Ottavio Serra

Ottica geometrica

1. Introduzione.

Ottica vuol dire studio della luce. Lo studio della luce è importantissimo, perché quasi il 100% delle informazioni che abbiamo sul mondo esterno ci sono fornite dalla luce. Non solo dalla luce visibile con gli occhi (ottica deriva da ***ops,*** che in greco significa ***occhio***), ma anche dalle altre bande dello spettro elettromagnetico, dalle onde radio, alle microonde, ai raggi infrarossi, ultravioletti, ai raggi X.

Si pensi alle applicazioni negli apparecchi radio, televisori, telefonini, Internet, radiotelescopi, telescopi ottici e a infrarossi a terra e nello spazio, astronomia a raggi X (solo nello spazio, perché …).

L'attributo *geometrica* significa che vogliamo occuparci della luce (della radiazione) con apparecchiature (lenti specchi, fenditure) molto grandi rispetto alla ***lunghezza d'onda*** tipica della radiazione adoperata. Le leggi che studieremo vanno benne anche per il suono (***onde acustiche***), purchè di lunghezza d'onda convenientemente piccola, per esempio ultrasuoni (non udibili dall'uomo con l'organo dell'udito).

2. Propagazione rettilinea della luce.

Nel vuoto e nei mezzi trasparenti, aria, acqua, vetro per la luce (almeno quella visibile), aria, acqua, in generale corpi elastici, corde tese per il suono, le onde luminose (sonore) si propagano in linea retta, anche attraverso fenditure (finestre) abbastanza larghe rispetto alla lunghezza d'onda. Per la luce visibile (alla quale d'ora in poi faremo riferimento) le finestre di casa nostra sono molto larghe rispetto alla lunghezza d'onda e i ***raggi luminosi*** le attraversano in linea retta. Invece per il suono non sono abbastanza larghe e questo si ***diffrange,*** cioè aggira il bordo della finestra e si diffonde in tutte le direzioni. Per questo motivo, se sotto la nostra finestra succede qualcosa, sentiamo i suoni ma non vediamo la scena.

Da questo momento tratteremo solo di propagazione rettilinea.

3. Riflessione della luce.

Uno specchio è una superficie ben levigata (tirata a lucido). La superficie può essere di qualunque forma, purchè ***regolare***, cioè senza punte acuminate e linee taglienti. (I matematici direbbero superficie continua e differenziabile). Siccome una superficie regolare annette piano tangente in ogni suo punto, diremo **retta normale** a una superficie in un suo punto P la retta perpendicolare al piano tangente in P.

Nota. Nelle figure le superfici saranno riportate in sezione col piano del foglio, perciò saranno rappresentate da curve (regolari). In particolare, gli specchi piani saranno rappresentati come segmenti di retta, gli specchi sferici (calotte sferiche) da archi di cerchio, gli specchi parabolici (porzioni di paraboloidi rotondi) da archi di parabola.

Veniamo alle due leggi della riflessione. Entrambe derivano da un p**rincipio** di s***immetria***.

1) Il raggio luminoso incidente sullo specchio nel punto O, la normale in O e il raggio riflesso sono complanari. E' il principio ***di ragion sufficiente*** di Leibniz: Non c'è motivo che il raggio riflesso non sia nel piano del raggio incidente e della normale. Perché dovrebbe stare da una parte e non dall'altra?

2) L'angolo di incidenza **i** (tra raggio incidente e normale) e l'angolo di riflessione **r** sono **uguali.** Vedi fig. 1 che riporta l'argomentazione di Euclide: se un raggio di luce parte da A e arriva in B riflettendosi in un punto C dello specchio MN, come determinare tale punto? Non c'è massimo per la lunghezza del cammino AC+CB, perché C potrebbe andare infinitamente lontano sullo specchio, ma c'è un punto O che rende minimo il cammino; e se c'è un minimo, perché C dovrebbe stare in una posizione che rende il cammino maggi ore del minimo? Non c'è motivo sufficiente. Dunque C deve stare nella posizione O che minimizza il cammino.

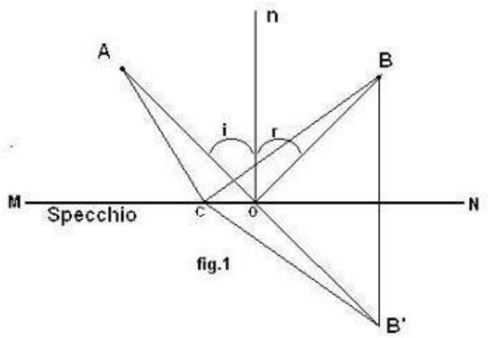


fig. 1

Euclide prende B' simmetrico di B rispetto allo specchio e congiunge B' con A; la retta AB' interseca lo specchio in O, perciò qui avviene la riflessione: AO+OB=AO+OB'=AB'. Ogni altro punto C sullo specchio rende il cammino più lungo. AC+CB=AC+CB' e nel triangolo ACB' la somma di due lati è maggiore del terzo. Stabilito che O minimizza il cammino, passiamo agli angoli. AOM=B'ON perché opposti al vertice; B'ON=NOB per la simmetria tra B e B'; perciò AOM=NOB e quindi sono uguali anche i loro complementari **i** ed **r.**

Nota. Abbiamo ragionato su uno specchio piano, ma in piccolo, in un piccolo intorno di un punto di una superficie regolare, la superficie si può approssimare col piano tangente. (Un po' di ragione ce l'hanno anche i t**errapiattisti!)**.

4. Rifrazione della luce.

Se un raggio d luce passa da un mezzo (trasparente) a un altro, ***in generale*** cambia direzione. Detto O il punto in cui il raggio incidente incontra la superficie di separazione tra i due mezzi, n la normale in O, **i** l'angolo di incidenza, t l'angolo r di rifrazione, valgono le seguenti due leggi:

3) Come per la riflessione (Vedi la **1**.)

4) $$\frac{Sen(i)}{Sen(t)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n$$

La costante **n** si chiama indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo.

Se si introduce un mezzo standard come il vuoto, con indice di rifrazione ***assoluto*** $\mathbf{n_0=1}$, allora l'indice di rifrazione n di un secondo mezzo rispetto al primo si può scrivere $\mathbf{n=n_2/n_1}$**,** essendo $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ gli indici del primo e del secondo mezzo rispetto al **vuoto.**

Giustificherò la seconda legge (legge di Snell) col principio di Fermat del **minimo tempo.**

(Vedi fig. 2).

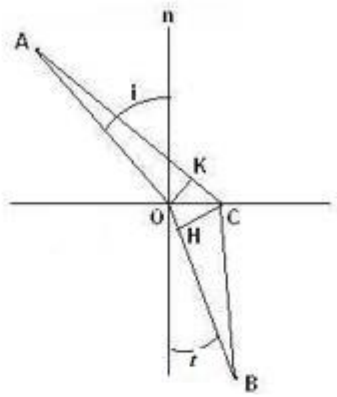


fig. 2

Sia O il punto della superficie di separazione per cui vale la legge di Snell, C un punto vicino. La differenza di tempo tra i cammini ACB e AOB è $(AC-AO)/v_1$ e $(CB-OB)/v_2$ cioè $\delta t=KC/v_1-OHv_2$.

Ora, se δt deve tendere 0 (per avere la condizione di minimo), anche il segmento OC e l'angolo di vertice A devono tendere a zero, perciò, essendo retto l'angolo OKC, l'angolo KOA tende a 90°.

Segue KC=OC.Sen(KOC) = OC.Sen(i) Analogamente, OH=OC.Sen(r). Pertanto

$\delta t = OC.Sen(i)/v_1 - OC.Sen(r)/v_2$ e $\delta t=0$ implica la legge di Snell

$$\frac{Sen(i)}{Sen(r)} = \frac{v_1}{v_2} = n.$$

(n è l'indice di rifrazione del 2° mezzo rispetto al 1°).

In realtà, la velocità della luce in un dato mezzo dipende un po' dal colore, ma in ottica geometrica si trascura questo effetto.

Nota storica. Il principio del minimo cammino di Euclide è un caso particolare del principio del minimo tempo di Fermat. Infatti, se il processo avviene in un unico mezzo (omogeneo), v_1 e v_2 sono uguali, Sen(i) = Sen(r) e i=r.

Il principio di Fermat fu a sua volta generalizzato da Helmholtz nel cosiddetto **principio della minima azione,** che svolge un ruolo cruciale nella meccanica, classica e quantistica.

Riflessione totale. Se un raggio di luce passa da un mezzo più rifrangente a uno meno rifrangente, per esempio dal vetro all'aria, il raggio si rifrange allontanandosi dalla normale. Al crescere dell'angolo di incidenza **i** l'angolo di rifrazione **t** sii avvicina a 90°. L'angolo i per cui l'angolo di rifrazione arriva a 90° si chiama **angolo limite l.** Perciò Sen(l)= 1/n.

Siccome l’indice n di rifrazione del vetro rispetto all’aria è circa 3/2, l’angolo limite nel passaggio dal vetro all’aria è l=ArcSen(2/3) = 42° (circa). La riflessione totale si sfrutta nelle **fibre ottiche** (in cui viaggiano onde centimetriche, di 2 o 3 GigaHertz, perché devono essere modulate per trasmettere informazione), nei **periscopi** dei sommergibili e nei **binocoli a prisma.**

Veramente, nei mezzi trasparenti si ha sempre riflessione e rifrazione insieme, in percentuali diverse che la teoria può calcolare. Per esempio, ci si può specchiare, debolmente, nel vetro di una finestra. Quando, però, l’angolo dii incidenza supera l’angolo limite (da un mezzo più rifrangente a uno meno rifrangente), il raggio rifratto, non potendo superare 90°, resta nel primo mezzo (quello più rifrangente) e si sovrappone al raggio riflesso: la riflessione è totale, nel senso che il 100% dell’energia luminosa è riflessa. **Veramente, nessun mezzo è perfettamente trasparente (*tranne il vuoto*) e una più o meno piccola percentuale di energia luminosa è assorbita e trasformata in calore.**

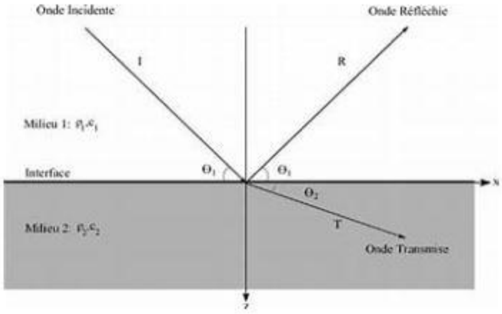


fig. 3

Riflessione e rifrazione dal vetro (in chiaro) all’aria (in grigio)

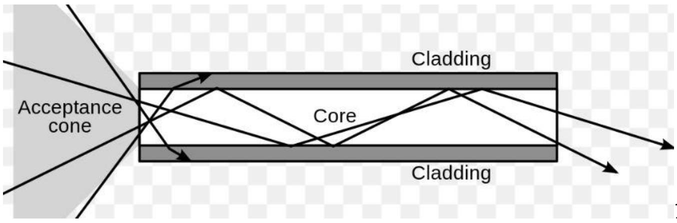


fig. 4

Riflessione totale in una fibra ottica (fig. 4). Chiaramente, dopo innumerevoli riflessioni (*totali*), il segnale si attenua

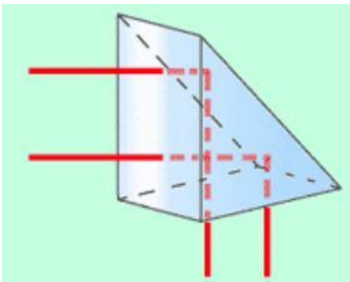


fig. 5

Prisma a sezione di triangolo rettangolo isoscele, riflessione totale a 90°.

Parte superiore di un periscopio. La luce entra orizzontalmente ed è riflessa verticalmente verso il basso (nel sommergibile). Il periscopio in basso ha un prisma analogo, che riflette la luce orizzontalmente verso destra, dove siede l’operatore

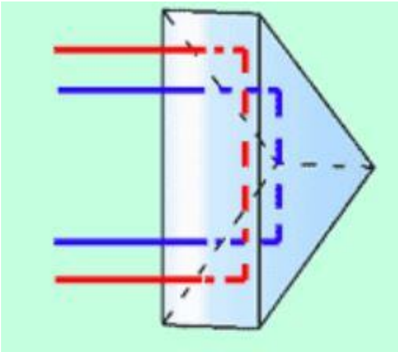


fig. 6

Riflessione totale a 180°

Due di tali prismi sono messi dietro gli obiettivi di un binocolo; una seconda coppia di tali prismi rimanda la luce verso destra, agli oculari. Le cose vanno come se il binocolo fosse tre volte più lungo, consentendo una lunghezza focale tripla e quindi un maggiore ingrandimento. Un binocolo troppo lungo sarebbe poco maneggevole.

Esercizio. Sia data una lastra di vetro a facce piane e parallele, con indice di rifrazione **n** rispetto all'aria. Rispondere ai seguenti quesiti, motivando adeguatamente le risposte.

a) Può accadere che un raggio luminoso penetri nella lastra e, arrivato sulla seconda faccia, si rifletta totalmente?

b) Dimostrare che il raggio emergente dalla seconda faccia è parallelo al raggio incidente.

c) Calcolare lo spostamento laterale del raggio emergente rispetto al raggio incidente.

(Si tratta di calcolare la **distanza tra due rette parallele**).

5. Specchi.

Tratterò, nell'ordine, lo specchio parabolico, lo specchio sferico e lo specchio piano e la costruzione dell'immagine di un oggetto puntiforme o esteso, quest'ultimo rappresentato da una freccia.

Specchio parabolico. Si ottiene facendo ruotare un arco di parabola contenente il vertice e simmetrico rispetto all'asse focale intorno a detto asse. La seguente **fig. 3** contiene tutte le proprietà geometriche della parabola, che fanno dello specchio parabolico uno strumento eccezionale in astronomia.

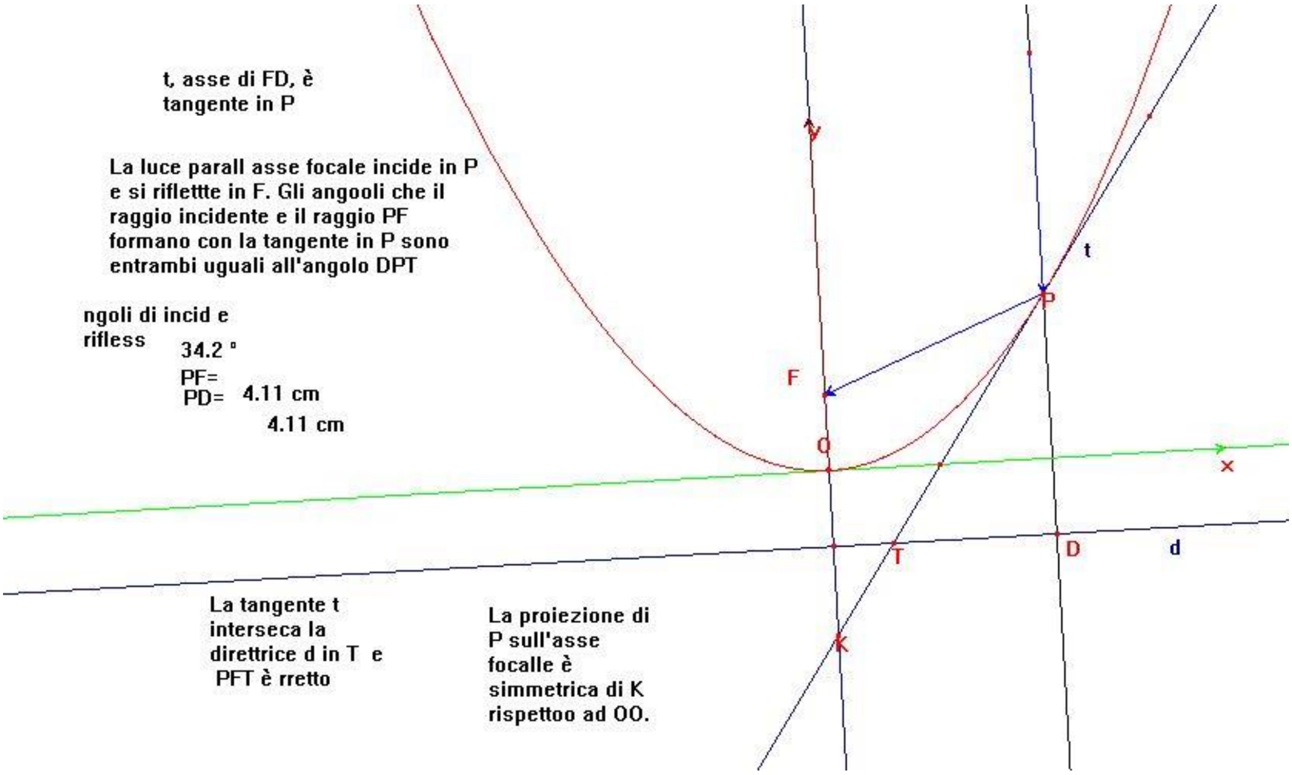


fig. 7

Specchio parabolico concavo (fig. 4)

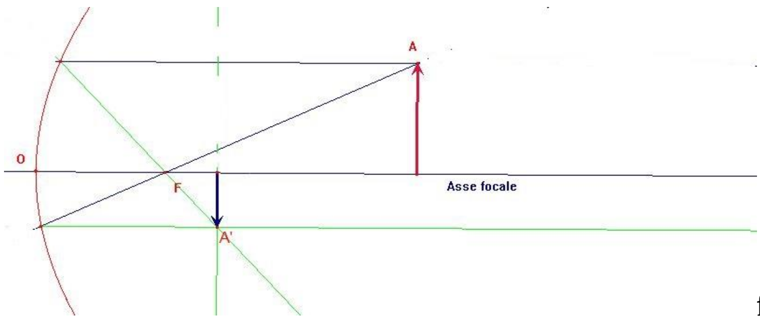


fig. 8

Per convenzione, il semiasse focale di origine O e contenente il fuoco F si assume positivo, il simmetrico si assume negativo. **Nulla cambierebbe** se si assumesse come positivo il semiasse di origine O contenete l'oggetto e negativo l'altro.

Oggetto A: ascissa p, fuoco F: ascissa f rispetto a O, vertice della parabola (e dello specchio parabolico). Immagine A' di ascissa q. Siccome p>f, l'immagine è reale e capovolta. Se l'oggetto A si pone al posto dell'immagine A', le parti si invertono (l'immagine di A' è A).

Nella fig. 8 si osservino i due triangoli di vertice comune F e basi parallele perché entrambe parallele all'asse focale; essi sono simili perché hanno angoli uguali: quelli in F opposti al vertice e gli altri a coppie alterni interni di rette parallele. Se chiamo h la lunghezza di A e h' quella di A', h e h' sono anche le altezze dei due triangoli simili, perciò **h'/h = q/p.** Questo rapporto si chiama **ingrandimento** dello specchio.

Nella prossima fig. 9 si pone l'oggetto A tra lo specchio e il fuoco, 0<p<f. L'ascissa q dell'immagine A' è negativa (dietro lo specchio); immagine virtuale, diritta e ingrandita.

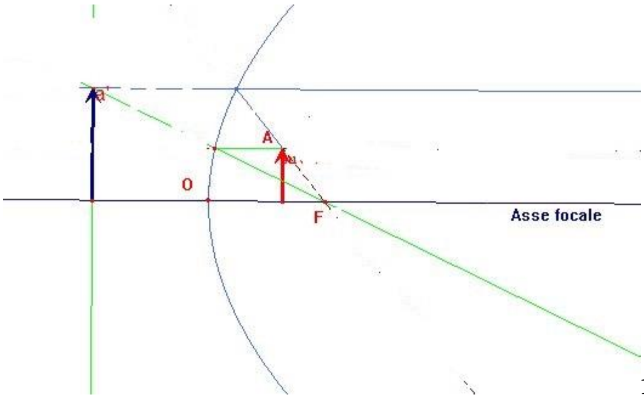


fig. 9

I raggi riflessi divergono, si incontrano i loro prolungamenti.

In questo caso l'ingrandimento q/p è negativo, perchè q<0. Però in modulo è >1.

Specchio parabolico convesso (fig. 10)

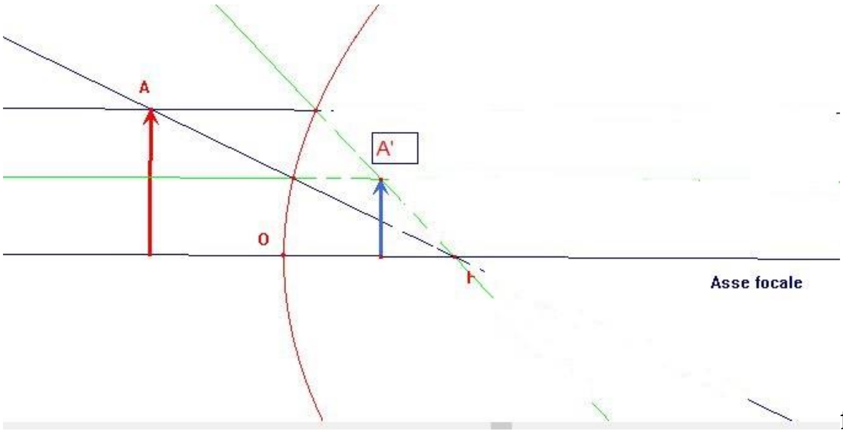


fig. 10

C'è un solo caso:p<0, q>0 ;immagine virtuale (diritta) e rimpicciolita.

Esercizio. Nelle fiig. 8, 9 e 10, costruita l'immagine A' di A, come si riflette il raggio AO?

Specchio sferico. Una calotta sferica ottenuta facendo ruotare un arco di cerchio simmetrico rispetto a un diametro del cerchio. Perché uno specchio sferico sia ***buono,*** minimizzi i difetti, le cosiddette **aberrazioni,** occorre che l'arco di cerchio appartenga a un cerchio aderente il più possibile a una parabola nel suo vertice, il cosiddetto **cerchio osculatore.** Fig. 11

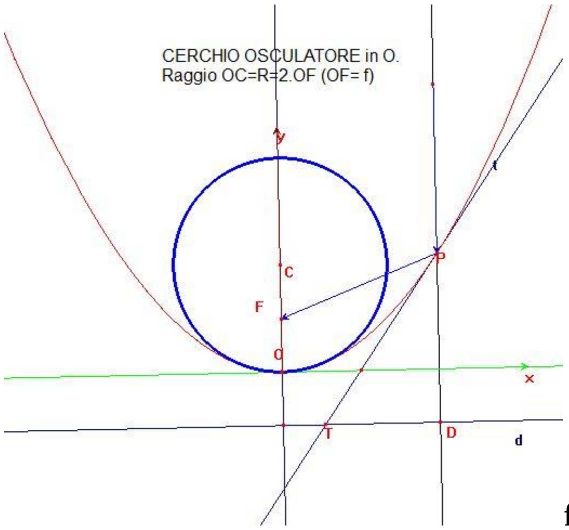


fig. 11

Di cerchi tangenti alla parabola in O ce ne sono infiniti, ma uno solo ha 3 intersezioni coincidenti comuni con la parabola, anzi in questo caso 4, perché vogliamo che il centro C stia sull'asse della parabola. Detto r il raggio CO, l'equazione del cerchio è $x^2+(y-r)^2=r^2$. Semplificando, ho

$x^2+y^2-2ry=0$. Facendo sistema con $y=ax^2$ si ottiene $\mathbf{x^2(1-2ra+a^2x^2) =0.}$ Volendo che cerchio e parabola abbiano 4 intersezioni coincidenti in O, occorre imporre 1-2ra=0, cioè **r=1/(2a).** Ma **f=1/(4a)**, dunque **r=2f,** il doppio della distanza focale della parabola.

A seconda, poi, che sia lucidata la parte interna conca o quella esterna convessa, avremo lo specchio sferico concavo o convesso.

Equazione dei punti coniugati (fig. 12)

Siccome SC è bisettrice di PSQ, PS:QS = PC:CQ. Se lo specchio è di piccola apertura (l'angolo da cui si vede lo specchio da C è piccolo), PS è circa uguale a PO e QS circa uguale a QO. Perciò la proporzione diventa p:q = (p-r).(r-q), ovvero **1/p+1/q=2/r=1/f.**

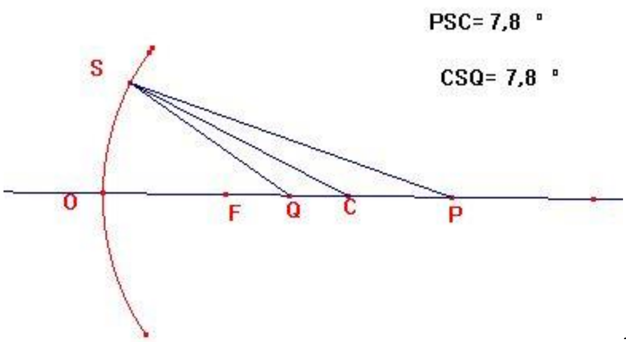


fig. 12

Specchio sferico concavo (vedi fig. 13). *R*appresenta lo specchio con un segmento (blu) per significare che lo specchio è di ***piccola apertura***.

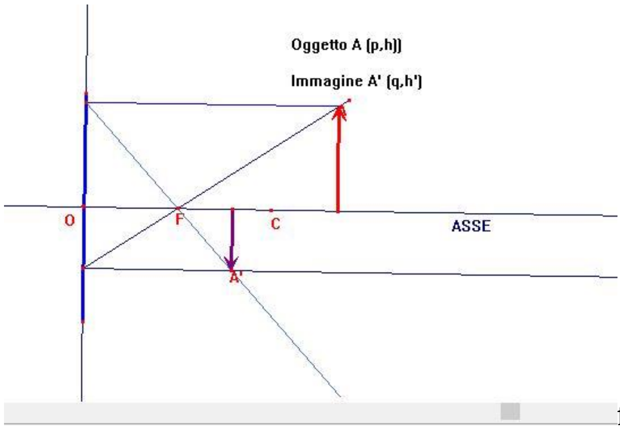


fig. 13

Vale quanto detto per lo specchio parabolico concavo di fig. 8.

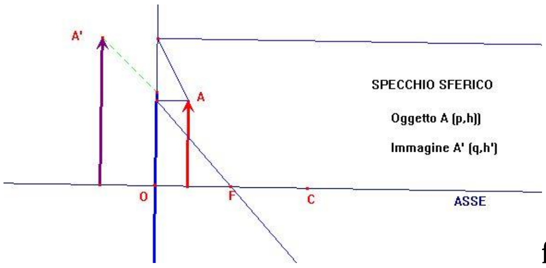
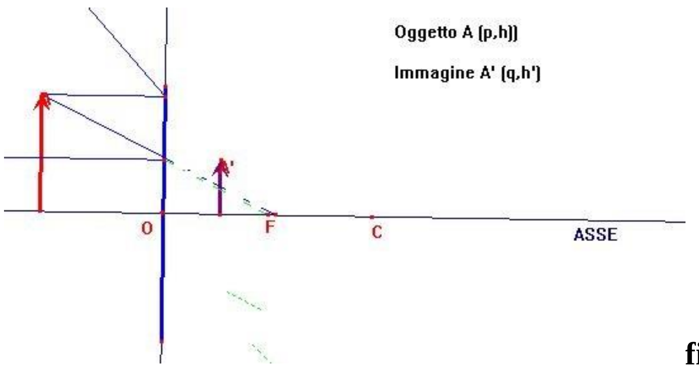


fig. 14

La fig. 14 rappresenta ancora lo specchio sferico concavo, con l'oggetto tra fuoco e specchio, perciò l'immagine è virtuale; f e p positivi, q negativo. Immagine virtuale e ingrandita.

Esercizio. Esprimere l'ingrandimento q/p in funzione di f e p.

Specchio sferico convesso.



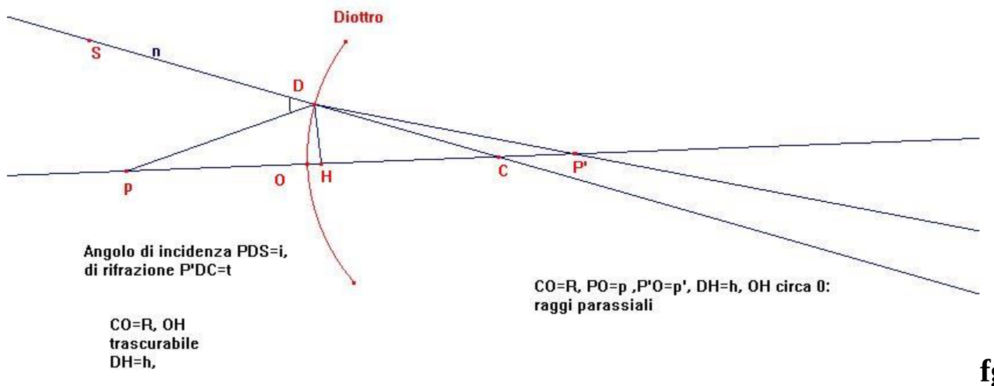
. **fig. 15**

L'oggetto si trova dalla parte convessa dello specchio sferico, perciò la sua ascissa p è negativa.

Esercizio. Se l'oggetto (in rosso) dista 20 cm da O ed f=12 cm (vedi fig. 15), calcola l'ascissa q dell'immagine e l'ingrandimento. Interpretare il valore negativo e il valore assoluto dell'ingrandimento.

Lo specchio piano. Verificare che si tratta del caso limite di uno specchio sferico, ***concavo o convesso,*** la cui distanza focale è infinita. In tal caso q=-p, l'immagine è virtuale e diritta, l'ingrandimento è 1. Avviene solo lo scambio tra ***destra e sinistra***, ma ciò avviene per tutti gli specchi.

6. Il diottro sferico (Calotta sferica che separa due mezzi trasparenti, es. aria-vetro).



fg. 16

Da fig. 16 si capisce che l'oggetto P è nell'aria, l'immagine P' nel vetro. Siccome l'oggetto P vede la faccia convessa del diottro, si parla di diottro convesso.

Vogliamo trovare un legame tra l'ascissa p=OP dell'oggetto, l'ascissa p'=OP' dell'immagine e il raggio di curvatura R=OC del diottro, facendo le ipotesi di raggi parassiali e di grande R (diottro di piccola apertura). Diciamo n_1 l'indice di rifrazione dell'aria, n_2 quello del vetro

Posto DPO=α, DP'O=β, DCO=γ, da noti teoremi di geometria elementare si ricava:

α+γ=i, β+t=γ. Dall'ipotesi di raggi parassiali e quindi di angoli piccoli, segue, posto DH=l:

α=l/p, β=l(p', γ =l/R (OH è infinitesimo) e la legge di Snell (approssimando i seni con gli angoli) dà

$n_1 i = n_2 t$, ovvero $n_1(l/p+l/R) = n_2(1(R-1)p'$. Segue

5) $n_1/p + n_2/p' = (n2-n_1)/R$.

Fuochi del diottro. Se l'immagine va all'infinito (p'=∞), il punto oggetto si chiama primo fuoco (F_1) e la sua distanza **$f_1=p=n_1R/(n_2-n_1)$.** Se invece va all'infinito il punto oggetto P, il punto immagine si chiama secondo fuoco e la sua distanza focale è **$f_2=n_2R/(n_2-n_1)$. (Vedi fig. 17)**

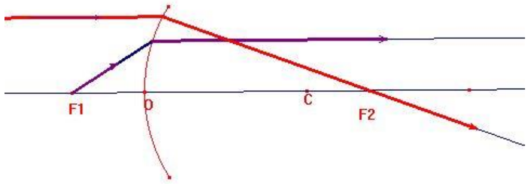


fig. 17

7. Lenti sferiche. Sono fatte di vetro o altro materiale trasparente, con indice ti rifrazione n_2 maggiore di quello n_1 dell'aria, limitato da due diottri sferici.

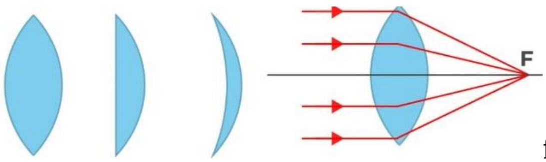


fig. 18

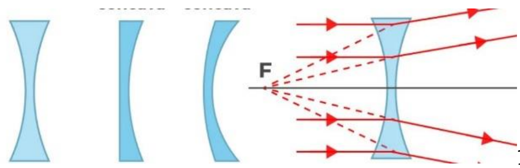


fig. 19

Nella fig. 18 sono riportati i tre tipi di lenti convergenti: **biconvessa**, **piano-convessa** e **menisco convergente;** nella fig. 19 le divergenti: **biconcava, piano-concava e menisco divergente.**

Nota. La **convenzione** sui segni dei raggi di curvatura dei due diottri è la seguente: **R_1 (R_2)** è **positivo** se il raggio luminoso, propagandosi dall'aria verso la lent**e,** incontra la faccia **convessa del diottro,** è negativo se incontra la faccia **concava, è infinito** se incontra una faccia **pian.**

Con questa convenzione, l'equazione dei punti coniugati, che dimostreremo tra breve per la lente biconvessa, sarà valida per tutti i tipi di lenti sferiche.

Equazione dei punti coniugati.

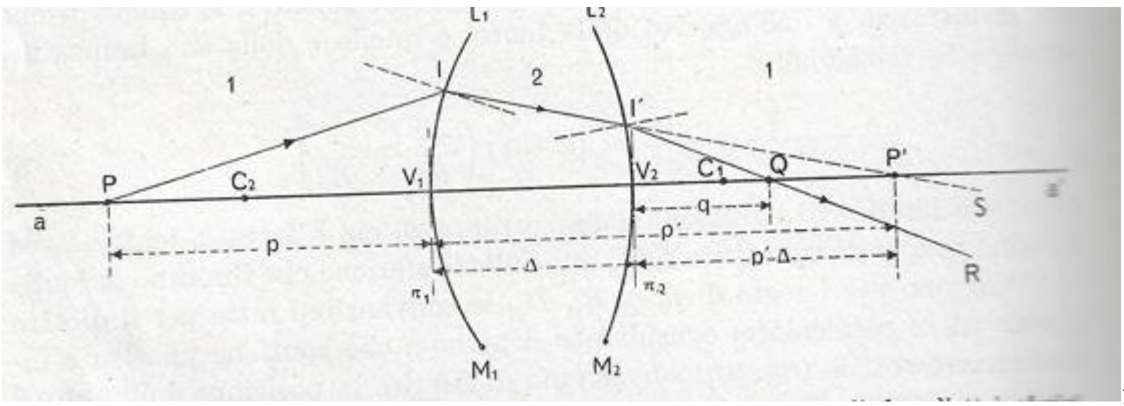


fig. 20

Dobbiamo applicare la formula **5.**) del diottro ai due diottri che limitano la lente

Detto R_1 il raggio di curvatura del diottro di sinistra, R_2 quello di destra, si ha (vedi fig. 20):

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{p'}=\frac{n_{2-n_1}}{R_1}$$

$$\frac{n_1}{q}-\frac{n_2}{p'-\Delta}=\frac{n_{2-n_1}}{R_2}$$

. Se si fa l'ipotesi di ***lenti sottili*** (Δ trascurabile risetto a p, p', …), sommando membro a membro si ottiene l'equazione dei punti coniugati per la lente.

$$6)\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{n_{2--n_1}}{n_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Data la simmetria tra p e q, i due fuochi della lente hanno la stessa distanza focale f.

S p (o q) tende all'infinito, q (o p)) =f e dalla 6) segue:

$$7)\ f=\frac{n_1R_1R_2}{(n_2-n_1)(R_1+R_2)}\ .$$

Esercizio a. Come si può capire con un'occhiata che le lenti di fig. 18 sono convergenti e quelle di fig. 19 sono divergenti?

Esercizio b. I raggi della luce solare si possono considerare paralleli**?** Si può accendere un fuoco, utilizzando i raggi solari, con una lente convergente? E con una divergente? Giustificare le risposte.

Esercizio c. Una lente menisco convergente (terza lente di fig. 18) ha raggi di curvatura di valore assoluto 12 cm e 18 cm. Attribuire ai due menischi i raggi di curvatura in valore e segno. Calcolare la distanza focale f, sapendo che l'indice di rifrazione del vetro rispetto all'aria è 1,5 e verificare che risulta f>0.

Stesso esercizio, con gli stessi dati, per una lente menisco divergente, una biconcava, una biconvessa

Costruzione dell'immagine. Lenti sottili

Lente divergente (fig.21). Immagine sempre virtuale, rimpicciolita e diritta. **(f<0)**

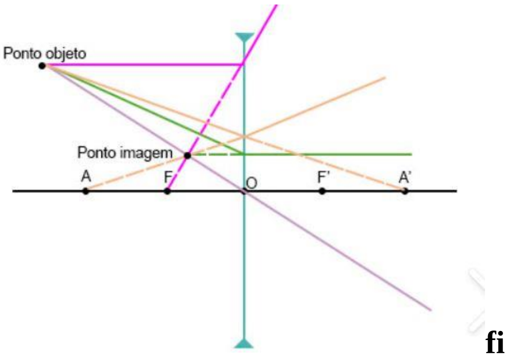


fig.21

Lente convergente (fig.22 immagine reale e capovolta: 0<f<p)

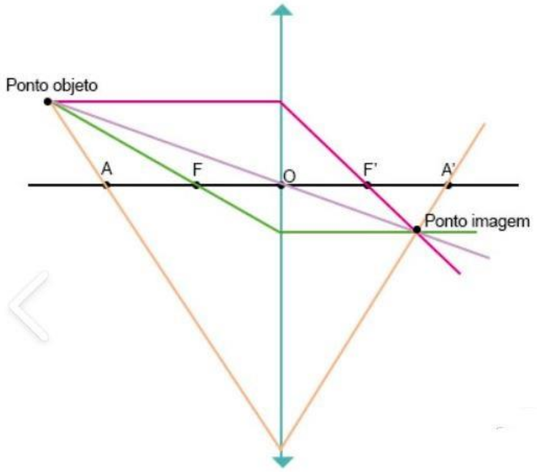


fig. 22

Lente convergente con immagine virtuale e ingrandita (fig.23, 0<p<f.

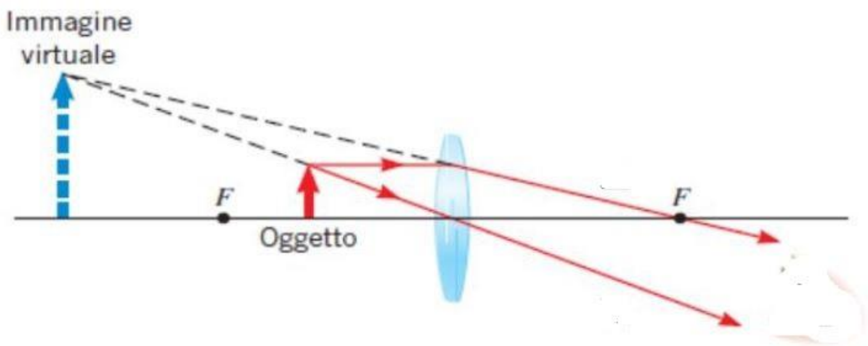


fig. 23

In tutti i casi ci sono tre raggi particolari per costruire il punto immagine:

Il raggio **parallelo** all'asse ottico si rifrange come se provenisse dal primo fuoco se la lente è divergente, puntando verso il secondo fuoco se ka lente è convergente;

Il raggio che **punta** verso il **secondo fuoco** (lente divergente), verso il primo fuoco (lente convergente) si rifrange parallelo all'asse ottici.

Il raggio che passa per il centro della lente non viene deviato.

La lente convergente può essere usata come lente di ingrandimento (microscopio *semplice)*. L'oggetto va posto tra il fuoco e la lente (fig.23).

Difetti rifrattivi della vista e correzione con lenti.

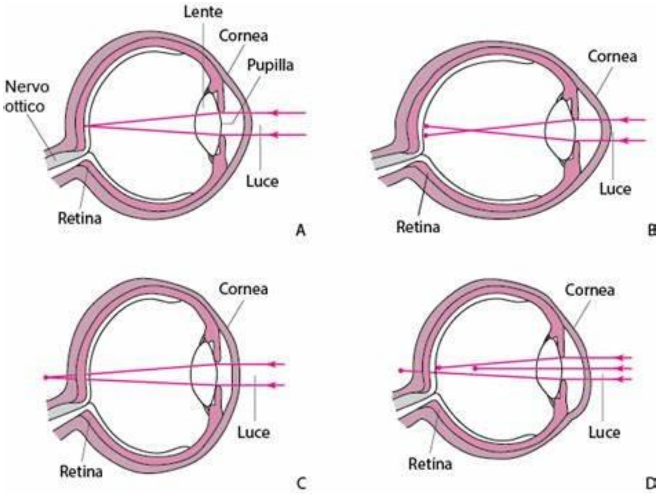


fig. 24

In alto: A sinistra occhio normale (emmetrope). Il cristallino mette correttamente l'immagine a fuoco sulla retina. A destra occhio miope. Il cristallino mette a fuoco prima della retina, perciò si parla di *occhio lungo.* Il soggetto tende ad avvicinare l'occhio all'oggetto, per portare l'immagine a fuoco sulla retina. Il difetto si corregge con lente divergente.

In basso: A sinistra occhio ipermetrope. Il cristallino mette a fuoco l'immagine oltre la retina. Il soggetto tende ad allontanare l'occhio dall'oggetto, per metterne l'immagine a fuoco sulla retina. Il difetto si corregge con lente convergente. A destra occhio astigmatico. Un punto non viene visto come un punto, ma come un trattino. E' un difetto di sfericità del cristallino o della cornea e si corregge con lente ***cilindrica.***

La presbiopia è una conseguenza dell'età avanzata (presbès in greco vuol dire anziano). I muscoli che controllano la convergenza del cristallino con l'età perdono elasticità e il cristallino non mette bene a fuoco l'immagine di oggetti piccoli e vicini. La conseguenza è analoga all'ipermetropia e si corregge con lente convergente.