

Ottavio Serra

## Particelle quantistiche e dualismo onda-corpuscolo

### Modelli fisici e sovrastrutture metafisiche

#### Esperimento della doppia fenditura.

Quando nel 1802 Thomas Young eseguì l'esperimento della doppia fenditura, la formazione delle frange di interferenza, tipica delle onde, sembrò la prova **decisiva** della **natura** ondulatoria della luce.

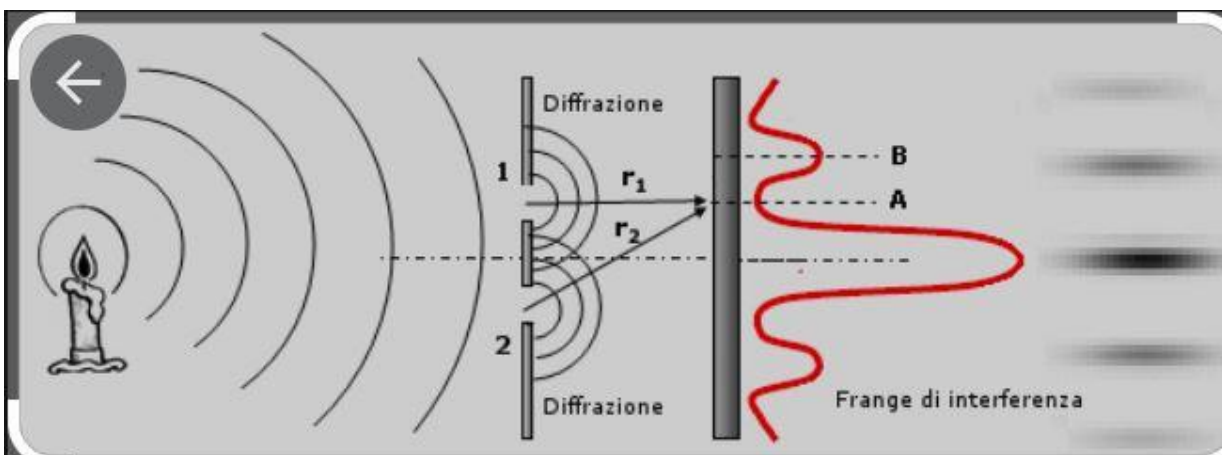


fig.1

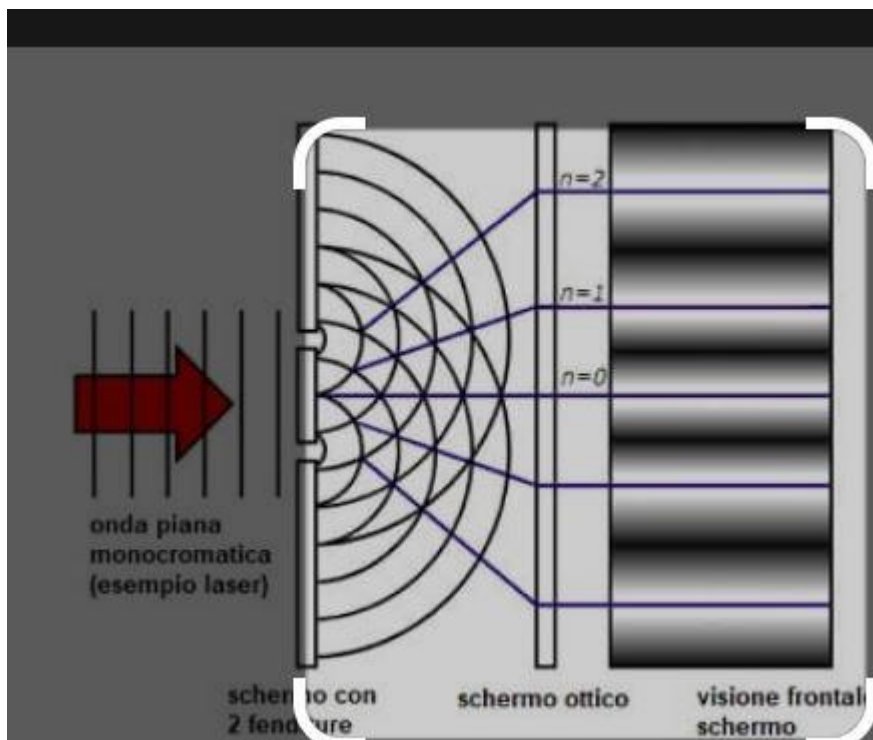


fig. 2

Le due fenditure della fig. 1(o della fig. 2) fungono da sorgenti **coerenti** di luce, perché illuminate da **una medesima sorgente primaria**, la candela a sinistra, *l'unica fonte di luce allora disponibile*.

Sullo schermo rivelatore (a destra) si formano strisce (**righe**) luminose (*frange di interferenza*) nei punti P per i quali la differenza di cammino dalle fenditure **1** e **2** è un multiplo intero di lunghezza d'onda. Il grafico in **rosso** rappresenta l'intensità delle frange via via decrescente man mano che ci si allontana dal massimo centrale.

**Si noti** che il massimo centrale è allineato con l'ostacolo opaco tra le due fenditure e, secondo l'ottica geometrica dovrebbe essere addirittura **buio**.

Nella fig. 2 sono meglio evidenziate le frange di interferenza.

**Ma perché si richiede luce coerente?** Due sorgenti di luce si dicono **coerenti** se hanno lo stesso **colore** (stessa frequenza) e **differenza di fase costante nel tempo**. Supponiamo, per semplificare i calcoli, che le due onde abbiano la stessa ampiezza. Siano  $\Psi_1 = A\cos(\omega t)$  e  $\Psi_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$  le onde che arrivano nello stesso punto P dello schermo rivelatore, essendo  $\varphi$  la differenza di fase; essa è  $2\pi$  per  $x$ , (differenza di cammino dalle fenditure a P), diviso la lunghezza d'onda  $\lambda$ :  $\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda}$ .

L'onda risultante è  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)] = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$ .

L'intensità luminosa è uguale (**proporzionale**) al quadrato dell'onda, **mediato nel tempo**. Se una delle due fenditure è **chiusa**, avremmo  $I_1 = E(\Psi_1^2) = E(\Psi_2^2) = \frac{A^2}{2}$  (la media temporale di  $\cos^2(\omega t + \alpha)$  è  $1/2$ ).

Se le due fenditure sono entrambe aperte  $I = E[(\Psi_1 + \Psi_2)^2] = 4A^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2A^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ .

Se in P la differenza di fase  $\varphi$  è un multiplo pari di  $\pi$ ,  $I = 2A^2 = 4 \cdot I_1$ , nei punti in cui  $\varphi$  è un multiplo dispari di  $\pi$ ,  $I = 0$ . La condizione di **interferenza costruttiva** (**righe luminose**) è

$$[1] \quad p\lambda \sin(\theta) = n\lambda, \quad (\text{vedi fig. 3}).$$

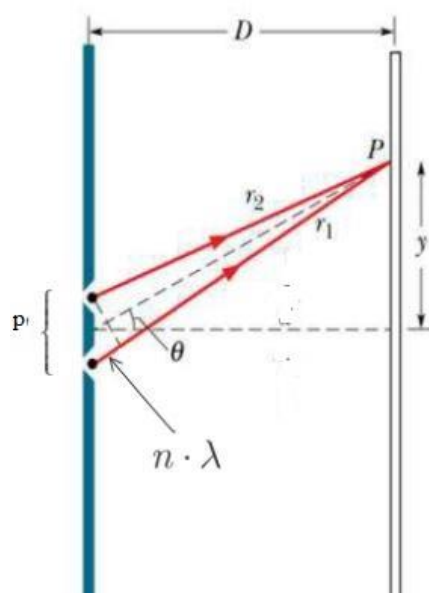


fig. 3

(La differenza di cammino dalle due fenditure al punto P dello schermo deve essere un multiplo intero di lunghezza d'onda. **Che succede** con un fascio di luce bianca, come la luce solare?).

Se si perde la coerenza, se, per esempio, si mettono vetri smerigliati davanti alle fenditure, i vetri assorbono la luce e la riemettono **in modo indipendente**, la differenza di fase  $\varphi = \varphi(t)$  varia da istante a istante e il valo medio temporale  $E \left[ 2A^2 \cos^2 \left( \frac{\varphi(t)}{2} \right) \right] = 2A^2 \frac{1}{2} = A^2$  e  $I=2I_1$ .

In tal caso lo schermo viene illuminato in modo continuo, l'interferenza è perduta.

E' curioso notare che l'interferenza si comporta come un **Robin Hood alla rovescia**, toglie ai poveri per dare ai ricchi, **produce sperequazione energetica**. Se diciamo **1** (in certe unità di misura), l'energia luminosa che in ogni secondo arriva da ciascuna fenditura allo schermo, in totale abbiamo 2 unità energetiche; l'interferenza concentra 4 unità nelle frange luminose e 0 in quelle buie. Ma la media tra 4 e 0 è 2, **l'energia non si crea né si distrugge**.

**Dal punto di vista formale** l'elettromagnetismo di Maxwell non aggiunse novità, salvo il fatto che le onde luminose sono di natura elettromagnetica,  $\Psi(x,t)=\alpha \cdot E(x,t)$ , (e giustifica il fatto che si tratta di onde **trasversali**, come aveva capito Malus dopo aver osservato il fenomeno della **polarizzazione**.)

### L'effetto fotoelettrico e i quanti di luce di Einstein.

La spiegazione di Einstein dell'effetto fotoelettrico con la rivoluzionaria idea che la luce consista di un flusso di **quanti di** energia, provocò il primo imbarazzante dualismo **onda-particella**. La luce si manifesta a volte come un'onda, a volte come un corpuscolo? Ha una doppia natura, come l'uomo (corpo e spirito) o il Cristo (uomo e dio) nelle dispute teologiche medievali?

**L'imbarazzo si aggravò** quando de Broglie introdusse il concetto di *onda associata* a ogni oggetto fisico,  $\lambda = \frac{h}{p}$  (lunghezza d'onda uguale costante di Planck diviso impulso), compresi quegli enti fino a quel momento considerati, **senza ombra di dubbio**, di natura corpuscolare, dai pianeti agli elettroni. La cosa funzionava, come dimostrarono gli esperimenti di diffrazione di Davisson e Germer con fasci di elettroni e poco dopo dagli esperimenti di George Thomson.

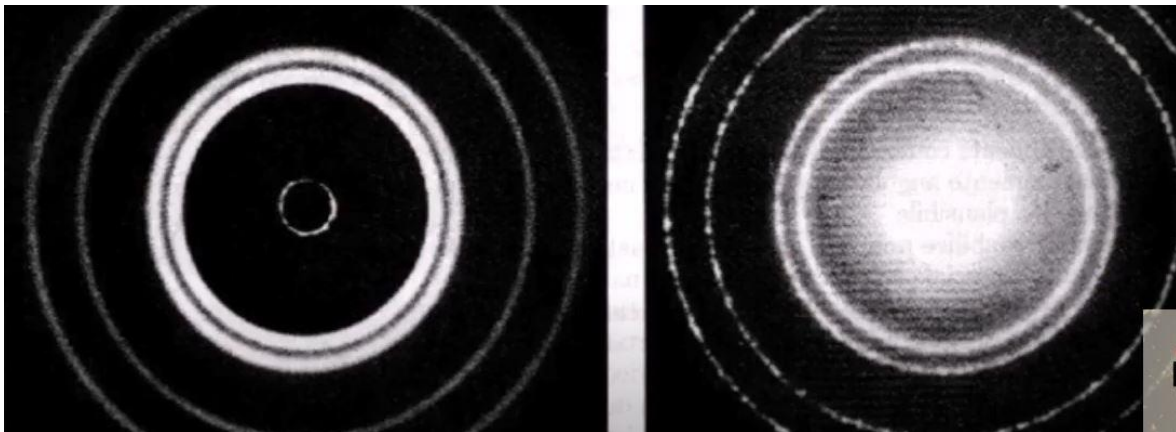


fig. 4

**A sinistra** diffrazione di un fascio di raggi X (Von Laue), **a destra** di elettroni (G. Thomson).

In entrambi i casi è stata usata la tecnica di Von Laue: far passare il fascio attraverso un sistema di micro cristalli polverizzati orientati a caso; il gran numero di micro-cristalli produce sui fasci riflessi simmetria circolare. L'interferenza avviene secondo la formula dei Bragg (fig. 5)

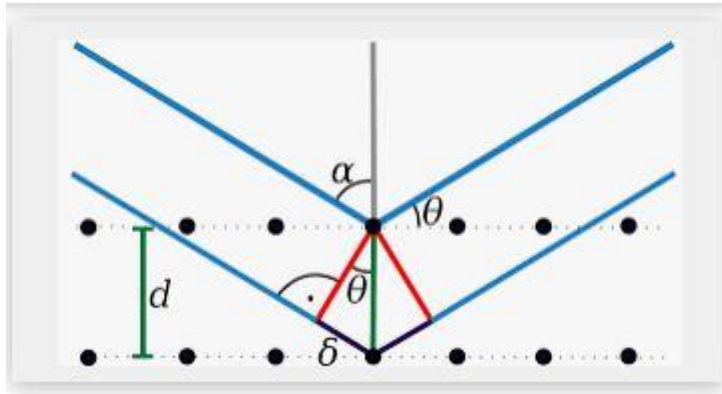


fig. 5

I raggi X (o elettronici) si riflettono sul primo e sul secondo strato di ioni del reticolo cristallino ed emergono a destra in raggi la cui differenza di cammino è  $2d\text{Sen}(\theta)$ : al solito, l'interferenza costruttiva si ha per

$$[2] \quad 2d\text{Sen}(\theta) = n\lambda.$$

**Si noti** l'analogia tra le formule [1] e [2]. **Però**, nel primo caso si ha interferenza per *trasmissione*, nel secondo per *riflessione*.

**Perché** non si notano fenomeni di interferenza con particelle **macroscopiche**, come proiettili di una mitraglietta? **E' tutta questione di scala**. **Calcolare** la lunghezza d'onda associata a un proiettile di 10 grammi sparato a 100 m/s. Dovreste trovare  $\lambda \approx 10^{-33} \text{ m} = 10^{-23} \text{ \AA}$ , un miliardo di miliardi di volte minore del raggio del protone; è vano aspettarsi frange di interferenza sparando colpi di mitraglia contro due fenditure! **Ammesso** di disporre di **una lastra d'acciaio indistruttibile**, con due fenditure larghe

1 cm (per far passare i proiettili) e passo di 2 cm, la [1] ci fornisce  $\text{Sen}(\theta) = \frac{n\lambda}{p} \approx \frac{2 \cdot 10^{-33}}{2 \cdot 10^{-2}} = 10^{-31} \Rightarrow \theta \approx 0$ .

**I proiettili andrebbero dritti**, disegnando sullo schermo, **indistruttibile**, le immagini geometriche delle due fenditure. I proiettili sono a tutti gli effetti **corpuscoli classici**.

**Il dualismo** finì per essere considerato un comportamento **universale** di tutti gli enti **microscopici** (**quantistici**). **Passando** alla scala macroscopica, oggetti costituiti da miliardi di oggetti quantistici (molecole, atomi, elettroni, nucleoni, fotoni...) non esibiscono più la *doppia natura*, ma si presentano o solo come **onde** (i campi elettromagnetici, le onde del mare) o solo come **corpuscoli** (i punti materiali, dai granelli di sabbia, alle bilie, ai pianeti). Vedi la vignetta sottostante



fig. 6

**Vediamo ora di fare un po' di conti.**

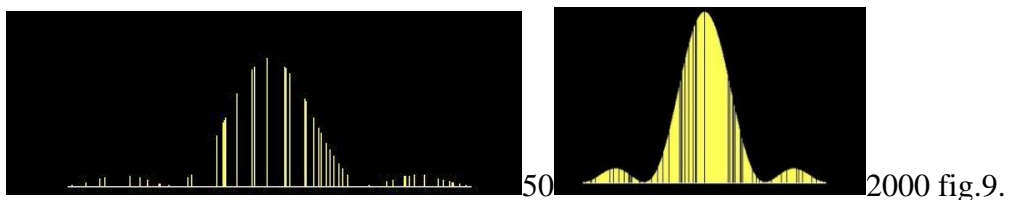
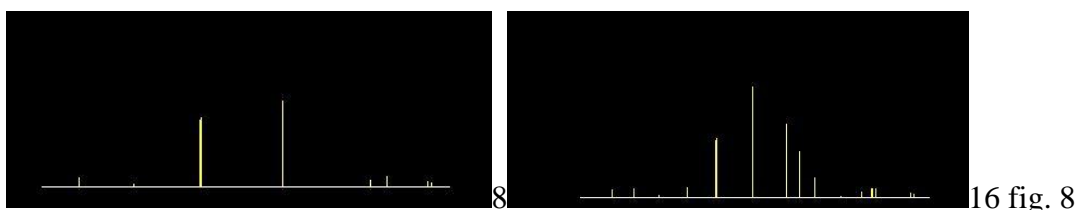
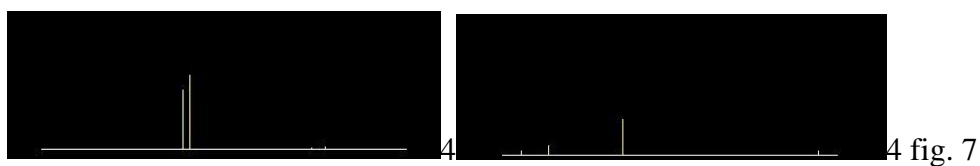
Quanti fotoni arrivano sullo schermo dopo essere passati attraverso le due fenditure? Supponiamo di avere una debole sorgente laser della potenza di  $10^{-3} \text{ W}$ , che emette luce verde ( $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ). Illuminando per  $10^{-6} \text{ s}$  una fenditura, si formano le frange di diffrazione, perché il numero **n** di fotoni

emesse è abbastanza elevato da poter fare **statistica**. Infatti, l'energia emessa è  $E=10^{-9}$  J ed

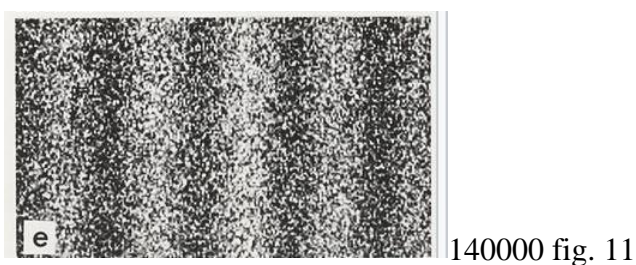
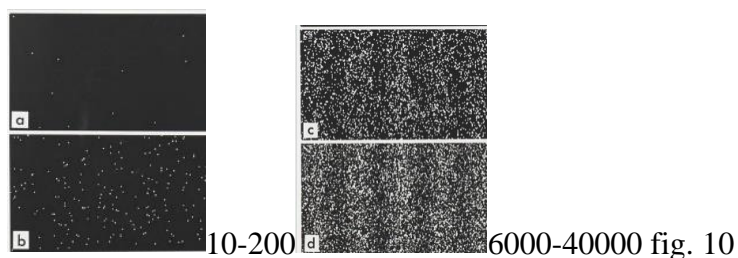
$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx \frac{1}{4} 10^{10} \approx 2 \text{miliardi}.$$

Per questo motivo si osservano le frange previste dal modello ondulatorio e l'uomo **vede le onde luminose** che, in realtà, nessuno ha mai visto. Se i fotoni fossero stati 10 o 100, nessuno avrebbe visto frange di interferenza, ma solo **puntini** verdi disseminati **a casaccio** sullo schermo rivelatore.

**Riporto** la simulazione, realizzata con un mio software, di ciò che succede sparando contro una **fenditura singola** elettroni monoenergetici (o fotoni monocromatici), uno alla volta. La frange di **diffrazione** si forma gradualmente per effetto statistico, al creescere del numero di particell, che arrivano sullo schermo. Lo stesso dicasi delle successive fig. 10 e fug.11 di interferenza elettronica.



Qui sotto le foto delle frange di interferenza formate da elettroni *sparati* contro le due fenditure.



Ma come mai si vedono le onde su una corda vibrante o le onde del mare?

Perché le particelle materiali che vibrano, che oscillano su e giù, sono una miriade e noi vediamo simultaneamente, se illuminate da una sorgente esterna, quelle che oscillano con ampiezza massima (ventri) e quelle che oscillano con ampiezza via via minore, fino a quelle che sono ferme (nodi). L'effetto collettivo e coerente ci fa vedere le onde.

Su una corda tesa, fissa agli estremi, le onde sono stazionarie, cioè in ogni punto della corda l'ampiezza di vibrazione è costante nel tempo, l'onda non si propaga; invece nel caso delle onde marine si ha l'impressione che le onde camminino sulla superficie dell'acqua. L'effetto è più netto in uno specchio d'acqua sul quale si faccia cadere un sasso; in questo caso si vedono onde circolari di raggio crescente. Nei due casi le onde si “vedono” perché sono trasversali. Nessuno, invece, ha mai visto le onde sonore in un fluido come l'aria, perché le molecole del mezzo vibrano parallelamente alla direzione di propagazione, sono “onde” longitudinali, di compressione e rarefazione.

Anche le onde luminose, in generale elettromagnetiche, sono trasversali, come le onde del mare, ma nessuno ha mai visto le onde luminose! Cercherò di spiegarlo più avanti.

A proposito, anche le onde del mare formano onde stazionarie, come le onde su una corda tesa, ma queste sono unidimensionali, mentre quelle del mare sono bidimensionali. Chissà quante volte le avete viste, ma forse non ci avete fatto caso! Se siete in riva al mare quando è calmo, in un mattino soleggiato, le onde, riflettendosi sulla riva, interferiscono con quelle in arrivo e formano linee nodali a forma di parallelogrammi. Esse sono evidenziate dalla luce solare che, attraversando l'acqua lungo le linee nodali dove è ferma, disegna una tassellatura tremolante sul fondo sabbioso.

(E or che esperto sei della dottrina, “conosci il tremolar della marina”).

### Relazione tra modello ondulatorio e modello corpuscolare.

**Prima di tutto, una nota tecnica.** In realtà, per studiare fenomeni di interferenza si usa il reticolo, che consiste non di due, ma di moltissime fenditure (parallele), per aumentare il potere risolutivo, cioè la possibilità di vedere le frange luminose molto sottili e quindi poter distinguere due righe spettrali di lunghezza d'onda poco diversa. Il potere risolutivo è definito come  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  e si dimostra che

risulta  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n.N$ , dove  $n$  è l'ordine dello spettro,  $N$  il numero totale di fenditure del reticolo. Convieni,

inoltre, che il reticolo abbia un passo  $p$  il più piccolo possibile (il passo è la distanza tra due fenditure consecutive del reticolo), per avere una deviazione angolare  $\theta$  abbastanza grande per ogni data lunghezza d'onda (vedi le formule [1] e [2]). E' questo il motivo per cui l'interferenza dei raggi X e dei fasci di elettroni richiede come reticoli dei cristalli, perché la lunghezza d'onda è dell'ordine di una frazione di  $\text{Å}$  e non è possibile realizzare reticoli artificiali con un passo così piccolo, 3 o 4  $\text{Å}$ , come la spaziatura reticolare dei cristalli. Per la luce visibile vanno bene reticoli artificiali con passo  $p$  dell'ordine di venti mila  $\text{Å}$ .

**Esercizio.** Dimostrare che con un reticolo di tal fatta, passo  $p=2.10^4 \text{ Å}$ , è possibile vedere gli spettri completi, dal violetto al rosso, del 1°, 2° e 3° ordine, cioè con  $n$  da 1 a 3 (vedi formula [1]).

1. Lunghezza d'onda ed energia di un **fotone**.  $W = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{W} = \frac{19875 \cdot 10^{-26}}{W}$  nel SI.

Volendo  $\lambda$  in  $\text{Å}$  e  $W$  in eV,  $\lambda = \frac{19875 \cdot 10^{-26}}{w} \cdot \frac{10^{10}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \Rightarrow \lambda = \frac{12422}{W}$ .

Esempio. La riga rossa dell'idrogeno ha  $\lambda = 6586 \text{ Å}$  e corrisponde a fotoni di energia  $W = 1,886 \text{ eV}$ .

2. Lunghezza d'onda associata a una **particella** in funzione della sua **energia cinetica T**.

Ci mettiamo nel caso generale di energie **relativistiche**  $\frac{W}{p} = \frac{c^2}{v}$  e  $W^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ .

$W$  è la somma dell'energia cinetica  $T$  e dell'energia di massa  $mc^2$ . (Per i fotoni  $m=0$  e  $T=W$ ).

Segue  $p = \frac{1}{c} \sqrt{W^2 - (mc^2)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(T + mc^2)^2 - (mc^2)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{T^2 + 2mc^2T}$ . Applicando la legge di de Broglie,

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T^2 + 2mc^2T}} = \frac{hc}{c\sqrt{2mT}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}}} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}}}$ . Se l'energia cinetica  $T$  è **piccola** rispetto all'ener-

gia di massa  $mc^2$ , si può approssimare con la formula non relativistica di de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$ .

Esempio. Per elettroni da  $100 \text{ eV}$ ,  $\frac{T}{2mc^2} \approx 10^{-4}$ , perciò è lecito usare la formula non relativistica:

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 10^{-30} \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} = \frac{6,6}{\sqrt{32}} \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1,17 \text{ Å}$  e vanno bene le tecniche di riflessione su cri-

stalli, come per i raggi X, per ottenere le figure di interferenza elettronica.

**Infine**, calcoliamo la  $\lambda$  associata a un granello di polvere con massa di  $1 \text{ mg}$ , che si muove a  $1 \text{ mm/s}$ .

$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{10^{-6} \cdot 10^{-3}} = \sim 10^{-24} \text{ m} = 10^{-14} \text{ Å}$ , **un miliardo di volte più piccolo del raggio del protone: è vano**

**spere di mettere in evidenza il suo comportamento ondulatorio**. Non esiste reticolo con passo dell'ordine di  $10^{-12}$ ,  $10^{-13} \text{ Å}$ . E poi, il granello di polvere conterrà qualche milione di miliardi di molecole, è un **oggetto macroscopico** a tutti gli effetti, esibisce il tipico **comportamento di un corpuscolo classico**.

**La funzione d'onda di Schrodinger.**

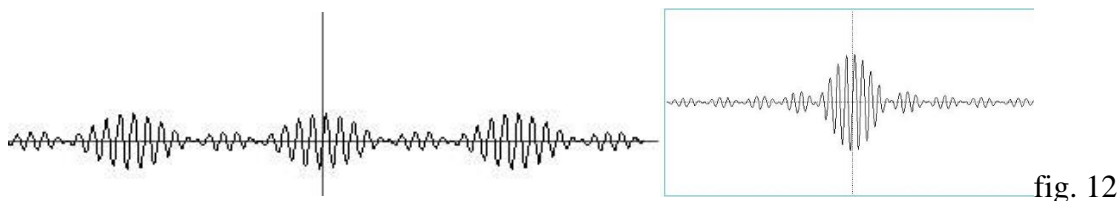
Partendo dall'idea di de Broglie delle *onde materiali*, **Schrodinger** elaborò la meccanica quantistica nella versione che fu denominata **meccanica ondulatoria**, perché formalmente analoga all'ottica ondulatoria. In essa l'evoluzione dinamica di un sistema è descritta da un'equazione (equazione temporale di **Schrodinger**), le cui soluzioni danno i possibili valori delle grandezze (*osservabili*) dinamiche (posizione, impulso, energia) attribuibili al sistema. Le soluzioni si presentano sotto forma di funzioni esponenziali nel campo dei numeri complessi, ma siccome gli esponenziali complessi sono esprimibili come combinazioni di seni e coseni e tali funzioni hanno grafici che sembrano **onde**, la funzione

di stato, che descrive lo stato del sistema, fu detta **funzione d'onda**. Si indica con la lettera  $\Psi$  ed è funzione delle coordinate spaziali e temporale:  $\Psi(x,y,z,t)$ . Nei problemi unidimensionali,  $\Psi(x,t)$ .

La  $\Psi$  non ha un diretto significato fisico; il quadrato del suo modulo,  $|\Psi|^2$ , fu interpretato inizialmente come densità di materia, di carica elettrica nel caso dell'elettrone. Per semplicità di comprensione, mi limito al caso unidimensionale. Ora, se la  $\Psi(x,t)$  dipende da una sola lunghezza d'onda  $\lambda$ , per la legge di de Broglie, da un solo impulso, la funzione

$$\Psi(x,t) = A \cdot \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] = A \cdot \cos(\omega t - kx) = A \cdot \cos \left( \frac{Wt - px}{\hbar} \right)$$

è una sinusoide che si estende su tutto l'asse reale (in un dato istante) e non può rappresentare una particella (per esempio, un elettrone) che, quando è rivelato, si presenta a tutti gli effetti come un **punto materiale**, per esempio su uno schermo sensibile o su una lastra fotografica. Perciò la  $\Psi(x)$  deve essere **un pacchetto d'onde**, la sovrapposizione di più onde (di più impulsi) in modo da essere sensibilmente diversa da zero su un tratto ristretto dell'asse  $x$ . Più numerose sono le onde del **pacchetto (gruppo, in una dimensione)**, più il pacchetto è stretto e meglio si presta a rappresentare una particella, un punto materiale. (Vedi fig. 12)



(A sinistra 3 onde, a destra 12 onde)

**Le considerazioni** fatte sul pacchetto d'onde per localizzare una particella fanno capire che **minore** è la **larghezza del pacchetto**, cioè l'**indeterminazione**  $\Delta x$  sulla posizione della particella, **maggiore** è il numero di onde necessarie per ottenere questo risultato e ciò comporta maggiore indeterminazione sull'impulso. Ciò, a **livello qualitativo**, esprime **il principio di indeterminazione di Heisenberg**.

**Però, c'è un problema.** Si dimostra che **in generale** il pacchetto d'onde si espande in un volume sempre maggiore al passare del tempo. Se la funzione d'onda  $\Psi$  col suo modulo quadro rappresenta una densità di materia, di elettricità nel caso dell'elettrone, si arriva alla conclusione paradossale che la particella si **gonfia** al passare del tempo, finendo per **diluirsi** in un volume sempre più grande.

Questa difficoltà fu superata con la proposta di Max Born di interpretare la  $\Psi$  come **ampiezza di probabilità** e il suo modulo quadro come **densità di probabilità**.

**In tale modello si interpreta l'espressione**

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz \text{ come probabilità di trovare la particella, al tempo } t, \text{ nel volume } dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Quindi, la probabilità di trovare la particella nel volume  $V$ , a un certo istante  $t$ , è

$$[3] P(V, t) = \iiint_V |\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz.$$



Ovviamente, la  $\Psi$  va *normalizzata* in modo che la probabilità [3] valga 1, se  $V$  è tutto lo spazio.

In questa interpretazione **ciò che si gonfia** in un volume sempre **maggiore**, con **densità massima sempre più piccola**, non è la particella, ma la probabilità di trovarla in un volume sempre più ampio, perciò diminuisce la probabilità di trovarla in un volume prefissato.

**La cosa è molto naturale** e non dissimile dal caso di un prigioniero evaso: al passare del tempo è sempre più probabile che sia lontano, sempre più piccola la probabilità che sia ancora nelle vicinanze del carcere.

**La meccanica quantistica è, pertanto, una teoria intrinsecamente probabilistica.** L'equazione di Schrodinger, nel caso di una sola particella, non dà un valore determinato per le *osservabili* di un sistema, impulso, energia, momento angolare, spin, ma un insieme di valori possibili con le relative probabilità: solo all'atto della misura si ottiene un valore determinato, con esclusione di tutti gli altri valori a priori possibili, **collasso della funzione d'onda**. (Quando l'evaso è catturato, **collassa l'ignoranza sulla sua posizione**). Parlo di ignoranza, perché l'evaso è un sistema macroscopico, prima della cattura non sapevamo dove fosse, ma pensiamo che fosse, certamente, in un posto determinato. **Nella meccanica classica** la probabilità è di tipo **epistemico** (conoscitivo), **perché per i sistemi macroscopici è praticamente impossibile conoscere posizione e velocità iniziali di una miriade di particelle. Ma le equazioni del moto sono deterministiche.**

Invece, la meccanica quantistica è intrinsecamente **indeterministica**, anche per un sistema di una **sola particella**, perché il principio di indeterminazione di Heisenberg non consente che osservabili incompatibili, come posizione e impulso, abbiano valori simultaneamente determinati. Viene meno, pertanto, anche il **concetto di traiettoria**. *“Che fa un fotone che va dal punto A al punto B riflettendosi su uno specchio? Fa quello che gli pare”*, dice il premio Nobel Richard Feynman. Però il percorso che ha la massima probabilità è quello che richiede il minimo tempo e un raggio di luce formato da miliardi di fotoni per effetto statistico segue la legge della riflessione ben nota.

**Il determinismo classico è una conseguenza statistica dell'indeterminismo quantistico.**

Perciò, non c'è bisogno di immaginare gli enti microscopici come **prestigiatori**, che a volte si manifestano come corpuscoli e a volte come onde. Possiamo benissimo pensarli come particelle, è la legge che li governa che è probabilistica e ondulatoria: la funzione di stato  $\Psi$ , ampiezza di probabilità, è detta anche **funzione d'onda** perché matematicamente espressa con funzioni goniometriche, il cui grafico è ondulato. Le onde della meccanica quantistica non vivono nello spazio fisico, ma nello **spazio delle fasi**, lo spazio di Hilbert sul campo complesso, a infinite dimensioni.

**Ma la forza delle parole (e delle immagini mentali) è grande!** Le parole sono pietre.

**E le onde elettromagnetiche?**

Il campo elettrico  $E=E_0\cos(\omega t-kx)$  e il campo magnetico  $B=B_0\cos(\omega t-kx)$  ostituiscono, insieme, il campo elettromagnetico. Questo, propagandosi, trasporta energia; si definisce intensità del campo (dell'onda) l'energia che nell'unità di tempo attraversa l'unità di superficie ortogonalmente:

$I = \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S} = \frac{J}{s \cdot m^2}$ . Tenendo presente la relazione tra B ed E, si trova

$$[4] I = c \epsilon_0 E_0^2 \quad (\epsilon_0 \text{ è la costante dielettrica del vuoto}).$$

Se ora pensiamo la propagazione del campo come un flusso di **fotoni**, dobbiamo interpretare la [4] in termini statistici. Supponendo, per semplicità, che si tratti di un fascio di radiazione monocromatico, di frequenza  $\nu$ ,  $\mathbf{I} \cdot d\mathbf{y} = n_y(\nu) \cdot h\nu \cdot d\mathbf{y}$ , essendo  $n_y(\nu) \cdot d\mathbf{y}$  il numero **medio** di fotoni che arrivano su uno schermo S ortogonale alla direzione di propagazione x, su una striscia di larghezza  $d\mathbf{y}$  (essendo y un asse ortogonale a x). Se diciamo  $N(\nu)$  il numero totale di fotoni di frequenza  $\nu$  che arrivano sulla superficie S,  $\frac{n_y(\nu)}{N(\nu)} d\mathbf{y}$  **rappresenta la percentuale di fotoni che arrivano sulla striscia  $d\mathbf{y}$** .

Per un singolo fotone rappresenta **la probabilità** e la frazione  $\frac{n_y(\nu)}{N(\nu)}$  è la **densità di probabilità**.

**Domanda:** se lungo l'asse y lo schermo ha larghezza L, quanto vale  $\int_0^L \frac{n_y(\nu)}{N(\nu)} d\mathbf{y}$ ?

**Nota su velocità di fase e velocità di gruppo.** (a proposito di una velocità maggiore di c).

Riprendo le formule relativistiche di pagina 7:  $\frac{W}{p} = \frac{c^2}{v}$  e  $W^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ . Da esse si ricava

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{W^2 - mc^2}}$ . Se ricordiamo la formula di Plank – Einstein  $W = h\nu$ , si ricava la velocità d'onda

$$\text{Velocità di fase (o d'onda)} \quad v_f = \lambda \nu = \frac{h}{p} \cdot \frac{W}{h} = \frac{W}{p} = \frac{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}{p} = \sqrt{c^2 + \frac{m^2 c^4}{p^2}} = c \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} > c.$$

Questo risultato solo apparentemente contraddice il principio fondamentale della relatività; la velocità di fase riguarda una sola onda (monocromatica), che non può trasmettere informazione; occorre **modularla** e quindi occorre un gruppo d'onde, un pacchetto che richiede più onde o, equivalentemente, più impulsi. Il pacchetto si muove con la velocità di **gruppo**  $v_g$  definita non come  $W/p$ , ma come **derivata**

$$[5] v_g = \frac{dW}{dp} = \frac{2pc^2}{2\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}} < c. \quad (\text{La velocità della luce non è superata!}).$$

(**Verificare**, usando le formule della dinamica relativistica dianzi richiamate, che  $v_g$  è uguale a  $v$ , velocità di una particella definita come in **cinematica classica**. **Ciò è molto soddisfacente**).

**Osservazione.** **Chiarito** che non esiste un problema di **dualismo onda – corpuscolo**, si può usare tranquillamente il modello ondulatorio o quello corpuscolare, secondo i casi. Una particella quantistica è una particella come un granello di sabbia, tutte obbediscono alle stesse leggi probabilistiche,

l'apparente determinismo delle leggi classiche è solo il limite a cui tendono le leggi quantistiche quando sono applicate a **sistemi grandi**, cioè a quei sistemi che hanno un'azione grande rispetto alla costante di Planck, il quanto elementare di azione  $h$ . L'azione di un elettrone nell'atomo di idrogeno è confrontabile con  $h$  ( $6,6 \cdot 10^{-34}$  Js), perciò l'elettrone è un oggetto quantistico.

Una pallina da ping-pong di 10 g che va avanti e indietro sul tavolo da gioco lungo 2 m alla velocità di 10 m/s ha un'azione  $A=10^{-2} \cdot 20 \cdot 2=0,4$  Js, circa 600 mila miliardi di miliardi di miliardi di volte maggiore del quanto elementare d'azione  $h$ ! La pallina è un oggetto classico.

**Domande:** Quando cessa di valere la meccanica classica e occorre usare la meccanica quantistica? Seconda domanda: Quando finisce l'evo antico e comincia il medioevo?

### Appendice su alcune apparenti incongruenze.

(1) **Riflessione e rifrazione. Dalle intensità alle probabilità.** Vedi fig. 13

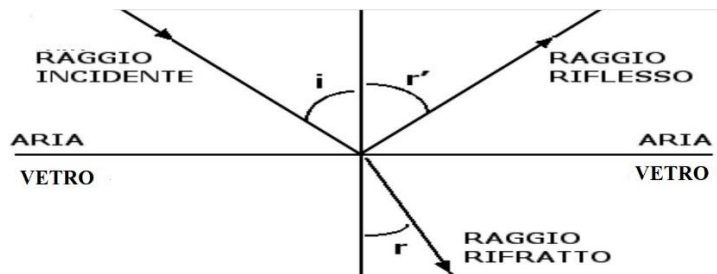


fig. 13

Le leggi sugli angoli sono ben note. Forse meno note quelle sulle intensità. Fresnel ha dimostrato che, detta  $I_0$ , l'intensità del raggio incidente,  $I_r$  del raggio riflesso e  $I_t$  man mano che l'angolo di incidenza cresce da 0 (incidenza normale) a  $90^\circ$  (incidenza radente),  $I_r$  cresce da  $I_0 \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2$  a  $I_0$ , mentre  $I_t$  decresce da  $I_0 \frac{4n}{(n+1)^2}$  a 0.

Se però arriva sul vetro un singolo fotone, questo **non si divide in due pezzi**, un pezzo si riflette e uno si rifrange, le percentuali vanno interpretate come probabilità,  $\frac{I_r}{I_0}$  è la probabilità che il fotone sia riflesso,  $\frac{I_t}{I_0}$  che sia trasmesso.

(2) Si sa che la velocità di un raggio di luce in un mezzo trasparente, come il vetro o l'acqua, non è  $c$ , ma  $\frac{c}{n}$ , dove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo rispetto al vuoto. Ma la luce è fatta di fotoni che, avendo massa zero, devono andare sempre a velocità  $c$ . Questa apparente violazione della relatività si spiega nel seguente modo. Quando un fotone penetra in una lastra di vetro e interagisce con un elettrone periferico di un atomo, viene assorbito e poi riemesso con un ritardo temporale medio  $\tau$ . Diciamo  $s$  lo spessore della lastra di vetro e  $k$  il numero di elettroni assorbitori per unità di spessore. Il tempo totale che il fotone impiega per attraversare la lastra di vetro è  $t = \frac{s}{c} + \tau ks$  e perciò la velocità

misurata è  $v = \frac{s}{t} = \frac{c}{1+ck\tau} < c$ . Questa interpretazione risolve l'apparente contraddizione e chiarisce anche da dove spunta l'indice di rifrazione.

(3) Nel 1932 Carl Anderson all'università di Berkeley con la camera a nebbia inventata da Wilson nel 1899 e perfezionata nel corso degli anni successivi scattò una fotografia che quattro anni dopo gli valse il premio Nobel (vedi la fig. 14 più avanti). Nella foto si vede una traccia (di micro goccioline di nebbia) lasciata senza ombra di dubbio da un elettrone. Si vede che la particella proviene dall'alto (perché?) e la traccia è incurvata da un campo magnetico diretto perpendicolarmente verso la foto (questo non si vede, occorre che sia garantito dalla relazione tecnica). Ma allora la legge di Lorentz dice che la carica elettrica è positiva! Era un elettrone positivo, che Anderson chiamò positrone. Quando la notizia arrivò in Europa, si capì che Anderson aveva scoperto l'antielettrone, il primo esempio di antimateria, prevista dalla teoria quanto-relativistica di Dirac il 1930.

Ma allora abbiamo fotografato la traiettoria dell'elettrone! Non si era detto che per le particelle quantistiche il concetto di traiettoria non ha senso? Non sappiamo se l'elettrone è rigorosamente puntiforme o ha dimensioni finite, in ogni caso il limite superiore sperimentale è  $10^{-18}$  metri, un centomillesimo del diametro dell'atomo di idrogeno. Ora, io mi domando: quanto è larga la traccia della foto? Non credo che sia minore di un micron, cioè di  $10^{-6}$  metri, ma anche in tal caso sarebbe mille miliardi di volte la dimensione dell'elettrone. Chiamare quella traccia *traiettoria dell'elettrone* significa contentarsi di poco, del resto questo passa il convento, bisogna contentarsi.

E poi, se anche non è la traiettoria di un elettrone, almeno ci ha fatto capire che lì dentro c'è la firma dell'antielettrone, e non è poco.

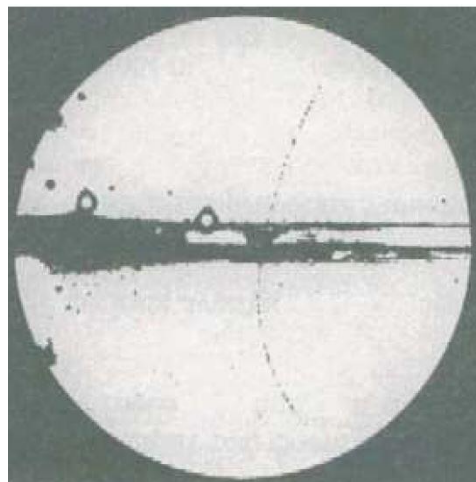


fig. 14

Di gran lungo meno indeterminata è la posizione di un'auto, larga 2 metri, se diciamo di averla localizzata tra la costa atlantica e la costa pacifica degli Stati Uniti, appena due milioni di volte la larghezza dell'auto!

Chiudo con una citazione tratta da "I principi fisici della teoria dei quanti" di Heisenberg.

*"... I problemi del linguaggio sono qui veramente gravi. Noi desideriamo parlare in qualche modo della struttura degli atomi ... Ma non possiamo parlare degli atomi servendoci del linguaggio ordinario. Le difficoltà della comprensione della teoria quantistica sono dovute a una essenziale inadeguatezza del nostro linguaggio".*

**Le parole di Heisenberg** mi hanno suggerito le seguenti considerazioni.

L'uomo non può concepire ciò di cui non ha esperienza sensoriale diretta. Ha fatto esperienza di enti localizzati nello spazio e nel tempo, **leoni, alberi, sassi** e ha costruito il concetto di **corpo (particella)**. Ha fatto esperienza di enti estesi nello spazio e nel tempo, **ondulazione delle dune di sabbia, dell'erba della savana piegata dal vento, delle onde del mare** e ha costruito il concetto di **onda**. Ha creato anche i concetti di **spazio assoluto e di tempo assoluto**, perché rispetto alle velocità di interesse vitale i segnali luminosi che lo informavano sulle opportunità e sui pericoli dell'ambiente circostante gli **sembrava istantanea** (velocità **infinità?**). Con questi strumenti concettuali **homo sapiens** è sopravvissuto nella savana, nei deserti, nelle terre ghiacciate del nord, ha creato l'agricoltura, la filosofia e la scienza. Fino a Galilei, Newton, Maxwell. Poi gli strumenti concettuali e il corrispondente linguaggio, vecchi di duecento mila anni, cominciarono a mostrarsi inadeguati per farsi una rappresentazione mentale degli atomi e degli enti sub-atomici.

### Riferimenti bibliografici.

**Per una prima informazione** su molti punti che in questo articolo ho introdotto senza spiegazione, *come notissimi a tutti*, indico alcuni miei articoli, reperibili sul sito

<http://digilander.libero.it/ottavioserra0> nella cartella **Articoli**:

- 1) Teoria della Relatività, sezione *Liceo scientifico Scorza*, N° 9 (a livello liceale)
- 2) Teoria dei Quanti, sezione *Liceo scientifico Scorza*, N° 11 (a livello liceale)
- 3) Fisica del '900 e sviluppi recenti, sezione *Miscellanea*, N° 22 (a livello liceale)
- 4) Effetto Compton, sezione *Miscellanea*, N° 33 (a livello più elevato)
- 5) Radiazione di corpo nero da Planck ad Einstein, sezione *Miscellanea*, N° 34 (a livello più elevato)
- 6) Dalle equazioni di Maxwell alle onde e.m., sezione *Miscellanea*, N° 50 (a livello più elevato)

### Testi

- 1) Jay Orear, Fisica generale, Zanichelli (a livello liceale)
- 2) Richard Feynman, QED La strana teoria della materia e della luce, Adelphi (alta divulgazione)
- 3) Piero Caldirola, Dalla microfisica alla macrofisica, Mondadori, (alta divulgazione)
- 4) Piero Caldirola, Istituzioni di fisica teorica, Editrice Viscontea Milano, (a livello universitario)
- 5) AAVV, La fisica di Berkeley 4° volume, Zanichelli, (a livello universitario)
- 6) Richard Feynman, La fisica di Feynman 3° volume, Zanichelli, (a livello universitario)

**La letteratura sull'argomento è sterminata, basta cercare su internet o in libreria.**

**Nota sulle figure:** fig. 7, fig. 8, fig. 9 e fig. 12 le ho realizzate con mio software grafico, le altre le ho prese da internet.