in media sono uguali** e la loro somma è 1, il loro comune valore medio è 1/2. (Vedi le figure sottostanti: *le aree sottese dai due grafici sono uguali*. Naturalmente, il calcolo dei valori medi si può ottenere con due semplici integrali).

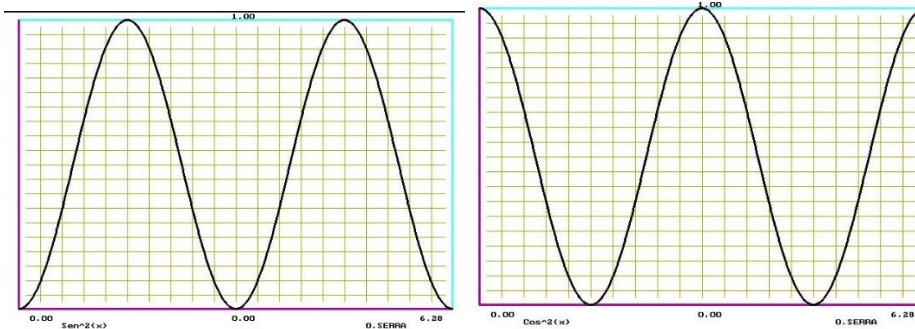


fig.1

Perciò l'energia di un oscillatore lineare, all'equilibrio termico, è  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_c + \bar{\varepsilon}_p = 2 \cdot \frac{3}{2}KT = 3KT$ .

Da ciò segue che la pressione di radiazione è

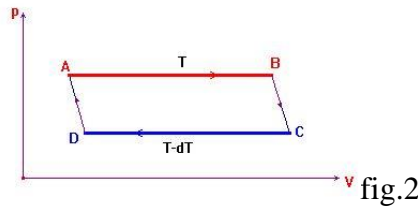
[6]  $p = \frac{1}{3}u$  ( $u=u(T)$  è funzione della sola temperatura).

**Notare che l'energia media per grado di libertà di un oscillatore lineare è KT. Ciò, però, come vedremo tra poco, non sarà vero in meccanica quantistica.**

Prima di dimostrare la legge di Boltzmann, proverò quella di Kirchhoff.

Se il potere emissivo del corpo nero dipendesse anche dalla natura del materiale di cui è rivestita la cavità la cui (*piccola*) apertura funge da corpo nero, potremmo costruire due corpi neri A e B con materiali diversi e metterli in un termostato a temperatura T. Se i due corpi neri avessero potere emissivo diverso per qualche frequenza  $\nu$ , per esempio  $E_\nu(\nu, T)_A > E_\nu(\nu, T)_B$ , si potrebbero mettere in contatto A e B inserendo tra di loro un filtro che lasci passare solo la radiazione di frequenza  $\nu$ ; in tal caso A, cedendo energia a B, si raffredderebbe e B si riscalderebbe, ma ciò è impossibile per il 2° principio della termodinamica, perché A e B sono inizialmente alla stessa temperatura.

## Dimostrazione della legge di Boltzmann.



Considero la radiazione racchiusa in una scatola e la sottopongo a un ciclo di Carnot ABCD (fig.2). Metto il recipiente a contatto con una sorgente a temperatura T e faccio aumentare il volume di un valore V da A a B (trasformazione isotermica). Si noti che, per T costante,  $u(T)$  è costante e lo è anche  $p=u/3$ , perciò l'isoterma è un segmento orizzontale e non un ramo di iperbole.

Il calore assorbito dalla radiazione è  $L+\Delta U=pV+uV$ . Aumento ora il volume di  $dV$  con un'espansione adiabatica infinitesima da B a C che abbassa la temperatura di  $dT$ , quindi metto il recipiente a contatto con una sorgente di calore a temperatura  $T-dT$ ; la pressione diventerà  $p-dp$  e comprimo isotericamente da C a D; infine porto il sistema allo stato iniziale A mediante la compressione adiabatica DC. Lungo le due adiabatiche il sistema compie lavori opposti, mentre, a meno di infinitesimi di ordine superiore, il lavoro (negativo) lungo CD è  $-V(p-dp)$ . Il lavoro complessivo è  $L=pV-(p-dp)V = Vdp$ .

Il rendimento (Vedi nota<sup>2</sup>) è perciò  $\frac{dT}{T} = \frac{L}{Q} = \frac{Vdp}{(p+u)V} = \frac{dp}{p+u} = \frac{du/3}{4u/3} = \frac{du}{4u} \Rightarrow u = \alpha T^4$  (c.d.d.)

### 2. Veniamo ora alla distribuzione statistica di Boltzmann.

Si abbia un recipiente di volume unitario ( $V=1$ ) e dividiamolo in  $g$  volumi  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ . Ci siano  $N_1$  particelle in  $\omega_1, \dots, N_g$  particelle in  $\omega_g$ , con  $N_1 + \dots + N_g = N$ , numero totale delle particelle. Siano poi  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g$  le energie medie delle particelle negli elementi di volume. Il numero dei modi in cui le  $N$  particelle si possono distribuire nei  $g$  elementi di volume è

$$D = \binom{N}{N_1} \cdot \binom{N-N_1}{N_2} \dots \binom{N-N_1-\dots-N_{g-1}}{N_g} = \frac{N!}{N_1! \dots N_g!}.$$

La distribuzione più probabile è quella per cui  $D$  è massima, con i vincoli  $\sum_{i=1}^g N_i = N, \sum_{i=1}^g N_i \varepsilon_i = W$

( $W$  = energia totale delle particelle).

Conviene trovare il massimo di  $\log(D)$ , utilizzando la formula di De Moivre:  $\log(N!) = N \cdot \log(N) - N$ , valida per  $N_i$  molto grande; nel nostro caso ogni  $N_i$  è immenso, dell'ordine del numero di Avogadro.

$$\left\{ \log(N!) = \sum_{j=1}^N \log(j) \approx \int_1^N \log(x) dx = N \cdot \log(N) - N + 1 \approx N \cdot \log(N) - N \right\} \text{ (De Moivre).}$$

Massimizzo  $\log(D)$  con i vincoli indicati usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$f(N_1 \dots N_i \dots N_k) = N \log(N) - \sum_{i=1}^g N_i \log(N_i) - \alpha \sum_{i=1}^g N_i - \beta \sum_{i=1}^g N_i \varepsilon_i. \text{ Imponendo } \frac{\partial f}{\partial N_i} = 0, \text{ si ha}$$

$-\log(N_i) - 1 - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$ , perciò la distribuzione più probabile è

$$[7] N_i = \gamma e^{-\beta \varepsilon_i}, \text{ essendo } \gamma \text{ un fattore di normalizzazione. Passando a una distribuzione conti-}$$

nua, si ottiene  $dN = \gamma \cdot e^{-\beta \varepsilon} d\varepsilon$ , numero di particelle aventi energia compresa tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$ , oppure

$$[8] dP = \gamma e^{-\beta \varepsilon} d\varepsilon: \text{ probabilità che una particella abbia energia compresa tra } \varepsilon \text{ e } \varepsilon + d\varepsilon.$$

$\beta$  è un parametro universale, cioè indipendente dal tipo di particelle, perciò basta trovarne il significato in un caso particolare per determinarlo. Ora, nel caso di una colonna d'aria isoterma il numero medio di molecole a quota  $z$  è  $N = N_0 e^{-\frac{mgz}{KT}}$ , dove  $mgz$  è l'energia potenziale di gravità di una molecola di massa  $m$ , (Vedi Teoria cinetica e meccanica statistica, pag. 4, in nota<sup>2</sup>; vedi anche<sup>3</sup>). Perciò

[9]  $\beta = \frac{1}{KT}$ ; la densità di probabilità è  $P = \gamma e^{-\frac{\varepsilon}{KT}}$ ;  $\gamma$  si determina imponendo che  $\int_0^{\infty} \gamma e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = 1$ , da

cui segue  $\gamma = 1 / \int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = 1 / \beta = KT$ .

$$\text{L'energia media di una particella sarà } \bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = \frac{-d}{d\beta} \log \left( \int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \right) = \frac{-d}{d\beta} \log \left( \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta} = KT,$$

d'accordo con quanto trovato in precedenza per un grado di libertà di un oscillatore lineare.

**Osservazione.** Nel caso in cui tutte le particelle hanno la stessa energia media, la loro distribuzione negli elementi di volume  $\omega_i$  ( $i=1, 2, \dots, g$ ), sarà  $D \cdot \omega_1^{N_1} \dots \omega_g^{N_g} = \frac{N!}{N_1! \dots N_g!} \omega_1^{N_1} \dots \omega_g^{N_g}$  e il suo valore massimo (il più probabile), si ottiene uguagliando a zero le sue derivate rispetto a  $N_j$  dell'espressione precedente o, in modo equivalente, del logaritmo, con il vincolo  $\sum_{i=1}^g N_i = N$ :

$$\frac{d}{dN_j} \left[ N \log N - N - \sum_{i=1}^g N_i (\log N_i - 1) + N_i \log \omega_i + \alpha \sum_{i=1}^g N_i \right] = 0, \text{ da cui si ottiene}$$

$-\log N_j + \log \omega_j + \alpha = 0$ , cioè  $N_j / \omega_j = e^\alpha$  (costante per tutti gli indici  $j$  da 1 a  $g$ ): **All'equilibrio termico le molecole di un gas si distribuiscono uniformemente nel recipiente, risultato conforme all'esperienza (in una bombola di gas densità e pressione sono le stesse in ogni punto).**

### 3. Potere emissivo del corpo nero fino a Planck.

Per calcolare  $E_v(\nu, T)$  o equivalentemente la densità di energia  $u_v(\nu, T)$ , occorre contare il numero degli stati possibili nell'intervallo di frequenza  $[\nu, \nu + d\nu]$ , cioè il numero dei treni d'onda monocromatici stazionari in una cavità.<sup>4</sup> Su un segmento lungo  $a$  si formano onde stazionarie se  $a = n\lambda/2$  (gli estremi debbono essere nodi). In una scatola cubica di spigolo  $a$ , con pareti riflettenti, si formano onde stazionarie monocromatiche se  $l.a = n_1\lambda/2$ ,  $m.a = n_2\lambda/2$ ,  $n.a = n_3\lambda/2$ , essendo  $(l, m, n)$  il versore di un treno d'onda (perciò  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ).

Segue che  $a^2 = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \lambda^2 / 4$ , quindi

$$[10] \nu = \frac{c}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (c \text{ velocità della luce}).$$

<sup>3</sup> Fleury e Mathieu, "Trattato di fisica generale e sperimentale, vol. 2°: Calore, ecc. pag. 216 e seg. Zanichelli 1964.

<sup>4</sup> Tolansky, "Introduzione alla fisica atomica", pag. 122, Einaudi 1950.

Si consideri ora un riferimento cartesiano di assi  $x=n_1c/(2a)$ ,  $y=n_2c/(2a)$ ,  $z=n_3c/(2a)$ . La distanza di un punto dall'origine rappresenta la frequenza  $\nu$ . Il numero totale  $dg$  degli stati (delle onde stazionarie) tali che  $\nu < \frac{c}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} < \nu + d\nu$  è 1/8 del volume dello strato sferico compreso tra i raggi  $\nu$  e  $\nu+d\nu$  (l'ottante positivo della sfera). Il volume del reticolo cubico elementare corrispondente a una vibrazione si ha per  $n_1=n_2=n_3=1$  e quindi vale  $(c/2a)^3$ ; perciò

$$dg = \frac{1}{8} \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{\left(\frac{c}{2a}\right)^3} = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3} a^3 \text{ e in un volume unitario (a=1) } dg = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3}. \text{ Siccome però la radiazione elettromagnetica è trasversale, per ogni onda ci sono due gradi di libertà corrispondenti a due direzioni ortogonali di polarizzazione, perciò } dg \text{ va raddoppiato (Rayleigh e Jeans):}$$

$$[11] dg_\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}. \text{ Ho messo l'indice } \nu \text{ a } dg \text{ per ricordare che esso dipende dalla frequenza.}$$

A questo punto la densità specifica dell'energia in una cavità a temperatura  $T$  sarà

$$[12] u_\nu(\nu, T) d\nu = dg_\nu \bar{\varepsilon} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon} d\nu \text{ e, analogamente, } E_\nu(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \bar{\varepsilon} d\nu.$$

Se si sostituisce  $\bar{\varepsilon}$  col valore (classico) precedentemente trovato  $KT$ , si ottiene la formula di Rayleigh e Jeans,

$$[12bis] u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} KT, \text{ chiaramente scorretta, perché conduce al risultato assurdo che la densità dell'energia è infinita a tutte le temperature } T > 0^\circ K \text{ (catastrofe dell'ultravioletto).}$$

L'idea di Planck è stata di considerare l'emissione di energia un fenomeno non continuo, ma discreto, per quantità (**quanti**) multipli di un minimo  $\varepsilon_0$ . Il valor medio di  $\varepsilon$  va quindi calcolato con una serie e non con un integrale:

$$[13] \bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \log\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}\right) = -\frac{d}{d\beta} \log\frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{d}{d\beta} \log(1-e^{-\beta\varepsilon_0}) = \frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1}$$

essendo  $\beta=1/(KT)$ . Pertanto il potere emissivo del corpo nero sarà

$$[14] E_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{KT}} - 1}. \text{ Dovendo però valere la legge di Wien [4bis], si deve porre } \varepsilon_0=h\nu.$$

Planck chiamò  $h$  *quanto elementare di azione*, ora detto **costante di Planck**. Si ottiene così la legge di Planck, in mirabile accordo con i dati sperimentali, anche se non soddisfacente sul piano teorico:

$$[15] E_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \text{ e analogamente}$$

$$[15bis] u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}.$$

Dalla [15] si ricava, integrando su tutte le frequenze, la legge di Boltzmann  $\sigma T^4$ ; derivando rispetto alla frequenza si ricava anche la famosa legge dello "spostamento" di Wien  $\frac{V_{MaxPotereEmissivo}}{T} = \mu$  (for-

mula usata in astrofisica per ricavare le temperature stellari) e altro ancora<sup>5</sup>. Le costanti  $\sigma$  e  $\mu$  si possono ora esprimere teoricamente in funzione delle costanti universali  $c$ ,  $K$ ,  $h$ ; perciò una misura simultanea di  $\sigma$  e  $\mu$  consente di determinare la costante di Planck  $h$  e la costante di Boltzmann  $K$ . Da  $K$  si deduce il numero di Avogadro  $N$  e, dalla carica di Faraday  $F=96500$  Coulomb, la carica elementare  $e=F/N$ . Ricordo che i valori di  $N$  e di  $e$  dedotti dalla legge di Planck restarono i più precisi fino alle successive misurazioni della carica dell'elettrone per opera di Millikan e del numero di Avogadro, determinato da Jean Perrin utilizzando il lavoro di Einstein (sempre lui!) del 1905 sul moto browniano.

#### 4. Il contributo di Einstein del 1917.

Il procedimento di Planck è insoddisfacente, sul piano teorico, per diversi motivi. L'introduzione di quanti discreti di energia  $h\nu$  richiede che l'oscillatore possa scambiare energia con la radiazione solo per quantità discrete  $\varepsilon$ ,  $2\varepsilon$ ,  $3\varepsilon$ , ..., mentre nel calcolo dei modi di vibrazione degli oscillatori in una cavità (formula [11] di Rayleigh e Jeans) si fa uso di uno scambio continuo di energia.

Einstein già nel 1905 aveva avanzato l'ipotesi che il campo di radiazione è costituito di quanti di luce indivisibili e che la quantizzazione non è limitato ai soli fenomeni di emissione e assorbimento, ma riguarda anche la propagazione. Estende alla radiazione elettromagnetica l'atomismo della materia e con questa idea nel 1905 raggiunge un grande risultato con la spiegazione dell'effetto fotoelettrico. Intanto Rutherford aveva introdotto, per stringenti motivi sperimentali, il modello planetario dell'atomo (1909), anche se non riusciva a giustificarne la stabilità. Bohr (1913) utilizzò i quanti di luce di Einstein e il modello di Rutherford, aggiungendo il postulato, rivoluzionario per quel tempo e, in verità, arbitrario, che l'atomo abbia livelli energetici quantizzati; un quanto, emesso o assorbito, ha frequenza  $\nu$  pari alla differenza tra le energie dei due livelli divisa per  $h$ :  $\nu=|\varepsilon_n - \varepsilon_m|/h$ . Spiegò così la stabilità degli atomi e gli spettri di emissione e di assorbimento<sup>6</sup>; vedi anche nota<sup>4</sup>.

Il lavoro di Einstein del 1917 fu al solito di vasta portata. Egli affronta il seguente problema: in una cavità in equilibrio termico ci sia un gran numero di atomi della stessa specie, per esempio atomi di idrogeno; di questi  $N_1$  abbiano energia  $\varepsilon_1$ ,  $N_2$  energia  $\varepsilon_2$ , eccetera. Considera due soli livelli di energia, livello 1 che chiamo fondamentale e livello 2 che chiamo eccitato, con  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . L'atomo scambia energia con la radiazione assorbendo un quando  $h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$  nel passaggio dallo stato fondamentale 1 a quello eccitato 2 ed emettendo un quanto di uguale frequenza diseccitandosi. All'equilibrio i due processi devono verificarsi con **uguale probabilità**.

All'equilibrio termico il rapporto tra il numero degli atomi nello stato 2 e quello degli atomi nello stato 1 è dato dalla legge di distribuzione di Boltzmann:

$$[16] \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 e^{-\beta\varepsilon_2}}{g_1 e^{-\beta\varepsilon_1}}, \text{ essendo } g_1 \text{ (} g_2 \text{) il } \textit{peso statistico} \text{ del livello fondamentale (del livello eccitato),}$$

cioè il numero dei sottolivelli in cui si dividerebbe il livello energetico togliendo ogni degenerazione, per esempio applicando un campo magnetico come accade nell'effetto Zeeman. ( $\beta = 1/KT$ ).

Einstein ipotizza che il numero dei processi di assorbimento nel tempo  $dt$  sia

$$[17] N_A \cdot dt = B_{1,2} N_1 u_\nu dt, \text{ formula molto plausibile e dal significato trasparente.}$$

Il processo di emissione può invece avvenire in due modi: emissione spontanea  $A_{2,1} N_2 dt$  ed emissione **stimolata**, indotta dal campo di radiazione,  $B_{2,1} N_2 u_\nu dt$ . In tutto

<sup>5</sup> <http://digilander.libero.it/ottavioserra0>, Articoli, Annuario del Liceo scientifico Scorza: Teoria dei quanti.

<sup>6</sup> Vedi articolo in nota 5.

$$[18] N \frac{d}{dt} = (A_{2,1}N_2 + B_{2,1}N_2 u_\nu) dt.$$

All'equilibrio dovrà aversi  $N_A = N_E$  e quindi

$$[19] B_{1,2} u_\nu = (N_2/N_1) \cdot (A_{2,1} + B_{2,1} u_\nu). \text{ Si ricava così } u_\nu \text{ tenendo conto della [16]:}$$

$$[20] u_\nu = \frac{A_{2,1}}{B_{1,2} \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT}} - B_{2,1}} = \frac{A_{2,1}}{B_{1,2} \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{2,1}}.$$

Ora, per  $T$  tendente all'infinito anche  $u_\nu$  deve tendere all'infinito e, siccome in tal caso l'esponenziale tende a uno, dovrà essere  $B_{1,2}(g_1/g_2) = B_{2,1}$ . Einstein conclude perciò che

$$[21] u_\nu = \frac{A_{2,1}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Osservando che, per  $h\nu \ll kT$  la [21] deve coincidere con la legge classica [12bis] di Rayleigh e Jeans, si deve imporre

$$[22] \frac{A_{2,1}}{B_{2,1}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}. \text{ La [21] coinciderà così con la legge di Planck.}$$

Ciò che è notevole nel procedimento di Einstein è

- La [22] è una relazione assolutamente generale tra i coefficienti di emissione spontanea e di emissione stimolata.
- Viene introdotto un punto di vista esplicitamente **probabilistico** nei processi di emissione e di assorbimento; nel caso, infatti, dell'emissione spontanea in campo di radiazione nullo la formula  $dN_2 = -A_{2,1}N_2 dt$  è identica a quella di Rutherford per la disintegrazione radioattiva, squisitamente statistica. (L'inverso di  $A_{2,1}$  è la vita media dello stato eccitato).
- Se i pesi statistici  $g_1$  e  $g_2$  dei due stati sono uguali, i coefficienti di assorbimento (indotto dalla radiazione)  $B_{1,2}$  e quello di emissione stimolata dalla radiazione  $B_{2,1}$  sono uguali. L'uguaglianza di questi coefficienti, in generale dei coefficienti di transizione  $B_{n,m}$  e  $B_{m,n}$  tra due generici livelli portò Heisenberg, otto anni dopo, alla descrizione dei processi atomici mediante matrici simmetriche (in generale coniugate hermitiane), cioè alla prima formulazione della meccanica quantistica nota, appunto, come *meccanica delle matrici*.
- *L'idea di emissione stimolata condusse dopo 40 anni all'invenzione del laser (Light amplification **stimulated** (by) emission (of) radiation).*

## 5. La statistica di Bose-Einstein e i bosoni.

Nel periodo che va dal 1917 al 1924 la fama di Einstein crebbe in modo incredibile, specialmente dopo che il grande astronomo Eddington sponsorizzò la relatività generale e nell'eclissi di Sole del 1919 verificò la deflessione dei raggi di luce prevista da questa teoria<sup>7</sup>.

Nel 1923 Arthur Compton verificò la natura corpuscolare dei quanti di luce (fotoni) misurandone energia e quantità di moto nella diffusione di raggi X da parte degli elettroni di un cristallo. Nel 1924 Louis de Broglie, mediante considerazioni relativistiche, avanzò l'ipotesi che ad ogni particella è associata un'onda  $\lambda = h/p$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda,  $h$  la costante di Planck e  $p$  il momento lineare (quantità di moto) della particella. Nello stesso anno il fisico indiano Nath Bose

<sup>7</sup> <http://digilander.libero.it/ottavioserra0> Articoli, Annuario del Liceo Scientifico Scorza: *Teoria della Relatività* e in Miscellanea: *Per il centenario della Relatività generale*.

mandò a Einstein un lavoro in cui presentava una nuova statistica alla quale avrebbero dovuto obbedire particelle indistinguibili in linea di principio, come fotoni o elettroni. Einstein colse subito l'importanza del lavoro di Bose, lo tradusse in tedesco e lo fece pubblicare sugli *Annalen der Physik*. La statistica, ora detta di **Bose-Einstein**, condusse in modo naturale alla legge di Planck, dimostrando che ad essa dovevano obbedire i fotoni, ma non risultò applicabile agli elettroni, che pur essendo indistinguibili, obbediscono a un'altra statistica, sviluppata da Fermi e da questi applicata alla teoria dei metalli. Infine, tra il 1928 e il 1930 Dirac in una serie di fondamentali lavori, tra cui la teoria quantistico-relativistica dell'elettrone, chiarì il profondo legame tra spin e statistica; perciò ora la statistica degli elettroni è detta di **Fermi-Dirac**. Le particelle di spin semi-intero (elettroni, protoni, neutroni) obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac e sono dette **fermioni**; tale statistica spiega anche perché gli elettroni obbediscano al principio di esclusione di Pauli.

Invece le particelle di spin intero (fotoni: spin 1, particelle  $\alpha$  e pioni: spin zero) obbediscono alla statistica di Bose-Einstein e sono dette **bosoni**.

**N.B.** Una statistica è un modo di contare degli oggetti.

Per esempio, se ho due particelle identiche e due **celle** (due **stati**) I e II, nell'ipotesi che le particelle siano distinguibili, almeno in linea di principio, per esempio due dadi, due monete, due molecole di idrogeno. ma anche due elettroni o due fotoni purché abbastanza lontani tra loro, posso etichettarle come a e b; avrei allora I(a,b) e II(0) oppure I(0) e II(a,b) oppure I(a) e II(b) oppure I(b) e II(a); perciò la probabilità di I(a,b) e II(0), cioè entrambe le particelle nella stessa cella I (nello stesso stato I), è 1/4.

Se invece le due particelle fossero indistinguibili, potrei avere I(2) e II(0) oppure I(0) e II(2) oppure I(1) e II(1); perciò la probabilità di I(2) e II(0), cioè entrambe le particelle nello stato I, è 1/3.

Che succederebbe se le due particelle, oltre che indistinguibili, fossero anche incompatibili, obbedissero cioè al principio di esclusione di Pauli? (fossero fermioni?).

### Conteggio degli stati.

L'enumerazione degli stati si può fare utilizzando considerazioni elementari di meccanica quantistica (onde di de Broglie e principio di indeterminazione di Heisenberg); essa conduce allo stesso risultato ottenuto da Rayleigh e Jeans applicando l'ottica ondulatoria classica: formula [11].

Vediamo come.

Se una particella è vincolata a stare su un segmento di lunghezza a, l'onda stazionaria di de Broglie associata deve annullarsi agli estremi e quindi  $a=k\lambda/2$ , dove k è un numero naturale  $>0$ . Perciò la quantità di moto p è quantizzata:  $p=kh/(2a)$ . Il numero g degli stati possibili è chiaramente k:  $g=k=(2a/h)p$ .

Siccome  $h/a$  è estremamente piccolo (se  $a=1\text{micron}$ ,  $h/a=6.10^{-28}$ ), la distribuzione di p si può considerare continua e perciò ha senso passare ai differenziali:  $dg=(2a/h)dp$ .

L'indeterminazione su p è  $\Delta p=h/a$ .

Nel caso tridimensionale, avremo  $\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z=h^3/(abc)=h^3/V$ . Punti rappresentativi che cadono in questo "volumetto" nello spazio dei momenti sono indistinguibili. Il numero di stati distinti tra p e  $p+\Delta p$  è perciò

$$[23] \Delta g=4\pi p^2 \Delta p/(h^3/V)=4\pi p^2 V \cdot \Delta p/h^3 \text{ e } [23\text{bis}] dg=4\pi p^2 V/h^3 \cdot dp.$$

Le celle corrispondenti a uno stesso valore dell'impulso p (o dell'energia  $\epsilon$ :  $\epsilon=p^2/(2m)$ ), rappresentano stati degeneri. Per esempio, in un atomo lo stato di un elettrone è descritto dai quattro numeri quantici (n,l,m,s), ma l'energia dipende solo da n, l ed s ( $n=1,2,\dots$ ;  $l=0,1,\dots,n-1$ ;  $m=-1\dots 0\dots l$ ; lo spin  $s=\mp \frac{1}{2}$ ). L'effetto dello spin è particolarmente evidente nello spettro degli alcalini (avendo un solo



elettrone di valenza), per esempio nel **doppietto** giallo del sodio (la molteplicità dello spin è  $2s+1=2$ ); l'energia non dipende, invece, da  $m$ , che assume  $2l+1$  valori; lo stato è perciò  $2l+1$  volte degenero. Però la degenerazione si toglie applicando un campo magnetico non omogeneo (effetto Zeeman) e gli stati con quanto magnetico  $m$  diverso si considerano distinti.

**Contiamo ora le distribuzioni di  $n$  particelle in  $g$  celle<sup>8</sup>.**

Siano  $C_1, C_2, \dots, C_g$  le celle,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  le particelle. Un esempio di distribuzione è  $C_1x_1x_2C_2C_3x_3x_4x_5\dots$  ( $C_1$  contiene due particelle,  $C_2$  è vuota, eccetera).

La prima cella si può scegliere in  $g$  modi diversi; a tale scelta si devono associare le permutazioni di tutti gli oggetti rimanenti; ottengo  $g!(g-1+n)!$  Una permutazione delle  $g$  celle in blocco con il loro contenuto non produce effetti (equivale a numerare diversamente le celle), perciò ottengo

$$[24] D = \frac{g(g-1+n)!}{g!} = \frac{(g-1+n)!}{(g-1)!}$$

La [24] darebbe tutte le distribuzioni se le particelle fossero distinguibili e perciò dovrebbe condurre alla distribuzione classica di Boltzmann (statistica di Maxwell-Boltzmann).

In realtà le permutazioni delle particelle all'interno di ciascuna cella sono considerate ininfluenti e l'esperienza conferma, perciò la distribuzione di Maxwell-Boltzmann è

$$[25] D_{MB} = g^n \text{ (Disposizioni con ripetizione di } g \text{ oggetti di classe } n \text{).}$$

Se le particelle sono indistinguibili, una permutazione di tutte le  $n$  particelle è ininfluenta e perciò

$$[26] D_{BE} = \frac{(g-1+n)!}{(g-1)!n!} \text{ . Distribuzione di Bose-Einstein. (N.B. } D_{BE} \text{ è uguale al numero di combina-}$$

zioni con ripetizione di  $g$  oggetti di classe  $n$ ).

Per completezza darò la distribuzione di Fermi-Dirac. Si tratta di enumerare le sequenze del tipo  $C_1(1)C_2(1)C_3(0)C_4(0)C_5(0)C_6(1)\dots$ . Siccome uno scambio delle celle è fisicamente ininfluento, le distribuzioni sono le combinazioni semplici di  $g$  oggetti di classe  $n$  :

$$[27] D_{FD} = \binom{g}{n} = \frac{g!}{(g-n)!n!} \text{ .}$$

**Indichiamo** ora con  $\varepsilon_i$  l'energia delle  $n_i$  particelle nella cella (stato)  $g_i, i=1, 2, 3, \dots$ . La probabilità della configurazione (macro stato) corrispondente a queste distribuzioni è proporzionale al prodotto di queste distribuzioni microscopiche (microstati):

$P \propto \prod_i D_i$ . La configurazione più probabile all'equilibrio termodinamico è quella per cui  $P$  o

$\log(P)$  è massimo, con i soliti vincoli  $\sum_i n_i = n, \sum_i n_i \varepsilon_i = W$ .

**Eseguo ora il calcolo per la statistica BE [26]**, introduco la formula di De Moivre e trascuro addendi la cui derivata rispetto a  $n_i$  è 0 o 1 (al solito  $\alpha$  e  $\beta$  sono i moltiplicatori di Lagrange):

$$\sum_i \left[ \log \frac{(g_i-1+n_i)!}{(g_i-1)!n_i!} - \alpha n_i - \beta n_i \varepsilon_i \right] = \sum_i [(g_i-1+n_i) \log(g_i-1+n_i) - n_i \log(n_i) - \alpha n_i - \beta n_i \varepsilon_i]$$

Uguagliando a 0 la derivata rispetto a  $n_i$  ho

---

<sup>8</sup> Fleury e Mathieu, "Fisica general" (Vedi nota 3), volume 8°: *Statistiche quantistiche*. Vedi anche <http://digilander.libero.it/ottavioserra0>, Articoli, Annuario del Liceo scientifico Scorza: *Fermi nel centenario della nascita*.

$\log(g_i - 1 + n_i) + 1 - \log(n_i) - 1 - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$ , dalla quale segue

$$[28] n_i = \frac{g_i - 1}{e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} - 1} \approx \frac{g_i}{e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} - 1} \quad (\text{perché } g_i \gg 1). \quad \text{Statistica di Bose-Einstein.}$$

Procedendo allo stesso modo sulla [27] si ottiene la:

$$[29] n_i = \frac{g_i - 1}{e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} + 1} \approx \frac{g_i}{e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} + 1}. \quad \text{Statistica di Fermi-Dirac.}$$

(Sia nella [28] che nella [29] la termodinamica assegna a  $\beta$  il valore  $1/KT$ ).

Si noti che, se  $\alpha$  è grande, 1 è trascurabile rispetto all'esponenziale e le due statistiche convergono alla statistica di Maxwell-Boltzmann:

$$[30] n_i = e^{-\alpha} g_i e^{-\beta \varepsilon_i}, \quad \text{valida per un gas di molecole a temperatura ambiente (Vedi Fleury in nota<sup>8</sup>).$$

**Per ricavare la legge di Planck** con la statistica [28] di BE, occorre esprimere la [23bis]  $dg = 4\pi p^2 V / h^3 dp$  in funzione della frequenza:  $dg = 4\pi (h\nu/c)^2 (V/h^3) \cdot h d\nu / c = (4\pi \nu^2 / c^3) V d\nu$ .

Inoltre, come nella teoria classica, occorre tener conto dei due stati di polarizzazione indipendenti,

per cui  $dg = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} V d\nu$ . In più nella [28]  $\alpha$  va posta uguale a zero, perché il numero dei fotoni non è

costante, essi sono continuamente creati e distrutti; infine, passando al differenziale, la [28] diventa

$$[28bis] dn = \frac{dg}{e^{\beta \varepsilon} - 1} = \frac{dg}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}. \quad \text{Otteniamo così}$$

$$[31] u_\nu(\nu, T) d\nu = dn \cdot h\nu / V = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} d\nu.$$

Si ritrova così la legge di Planck.

### Approfondimenti:

**Per la statistica di Fermi-Dirac** e l'applicazione alla teoria dei metalli, si consulti<sup>9</sup>.

**Per la statistica delle particelle indistinguibili**, in particolare dei fermioni, si vedano, oltre al testo precedente di Fleury e Mathieu in nota<sup>9</sup>, i testi di Persico e di Landau-Lifshic<sup>10</sup>.

**A un livello più avanzato**, per lo studio delle statistiche quantistiche, per la previsione dell'anti-materia e dello spin dell'elettrone come conseguenze della covarianza relativistica si veda<sup>11</sup>.

**Sull'importanza della matematica** come strumento predittivo delle leggi naturali e sulla sua *bellezza come metodo di ricerca*, si veda<sup>12</sup>.

<sup>9</sup> Fleury e Mathieu: "Fisica generale", Volume 8°, già citato in nota<sup>3</sup> e in nota<sup>8</sup>.

<sup>10</sup> Enrico Persico: "Fondamenti della meccanica atomica", Zanichelli 1939; parte III, cap. V (Relatività e spin: teoria quantistica relativistica dell'elettrone di Dirac e previsione dell'esistenza del **positrone**, prima particella di anti-materia) e cap. VI (Sistemi con particelle uguali: statistiche B-E e F-D).

Landau e Lifshic: "Meccanica quantistica", Boringhieri 1969, cap. 9 (Particelle identiche): viene mostrato, tra l'altro, come dalla proprietà di anti-simmetria dei fermioni discenda il principio di esclusione di Pauli).

<sup>11</sup> Paul Dirac: "I principi della meccanica quantistica", Boringhieri 1958.

<sup>12</sup> D'Agostino: "Dirac: la ragionevole potenza della matematica", in Atti del XXI congresso SISFA, Cosenza 2001.

Paul Dirac: "La bellezza come metodo", Indiana Editore 2013 e la bella prefazione di Vincenzo Barone: *L'anima pura della fisica*.