Ottavio Serra

Omogeneità e simmetria nelle formule

(matematiche e fisiche)

Omogeneità: significa che tutti i termini **(addendi)** di una formula devono avere la stessa *dimensione* (se un termine è una lunghezza, tutti gli altri devono essere lunghezze. Lo stesso dicasi per area, volume, tempo, energia, eccetera). Facciamo degli esempi.

a) Se a, b, c rappresentano lunghezze, la formula a(b+c) =ab+c è sbagliata a priori (il secondo membro è la somma di grandezze non omogenee). Invece $a^2=b^2+c^2$ è corretta perché è un'uguaglianza tra aree (correttezza *sintattica*). Per quan*to* concerne il *significato*, *può* essere una formula matematicamente **valida** se, per esempio, a rappresenta l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti b e c (validità *semantica*), non lo sarebbe, semanticamente, se a, b, c fossero i lati di un triangolo generico. Correttezza (sintattica) e validità (semantica, cioè attinente al significato) non coincidono.

b) Se g è l'accelerazione di gravità ed l è la lunghezza di un pendolo semplice, la formula del periodo T delle (*piccole*) oscillazioni: $T = k\frac{l}{g}$, essendo k una costante numerica di proporzionalità, è sbagliata, perché T ha la dimensione di un tempo, mentre l/g ha la dimensione di un tempo al quadrato. Anche la formula $T = k\sqrt{\frac{g}{l}}$ è sbagliata, come è facile verificare. Un semplice controllo dimensionale permette di concludere che la formula corretta è $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$. Naturalmente, che la costante k sia il numero 2π ce lo può dire solo la fisica, così come solo la fisica ci può dire che la formula vale per *"piccole"* oscillazioni.

(A proposito, quanto deve essere ***piccola*** un'oscillazione perché possa essere considerata ***piccola***?).

c) Dimostrare la terza legge di Keplero con considerazioni dimensionali. Suggerimento: detto T il periodo di rivoluzione, a il semiasse maggiore dell'orbita planetaria, G la costante di gravitazione di Newton, M la massa del Sole, il periodo di rivoluzione T deve essere funzione di G, di M e di a elevati, rispettivamente, a certi esponenti x, y, z da determinare: $T = kG^x M^y a^z$, imponendo che il secondo membro abbia la dimensione di un tempo come il primo membro (k è una costante adimensionale, cioè un numero puro, come 2, π o altro, e non può essere determinato per via dimensionale, solo la fisica, la legge di Newton, ce lo può dire).
La costante numerica k si può determinare in modo elementare, *nell'ipotesi di orbite circolari, uguagliando la forza centripeta e la forza di attrazione newtoniana).*

Simmetria: significa che, se in una formula compare una somma o un prodotto di più termini, essa deve essere *simmetrica*, cioè *invariante*, rispetto allo scambio dei termini (Invariante rispetto al *gruppo* delle permutazioni dei termini). Esempi.

d) Se a, b, c sono i lati di un triangolo e p è il semiperimetro, la formula per l'area S del triangolo non può essere $S = \sqrt{p(p-a)bc}$ perché non è simmetrica (**non è** invariante) rispetto alle permutazioni dei lati. L'area non può dipendere dai **nomi** dei lati. *Si noti che la formula precedente sarebbe* ***corretta*** *dal punto di vista dell'omogeneità*.

e) Se mi si dicesse che l'ipotenusa a di un triangolo rettangolo è legata ai cateti b e c dalla formula $a^2=b^2+2c^2$, non avrei bisogno di contro-esempi per capire che non è corretta; infatti non è simmetrica rispetto ai due cateti, non è invariante rispetto al loro scambio.

f) Propongo ora una serie di formule per l'area del triangolo.

1) $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$ [Simmetrica, ma non omogenea: il primo membro ha la dimensione del quadrato di una lunghezza, il secondo di una quarta potenza (L^2 ed L^4 rispettivamente), perciò **è sicuramente sbagliata**];

2) $S = \sqrt{p(p+a)(p-b)(p-c)}$ [Omogenea, ma non simmetrica, vale a dire non è invariante rispetto al gruppo delle permutazioni dei lati, perciò **è sbagliata**];

3) $S = \sqrt{2p(p-a)(p-b)(p-c)}$ [Omogenea e simmetrica, **potrebbe essere validaa**];

4) $S = \sqrt{pabc}$ [Omogenea e simmetrica, **potrebbe essere valida**];

5) $S = \sqrt{\dfrac{pabc}{10}}$ [Omogenea e simmetrica, **potrebbe essere valida**];];

6) $S = \sqrt{p(p+a)(p+b)(p+c)}$ [Omogenea e simmetrica, **potrebbe essere valida];**

7) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ [Omogenea e simmetrica, **potrebbe essere valida**].

Delle sette formule proposte le prime due sono certamente sbagliate, ma come facciamo a capire se tra le rimanenti cinque c'è quella giusta? Magari sono tutte sbagliate. Testiamo le cinque formule nel caso del triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5.

L'area è il semiprodotto dei cateti, cioè S=6.

La formula (3) dà $S = \sqrt{2.6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{12.3.2.1} = 6\sqrt{2} \neq 6$: **è sbagliata**;

la formula (**4**) dà $S = \sqrt{6.3.4.5} \neq 6$: **è sbagliata; (sbagliata significa non valida);**

la formula (**5**) dà $S = \sqrt{\dfrac{6.3.4.5}{10}} = 6$: **potrebbe essere valida,** anche se quel denominatore 10 mi **puzza;**

la formula (6) dà $S = \sqrt{6(6+3)(6+4)(6+5)} \neq 6$: **è sbagliata**;

la formula (**7**) dà $S = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = 6$: **potrebbe essere valida.**

Per dirimere tra la (**5**) e la (**7**) facciamo un altro test. Consideriamo il triangolo isoscele di lato obliquo 5 e base 6. L'altezza risulta essere 4 e l'area S=12. Il semiperimetro è p=8, perciò la (**5**) dà

$S = \sqrt{\dfrac{pabc}{10}} = \sqrt{\dfrac{8.5.5.6}{10}} = \sqrt{8.5.3} = \sqrt{120} \neq 12$: **anche la (5) è sbagliata.**

Invece dalla (**7**) si ricava $S=\sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)}=\sqrt{8.3.3.2}=12$: **la (6) potrebbe essere valida. Ma quanti altri test dovrebbe superare per essere dichiarata tale? Le terne di numeri che rappresentano la lunghezza dei lati di un triangolo sono infinite!**

OSSERVAZIONE *su un punto di logica*: mentre un solo test contrario assicura che una formula, corretta a livello sintattico) è sbagliata (non valida), un numero finito, per quanto grande, di test favorevoli non garantisce la sua validità (Si rischia di fare la *fine del tacchino*. Vedi il mio articolo: *Il tacchino di Russell*[1]*)*. Occorre una ***dimostrazione generale***.

Per inciso, la formula (**7**) è valida (nel linguaggio comune si dice anche *giusta)*: è la formula di Erone e si può ***dimostrare*** con la trigonometria.

Si osservi ancora che omogeneità e simmetria riguardano la sintassi (la correttezza formale) e sono condizione necessaria, ma non sufficiente, per la validità semantica (che attiene al significato).

Nota sulla simmetria. Il concetto di simmetria è fondamentale non solo in matematica e in fisica classica, ma anche nella teoria della **Relatività** e in **Meccanica Quantistica**; per inciso le leggi di conservazione, che rappresentano i pilastri della fisica e una guida sicura per nuove scoperte (si pensi all'effetto Compton e alle ricerche teoriche e sperimentali con gli acceleratori), discendono da principi generali di simmetria[2]. Il profondo legame tra principi di simmetria e leggi di conservazione è stato chiarito in modo generale dalla grande matematica tedesca Amalia Emmy Noether (1882 –1935), una delle più geniali menti matematiche del primo '900, alla quale va anche il merito di aver dato forma pressoché definitiva alla moderna *Algebra astratta*.

---

[1] Ottavio Serra, *Il tacchino di Russell e altre storie* nel sito **http://digilander.libero.it/ottavioserra0** cartella *Lezioni allo Scorza*, sottocartella *Probabilità 2016.*

[2] Ottavio Serra, *Principi di simmetria e leggi di conservazione* sulla rivista "*Il Foglio*" del Liceo classico *Garibaldi* di Castrovillari. Si trova anche nel sito su citato, cartella Articoli/ *Liceo classico Garibaldi di Castrovillari.*