Ottavio Serra

Odografo di un punto mobile

L'odografo di un punto mobile P è la curva descritta dall'estremo del vettore velocità applicato in un punto fisso O. L'odografo è la rappresentazione del moto nello spazio delle velocità. A volte si parla di odografo del momento (lineare), cioè della quantità di moto, che è essenzialmente coincidente con quello della velocità, perché la massa della particella P è una costante.
L'odografo del moto parabolico è una retta, verticale se la resistenza del mezzo è zero obliqua in presenza di resistenza del mezzo (supporremo una resistenza viscosa, cioè proporzionale alla velocità). Nel caso del moto kepleriano ellittico, (moto di un pianeta intorno al Sole), l'odografo è un cerchio, eccentrico rispetto al fuoco, centro del moto. E' chiaro che se il moto è circolare, l'odografo è un cerchio centrato. Tutto ciò l'ho verificato con software di mia realizzazione[1]. Lo spunto per questo articolo mi è stato offerto dalla rubrica *Il matematico impertinente* di Piergiorgio Odifreddi su "Le Scienze" del mese di maggio 2010, dal titolo "*Feynman in azione*". Nelle righe seguenti darò la dimostrazioni di quanto affermato.

a) **Moto parabolico senza resistenza del mezzo**. In questo caso la dimostrazione è immediata. Infatti, dalle equazioni del moto, $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$ segue $\begin{cases} \dot{x} = v_x = v_{0x} \\ \dot{y} = v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$ equazioni parametriche di un segmento *verticale* $v_x = v_{0x}$.

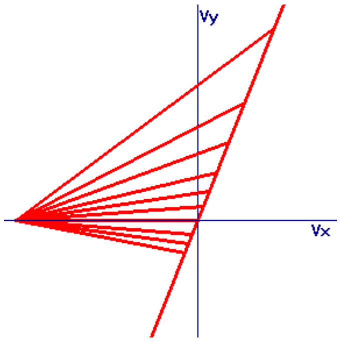
b) **Moto parabolico con resistenza del mezzo**: $\vec{F} = m\vec{g} - \beta\vec{v}$, da cui segue $\begin{cases} \ddot{x} = -k\dot{x} \\ \ddot{y} = -g - k\dot{y} \end{cases}$ ($k=\beta/m$).

La prima equazione del sistema si integra subito e fornisce $v_x=v_{0x}e^{-kt}$, la seconda dà $\frac{d\dot{y}}{g+k\dot{y}} = -dt \Rightarrow \log(g+k\dot{y}) = -kt + C \Rightarrow g + k\dot{y} = Ae^{-kt}$, che, con la condizione iniziale $\dot{y}(0) = v_{0y}$,

fornisce $A=g+kv_{0y}$, da cui $\dot{y} \equiv v_y = (\frac{g}{k} + v_{0y})e^{-kt} - \frac{g}{k}$. Le equazioni parametriche dell'odografo sono perciò $\begin{cases} \dot{x} \equiv v_x = v_{0x}e^{-kt} \\ \dot{y} \equiv v_y = (v_{0y} + \frac{g}{k})e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{cases}$, che, nel piano v_x, v_y, rappresentano la retta $v_y = (v_{0y} + \frac{g}{k})\frac{v_x}{v_{0x}} - \frac{g}{k}$.

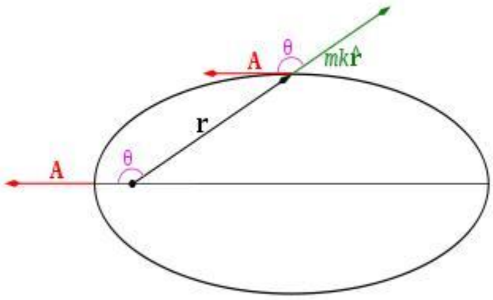
Per $k \to 0$ si ottiene il segmento verticale del caso **a)**.

[1] Vedi sito digilander.libero.it/ottavioserra0/fisica/ galileo ; Newton; Einstein.



c) Moto kepleriano (pianeta soggetto alla forza di Newton).

Il vettore di Laplace è definito dalla formula $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r}$, essendo k il parametro che rappresenta l'intensità della forza centrale: k=GM. Siccome $\vec{p} \times \vec{L}$ è perpendicolare al momento angolare, esso giace nel piano dell'orbita, come $\hat{r}$ (versore del raggio vettore r), perciò anche $\vec{A}$ giace nel piano dell'orbita. (Vedi fig. qui sotto).



Forma ed orientamento dell'orbita possono essere determinati a partire dal vettore di Laplace, come segue. Eseguendo il prodotto scalare fra **A** ed il vettore posizione **r** si ottiene l'equazione

$$\vec{A}.\vec{r} \equiv ArCos\theta = \vec{r}.(\vec{p} \times \vec{L}) - mkr .$$

(Vedi fig. precedente).

Permutando il triplo prodotto vettoriale, si ottiene

$$\vec{r}.(\vec{p} \times \vec{L}) = (\vec{r} \times \vec{p}).\vec{L} = \vec{L}.\vec{L} = L^2 .$$

Sostituendo nell'equazione precedente, si ottiene l'equazione polare dell'orbita (conica):

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2}\left(1 + \frac{A}{mk} Cos\theta\right), \text{l'eccentricità } e = \frac{A}{mk}$$

e il parametro p della conica (qui p è il parametro della conica, non la quantità di moto). Infatti, per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

$$r \equiv p = \frac{L^2}{mk}.$$

Il semiasse maggiore *a* della conica può essere ottenuto a partire dal parametro p e dall'eccentricità

$$a = \frac{1}{2}\left(r_{\theta=0} + r_{\theta=\pi}\right) = \frac{p}{1-e^2}.$$

Dall'espressione del vettore di Laplace si ricava

$$mk\hat{r} = \vec{p} \times \vec{L} - \vec{A}.$$

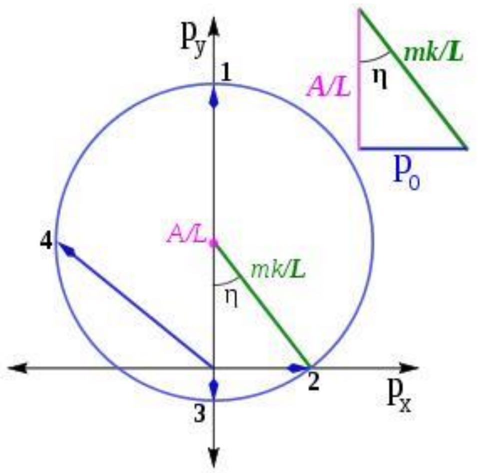
Facendo il quadrato scalare di ambo i membri, si ottiene

$$(mk)^2 = A^2 + p^2L^2 + 2\mathbf{L} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A}) \ .$$

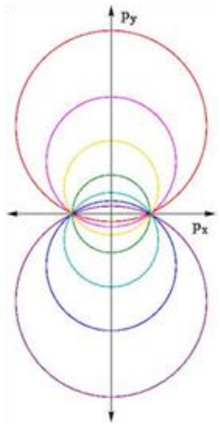
Scegliendo l'asse z lungo il vettore momento angolare $\vec{L}$, segue che il vettore quantità di moto $\vec{p}$ giace nel piano xy, per cui le componenti p_x e p_y soddisfano l'equazione

$$p_x^2 + (p_y - A/L)^2 = (mk/L)^2 \ .$$

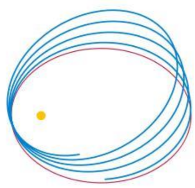
Questa è l'equazione di un cerchio di raggio mk/L centrato nel punto (0, A/L). L'eccentricità è il coseno dell'angolo η (vedi la figura sottostante). Tale cerchio rappresenta l'odografo del moto kepleriano.



Si dimostra poi che, a parità di energia, i cerchi odografi del moto kepleriano passano per due punti fissi dell'asse p_x: A(p_0,0) e B(-p_0,0), essendo $p_0 = \sqrt{2m|E|}$ (vedi fig. seguente).

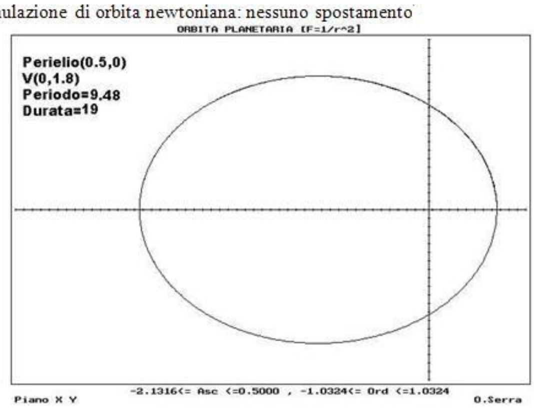


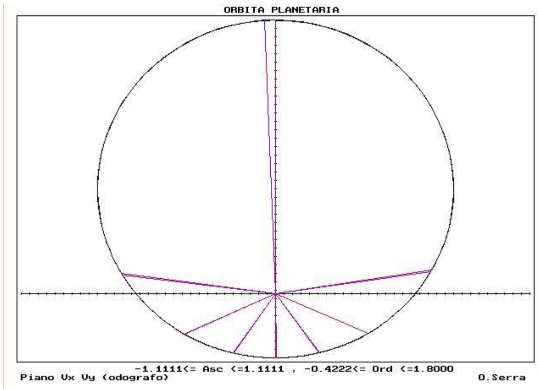
Se la forza (centrale) non è proporzionale ad $1/r^2$, come per esempio quando si vuole simulare la legge gravitazionale secondo la relatività generale, l'orbita non è più un'ellisse (sempre che l'energia totale sia negativa, cioè che il moto sia legato) e l'odografo non è più un cerchio, perché è una curva aperta, però ha una conformazione abbastanza tondeggiante. Lo spostamento del perielio è tanto più marcato quanto più l'esponente, nella legge di forza, è diverso da 2. (Vedi la figura sottostante che rappresenta lo spostamento del perielio).



Tutte queste proprietà le ho controllate con i miei programmi "Newton" ed "Einstein" citati nella nota[1]. Appresso vengono riportate le immagini da me ottenute simulando la legge di gravitazione con la similitudine meccanica GMm=1, m-ridotta del pianeta = 1, distanza perielia = 0,5. In tal modo si ha orbita legata (ellittica nel caso newtoniano), se la velocità al perielio è compresa tra $\sqrt{2}$ e 2. Io ho scelto v(perielio)=1,8. Il periodo risulta 9,48; io ho imposto durata=19, in modo che il pianeta percorresse poco più di due orbite (rigorosamente sovrapposte nel caso newtoniano.

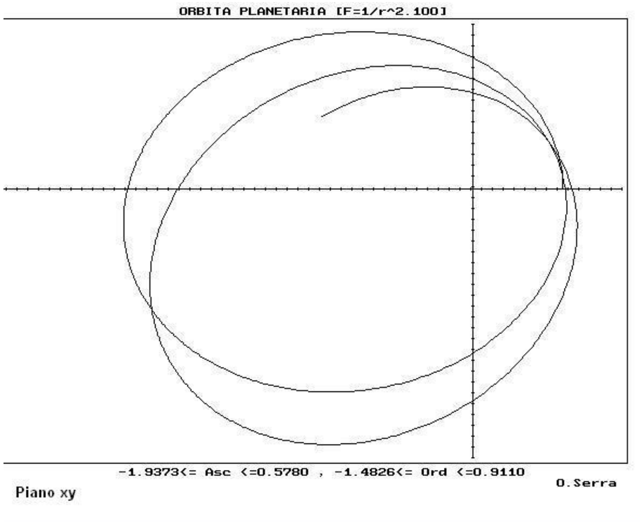
simulazione di orbita newtoniana: nessuno spostamento

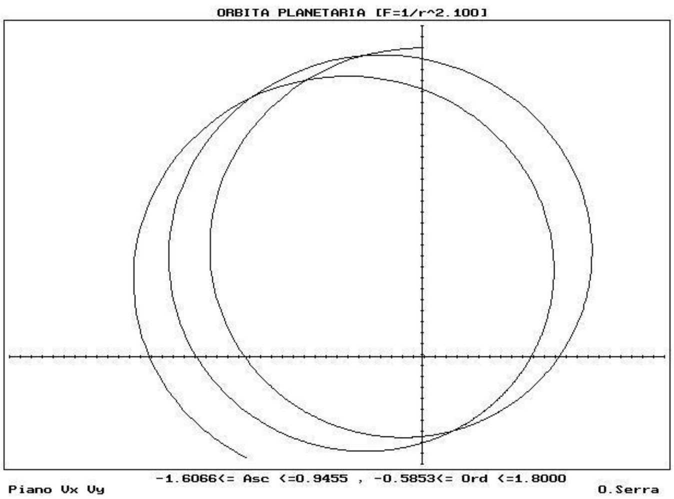




Si noti che l'odografo è un cerchio

Seguono ora le immagini corrispondenti nella simulazione relativistica con legge di forza $1/r^{2,1}$, ma per il resto con gli stessi dati del caso newtoniano precedente.





L'odografo è aperto, ma ha un andamento tondeggiante.

Per finire un'orbita "vera" di una pulsar binaria: lo spostamento del periastro è fortissimo. Orbita nel piano xy.

Precessione del periastro di una pulsar binaria osservata dal 1976 al 1981