Ottavio Serra

Suddivisione di uno spazio euclideo mediante iperpiani

Questo articolo fu pubblicato nel 1974 sui "Quaderni della Mathesis" di Cosenza anno II n°3.

Qui viene ripresentato con alcune correzioni.

In questo lavoro tratterò il seguente problema: Dato lo spazio euclideo reale $\boldsymbol{R}^k$, determinare il numero massimo di regioni in cui n suoi iperpiani lo suddividono. Tratterò dapprima i casi particolari per k=1, 2, 3 (retta, piano, spazio tridimensionale), per passare poi al caso generale.

a) Nozioni introduttive.

Conviene preliminarmente ricordare alcuni concetti.

Lo spazio euclideo $\boldsymbol{R}^k$ è lo spazio vettoriale delle k^{ple} ordinate di numeri reali $(x_1, x_2, \dots x_k\ x_k\ x_k)$ con il vettore *nullo* O(0, 0, … 0) come punto *origine*. Come è noto, lo spazio vettoriale $\boldsymbol{R}^k$ ha struttura di gruppo abeliano rispetto all'operazione di addizione:

$(x_1, x_2, \dots x_k)+(y_1, y_2, \dots y_k) = (x_1+y_1, \dots x_k+y_k)$

e struttura distributiva rispetto alla *moltiplicazione per un numero reale (detto, in tale contesto, fattore scalare)*, secondo la definizione $a.(x_1, x_2, \dots x_k)= (ax_1, ax_2, \dots ax_k)$, valendo la proprietà distributiva sia rispetto alla somma di vettori, sia rispetto alla somma di scalari.

Indicheremo i punti di $\boldsymbol{R}^k$ (i vettori del corrispondente spazio vettoriale) con lettere maiuscole. Dati n punti (vettori) di $\boldsymbol{R}^k$: $A_1, \dots A_{n'}$ essi si dicono linearmente indipendenti se una loro *combinazione lineare* $\sum_{i=1}^{n} t_i.A_i = 0$ se e solo se i coefficienti scalari (numeri reali) t_i sono tutti nulli. Se esiste una combinazione lineare uguale a zero con coefficienti non tutti nulli, gli n vettori si dicono linearmente dipendenti.

Si chiama **varietà lineare** L^n di dimensione n l'insieme dei punti $L^n = A + \sum_{i=1}^{n} t_i B_i$ al variare degli scalari t_i, essendo gli n punti B_i linearmente indipendenti. L'insieme $S = \sum_{i=1}^{n} t_i B_i$ è un sottospazio di $\boldsymbol{R}^k$ e si chiama ***sottospazio direttore*** della varietà lineare L^n. E' chiaro che un sottospazio di $\boldsymbol{R}^k$ è una varietà lineare (il punto A gli appartiene). La dimensione del sottospazio direttore è per definizione la dimensione della varietà lineare.

Definizione. Due varietà lineari di $\boldsymbol{R}^k$, $L_1^n=A_1+S_1^n$ e $L_2^m=A_2+S_2^m$ di dimensione, rispettivamente, n ed m, si dicono paralle se il sottospazio direttore S_1^n della prima è contenuto nel sottospazio direttore S_2^m della seconda, o viceversa.

Si noti che se P è combinazione lineare dei B_i: $P = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i$, gli n coefficienti a_i sono unici. Se infatti fosse anche $P = \sum_{i=1}^{n} c_i B_i$, sottraendo membro a membro, avremmo: $0 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i) B_i$ e perciò $c_i=a_i$ per i da 1 ad n, data l'indipendenza lineare dei B_i.

Se A è combinazione lineare dei B_i, la varietà lineare L^n contiene il punto O(0, 0, … 0) e pertanto assume la struttura di spazio vettoriale (di dimensione n); esso è detto sottospazio di $\boldsymbol{R}^k$.

Si noti che L^0 contiene un solo punto e perciò si può identificare con esso. Le L^1 le chiameremo rette, le L^2 piani, le L^{k-1} iperpiani[1]. L^k va ovviamente identificata con $\boldsymbol{R}^k$.
Una varietà lineare L^1 (una retta) è individuata da due punti distinti, un piano da tre punti distinti di cui due linearmente indipendenti, il ché significa che i tre punti non devono appartenere a una stessa retta, e così via; una varietà lineare L^n è individuata da n+1 punti distinti, di cui n linearmente indipendenti.
Esempi: la retta per i punti A e B è l'insieme dei punti P tali che P=A+t(A-B), il piano per i punti A, B, C è l'insieme dei punti P=A+b.(B-A)+c.(C-A), eccetera.
Come è noto, in $\boldsymbol{R}^k$ valgono le solite *proprietà euclidee*. Ricordo quelle che qui più ci interessano.
1° Per due punti distinti passa una e una sola retta. Infatti, sia A+t(B-A) la retta determinata dai punti A e B; siano poi C=A+c(B-A) e D=A+d(B-A) due punti della retta ottenuti in corrispondenza dei dei valori c, d del parametro t; dico che la retta C+u(D-C), al variare di u in $\boldsymbol{R}$, coincide con la precedente, cioè che ogni punto P della prima si può ottenere dall'equazione della seconda e viceversa per un conveniente valore di u. Basta uguagliare le due espressioni:
A+t(B-A)=C+u(D-C)=[A+c(B-A)]+u[(d-c)(B-A)]; si ricava t=c+(d-c)u e questa è una corrispondenza biunivoca tra i parametri reali u e t.
Analogamente si dimostra che per tre punti non appartenenti a una retta passa uno e un solo piano, eccetera: n+1 punti non appartenenti a una stessa varietà lineare L^{n-1} determinano una e una sola varietà lineare L^n.
2° Dati un punto P e una retta r={A+tB}, esiste una e una sola retta s per P tale che s=r oppure $r \cap$ s =∅. La retta s si dice "parallela ad r.
La retta s è {P+tB; se infatti r ed s avessero un punto comune, esisterebbero due valori del parametro t, diciamo a e b, tali che A+aB=P+bB; in tal caso P=A+(a-b)B e perciò s=r. Rette siffatte, aventi lo stesso vettore *direttore* B, si dicono parallele. Se P non appartiene ad r, le rette parallele r ed s sono distinte e giacciono nel piano ABP.
3° Due rette distinte hanno al più un punto comune. Sia r=A+tB ed s=C+tD. Se D=B, nel qual caso C$\neq A$, le rette sono parallele distinte e non hanno punti comuni; se D$\neq B, allora\ o\ C = A\ e$ in tal caso A è l'unico punto comune, oppure C$\neq A$:in questo caso considero i vettori A-C e D-B ; se essi sono linearmente dipendenti, esiste uno e un solo valore a di t per cui A-C=a(D-B), da cui segue A+aB=C+aD e il teorema è provato; se invece sono linearmente indipendenti, o i quattro punti A B C D sono non appartengono a una stessa varietà lineare bidimensionale e le due rette non hanno punti comuni, o vi appartengono: in questo caso esistono due ben determinati valori t_1 e t_2 di t per cui si ha A=C+t_1B+t_2D e le due rette hanno in comune l'unico punto a-t_1B=C+t_2D: il teorema è provato.
4° Due iperpiani distinti o non hanno punti comuni (sono paralleli) o si intersecano in una varietà L^{k-2}.
Sia $P = A + \sum_{i=1}^{k-1} t_i B_i$ un iperpiano.
Introduciamo le coordinate P=(x_1,… ,x_k), $A = \left(x_1^0, ..., x_k^0\right)$, $B_i = \left(x_1^i, ..., x_k^i\right)$, si ottengono le k equazioni parametriche dell'iperpiano:
[1] $x_j = x_j^0 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i x_i^j$ (j=1,…,k).
Eliminando i k-1 parametri t_i dalle [1] si ottiene l'equazine *cartesiana* dell'iperpiano:

[1] Per uno spazio V di dimensione infinita, un iperpiano α è il complementare di una retta r, nel senso che lo spazio deve risultare somma *diretta* di α e di r: V=α+r e α∩ $r = \{P\}$ ($un\ punto$: $variet\grave{a}lieare\ di\ dimensione$ 0).

[2] $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = c.$

Siano dati allora due iperpiani distinti

[3] $\sum_{j=1}^{k} a_{1j} x_j = c_1$ e $\sum_{j=1}^{k} a_{2j} x_j = c_2$. Deve esserci almeno un valore i di j tale che $a_{1i}/a_{2i} \neq c_1/c_2$, altrimenti i due iperpiani coinciderebbero, contro l'ipotesi che siano distinti. Perciò la matrice completa del sistema [3]: $\begin{pmatrix} a_{11},...,a_{1i},...,a_{1k,}c_1 \\ a_{21},...,a_{2i},...,a_{2k,}c_2 \end{pmatrix}$, deve avere rango 2. Se, allora, la matrice dei soli coefficienti

$\begin{pmatrix} a_{11},...,a_{1i},...,a_{1k} \\ a_{21},...,a_{2i},...,a_{2k} \end{pmatrix}$ha rango 1, il sistema è incompatibile(Teorema di Rouché-Capelli) e i due iperpiani sono paralleli; se invece ha rango 2, il sistema è risolubile con k-2 gradi di libertà, cioè ammette ∞^{k-2} soluzioni (numero delle colonne meno numero delle righe); pertanto l'intersezione è una varietà L^{k-2}, come si doveva dimostrare.

5° Dal teorema precedente discende che, se L_1^{m-1} e L_2^{m-1} sono due varietà lineari distinte contenute nella stessa varietà L^m, la loro intersezione o è vuota o è una varietà L^{m-2}.

Alcuni esempi.

1° Considero in $\boldsymbol{R}^4$ i due piani $L_1^2=\{x_1=0, x_2=0\}$ e $L_2^2=\{x_3=0, x_4=0\}$; siccome non esiste alcuna varietà lineare L^3 (di dimensione 3: iperpiano) che le contenga entrambe, la loro intersezione non è né vuota né una varietà lineare di dimensione 1 (una retta); infatti la loro intersezione è un punto (varietà lineare di dimensione 0): {(0; 0; 0; 0)}.

2° Invece i due piani $\{x_4=0, x_2=0\}$, $\{x_3=0, x_2=0\}$ sono contenuti nello stesso iperpiano $=\{x_2=0\}$, ed avendo un punto comune (l'origine), si intersecano lungo una retta per O di equazione $x_2=x_3=x_4=0$.

3° Verificare che i due piani di $\boldsymbol{R}^4$ $L_1^2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $L_2^2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

che non sono paralleli e non sono contenuti nello steso iperpiano L^3, hanno in comune l'unico punto P(a,b,g,h).

Come corollario dei teoremi 4° e 5° discende che una retta e una varietà lineare di $\boldsymbol{R}^k$ hanno al più un punto comune.

Introduco ora il concetto di **segmento** di estremi A e B.

Per definizione esso è l'insieme dei punti {P=A+t(B-A)}, $0 \leq t \leq 1$.

Preso allora un iperpiano di $\boldsymbol{R}^k$ che, senza scapito di generalità, posso assumere sia quello di equazione $x_1=0$, comunque si prendano due punti A e B, tali che le prime coordinate di A e di B siano discordi (per esempio -a e b, con A e B >0), il segmento AB interseca l'iperpiano in un punto.

Posto, infatti, $A(-a, y_2, \dots, y_k)$ e $B(b, z_2, \dots, z_k)$, l'intersezione è il punto del segmento del tipo $S= (-a+t(b+a), y_2+t(z_2-y_2), \dots, y_k+t(z_k-y_k))$. Siccome S deve appartenere all'iperpiano di equazione $x_1=0$, sarà t=a/(a+b) e perciò $S=(0, y_2+a(z_2-y_2)/(a+b), \dots, y_k+a(z_k-y_2)/(a+b))$.

Si esprime questo fatto dicendo che un iperpiano fa perdere la connessione a uno spazio euclideo, ovvero che un iperpiano divide lo spazio in due semispazi. I due semispazi, insieme all'iperpiano, costituiscono una partizione dello spazio. Possiamo anche dire che l'iperpiano suddivide lo spazio n due regioni non connesse.

Sorge allora il problema di determinare il massimo numero di regioni (non connesse) in cui n iperpiani dividono lo spazio $\boldsymbol{R}^k$. Indicherò questo numero con r_n^k.
Se gli n iperpiani sono scelti in modo ***generico***, il numero di parti ottenute uguaglia il massimo r_n^k.
Per esempio, in $\boldsymbol{R}^2$ (piano usuale), due rette parallele dividono il piano in 3 parti, ma se sono incidenti lo dividono in 4 parti. Ora, due rette generiche del piano è più probabile che siano incidenti, anzicchè parallele.
Per precisare il concetto di *scelta generica*, introduco la definizione di ***stella di iperpiani.***
Osservo dapprima che, se n iperpiani sono paralleli a una stessa varietà lineare, una loro combinazione lineare è parallela a quella varietà (in particolare la contiene). Analogamente, se tutti quegli n iperpiani contengono quella varietà, ogni loro combinazione lineare la contiene.
Premesso ciò, hanno senso le seguenti definizioni:
Dirò stella impropria di ordine j l'insieme degli iperpiani combinazioni lineari di j+2 iperpiani non appartenenti a una medesima stella impropria di ordine j-1 e che sono paralleli a una stessa varietà lineare $L^{k-j-1} \neq L^0$. *Siccome $k-j-1 \geq 1$, risulterà $j \leq k-2$.*
Le stelle improprie di ordine minimo j=0 si chiamano **fasci impropri.**
Dirò stella propria di ordine j l'insieme degli iperpiani combinazioni lineari di j+2 iperpiani non appartenenti a una medesima stella propria di ordine j-1 e contenenti una stessa varietà lineare L^{k-j-2}. *Siccome $k-j-2 \geq 0$, sarà $j \leq k-2$.*
Le stelle proprie di ordine minimo j=0 si chiamano **fasci propri.**
Diremo allora che n iperpiani di $\boldsymbol{R}^k$ sono *scelti in modo **generico***, se mai j+2 di essi appartengono alla medesima stella impropria di ordine j, mai j+3 appartengono alla medesima stella propria di ordine j.
Passo ora al calcolo di r_n^k.
a) Spazio $\boldsymbol{R}^1$. E' la retta reale. Gli iperpiani sono i punti. E' mmediato che
a1) $r_n^1=n+1$. (n punti dividono la retta in n+1 parti).
b) Spazio $\boldsymbol{R}^2$. E' il piano euclideo (cartesiano). Se suppongp già tracciate n-1 rette (gli di $\boldsymbol{R}^2$), queste intersecano l'n^{ma} retta in n-1 punti distini (per l'ipotesi di scelta generica), che la dividono in n parti (per a1). Ciascuna di queste n parti in cui è divisa l'n^{ma} retta attraversa (e divide) una e una sola delle r_{n-1}^2 regioni determinate dalle n-1 rette precedenti, perciò $r_n^2=r_{n-1}^2+n$. Questa è una relazione ricorsiva, da cui si ottiene $r_n^2=r_{n-2}^2+(n-1)+n = \ldots = r_0^2++1+2+\ldots+n = r_0^2+n(n+1)/2$.
Siccome $r_0^2=1$, (zero rette non dividono il piano, che resta una sola regione), ottengo
b1) $r_n^2=(n^2+n+2)/2$.
c) Spazio $\boldsymbol{R}^3$. Suppongo tracciati i primi n-1 piani (iperpiani di $\boldsymbol{R}^3$); essi determinano r_{n-1}^3 regioni. L'n^{mo} piano è intersecato dai precedenti in n-1 rette (generiche) che dividono l'n^{mo} piano in r_{n-1}^2 regioni, ciascuna delle quali divide una delle r_{n-1}^3 di $\boldsymbol{R}^3$ determinate dai primi n-1 piani. Pertanto si ha $r_n^3= r_{n-1}^3+ r_{n-1}^2$, con $n\geq 1$. Questa è una relazione ricorsiva, da cui si ottiene $r_n^3= r_{n-2}^3+ r_{n-2}^2+r_{n-1}^2$ $=\ldots=r_0^3+r_0^2+ r_1^2+ r_2^2+\ldots+ r_{n-1}^2$. Siccome $r_0^3=1$, si ottiene $r_n^3 = 1+\sum_{i=0}^{n-1} r_i^2$, $n\geq 1$. Infine (per b1) avrò

c1) $r_n^3 = 1+\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2+i+2}{2}$.

d) Spazio $\boldsymbol{R}^k$.
Suppongo di aver già tracciato n-1 iperpiani (generici) il numero di regioni in dividono $\boldsymbol{R}^k$ è r_{n-1}^k. L'n^{mo} iperpino sarà da essi intersecato secondo n-1 varietà di dimensione k-2; pertanto esso sarà diviso in r_{n-1}^{k-1} regioni, ognuna delle quali dividerà una (e una sola) delle r_{n-1}^k precedenti regioni di $\boldsymbol{R}^k$; perciò avrò $r_n^k= r_{n-1}^k+ r_{n-1}^{k-1}$, per $n\geq 1$. Da questa si ottiene successivamente
d1) $r_n^k= r_{n-2}^k+ r_{n-2}^{k-1}+ r_{n-1}^{k-1}$, che si può crivere, essendo $r_0^k=1$:

d2) $r_n^k = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} r_i^{k-1}$, per n≥ 1.

Dalla d2) si ricava, in particolare, che un iperpiano divide $\boldsymbol{R}^k$ in due regioni, risultato fortemente intuitivo.

Osservando la **d1),** si nota che il calcolo di r_n^k è ricorsivo in n e in k, nel senso che è ricondotto a calcoli analoghi con i valori precedenti di n e di k.

Perciò, se costruisco una tabella a due entrate, disponendo su una riga in alto i successivi valori di k (la dimensione dello spazio) e su una colonna a sinistra i successivi valori di n (numero di iperpiani), il valore di r_n^k si ottiene all'incrocio dell'n^{ma} riga e della k^{ma} colonna, come somma dei due termini della riga precedente che stanno rispettivamente sulla stessa colonna e su quella precedente.

n / k	**k=1**	**k=2**	**k=3**	**k=4**	**k=5**	**k=6**	**k=7 …**
n=1	2	2	2	2	2	2	2
n=2	3	4	4	4	4	4	4
n=3	4	7	8	8	8	8	8
n=4	5	11	15	16	16	16	16
n=5	6	16	26	31	32	32	32
n=6 …	7	22	42	57	63	64	64

Osservando la tabella si nota che, per $n \leq k$, $r_n^k = r_n^n = 2^n$.

Lo dimostro per induzione. Il teorema è vero per n=1 ($r_1^k=2$); sia vero per n, allora è vero per n+1: infatti l'$(n+1)^{mo}$ iperpiano intersecherà, dividendole, al più tutte le regioni precedenti e perciò sarà $r_{n+1}^k \leq r_n^k.2=2^{n+1}$.

Riporto ora il disegno della suddivisione di $\boldsymbol{R}^2$ (del piano) con 3 rette generiche (fig.1) e 4 rette generiche (fig.2) rispettivamente in 7 e in 11 regioni, d'accordo con i dati raccolti nella tabella.

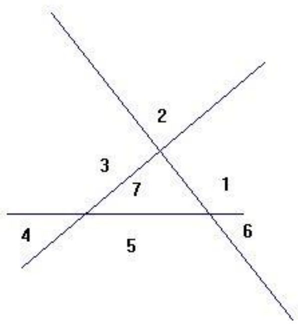

fig.1

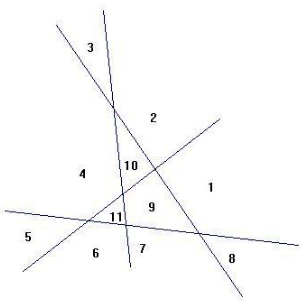

fig.2

Bibliografia.

1. Serge Lange, "Algebra lineare", Boringhieri;
2. Jean Dieudonnè, "Algebra lineare e geometria elementare", Feltrinelli;
3. Giovanni Romano, "Appunti di algebra lineare e geometria", Liguori Editore;
4. Silvia Abeasis, "Algebra lineare e geometria", Zanichelli.
5. Ottavio Serra, "Spazi vettoriali", *digilander.libero.it/ottavioserra0, Lezioni allo Scorza, matematica 2010;*
6. Ottavio Serra," Spazi vettoriali su C" (sul campo complesso), *digilander.libero.it/ottavioserra0, Esercitazioni di matematica (Unical), Algebra lineare e geometria.*