Ottavio Serra

Su una classe notevole di numeri reali.

Numeri isofratti.

1. Un numero reale x si dice *metallico* se è la radice positiva dell'equazione $x^2=px+1$. Perciò

$x=\frac{\sqrt{p^2+4}+p}{2}$. L'inverso di x è $\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{p^2+4}-p}{2}$. (si noti che 1/x è l'opposto della radice negativa dell'equazione caratteristica).

Chiamerò il coefficiente p *parametro metallico.*[1](Per p=1 si ottiene il numero aureo).

I numeri metallici godono di molte notevoli proprietà. In questa nota mi occuperò di una proprietà particolare: **se p è intero, un numero metallico e il suo inverso hanno la stessa parte decimale.**

Infatti la differenza è p. Notare che la proprietà dipende dall'essere p intero, e l'essere un numero intero o non intero **non dipende** dalla **base di numerazione**. A rigore si dovrebbe, perciò, dire *parte frazionaria, ma basta intenderci sul significato delle parole.*

Un numero che goda della proprietà suddetta lo chiamerò, per brevità, ***isofratto.***

Siccome i numeri metallici sono irrazionali, mi chiedo dapprima se esistano numeri **razionali** (positivi) **isofratti**. Suppongo che x sia maggiore di 1/x, altrimenti scambio i nomi. Posto x=a/b, l'inverso è b/a (a, b numeri naturali, con a>b). Affinché x e 1/x abbiano la stessa parte decimale, **siano,cioò, isofratti,** occorre che x-(1/x) sia intero. Ciò richiede che $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}$ sia tale che ab divida a^2-b^2 e quindi che $\mathbf{a^2-b^2=n.a.b}$, con **n** intero. Risolvendo rispetto ad a, si ottiene $a=b.\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ e quindi condizione preliminare è che n^2+4 si un quadrato perfetto: $n^2+4 = q^2$. Si vede subito che q è compreso tra n ed n+2, ma q è intero, perciò deve essere q=n+1. Si ottiene una contraddizione: $q^2=n^2+4=(n+1)^2$ e quindi 2n=3, contro l'ipotesi che n sia intero.

Si conclude che non esistono numeri razionali isofratti (escluso il caso banale x=1).

Tali numeri vanno cerati, perciò tra gli irrazionali, come i numeri metallici.

2. Per analogia con i numeri metallici, mi occuperò dei numeri reali (positivi) del tipo $x=\frac{\sqrt{a}+b}{c}$ con a, b e c razionali positivi, sperando di trovare una classe di numeri isofratti più ampia di quella dei numeri metallici a parametro intero, che ne costituirebbero un sottoinsieme.

NOTA: Per i calcoli successivi è più comodo usare la formula $x=\frac{\sqrt{a}-b}{c}$ con -b anzicchè con +b.

---

[1] Vedi, ad esempio, *Successioni di Fibonacci e generalizzazione* nel mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0* cartella *Articoli* sottocartella *miscellanea*. In questo articolo si trovano altri riferimenti.

L'inverso di x è $\frac{1}{x}=\frac{c}{\sqrt{a}-b}=\frac{c(\sqrt{a}+b)}{a-b^2}$. Questo avrà la stessa parte decimale di x, se la differenza $\frac{\sqrt{a}-b}{c}-\frac{c(\sqrt{a}+b)}{a-b^2}$ si riduce a un numero intero. Ciò richiede prima di tutto che il coefficiente di $\sqrt{a}$ sia nullo, cioè che $\frac{1}{c}-\frac{c}{a-b^2}=0$, da cui segue $a=b^2+c^2$.

In secondo luogo occorre che $-\frac{b}{c}-\frac{cb}{a-b^2}=-\frac{2b}{c}$ sia un numero intero -p.

Perciò $a=c^2+b^2=c^2+c^2p^2/4$ e quindi $x=\frac{\sqrt{c^2+c^2p^2/4}-cp/2}{c}=\frac{\sqrt{p^2+4}-p}{2}$.

Dunque, ottengo **soltanto** i numeri metallici (con parametro intero).

Verificare che si ottengono ancora numeri metallici, cercando tra i numeri del tipo $\sqrt{a}+b$, (o $\sqrt{a}-b$, tanto è inifferente),con a e b razionali (positivi) e a non quadrato.

Verificare che non esistono numeri isofratti del tipo $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (a e b non quadrati).

Dimostro ora che non esistono numer isofratti del tipo $X=\sqrt[n]{a}-b$, con n>2. (Ovviamente, a e b positivi e a non potenza n-ma perfetta). Per l'inverso di X si ottiene

$\frac{1}{X}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}-b}=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}+b\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-2}+b^2\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-3}+...+b^{n-1}}{a-b^n}$. Condizione ***necessaria*** perché X (o 1/X) sia isofratto è che in $\frac{1}{X}$ il coefficiente di $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}$ sia nullo, perché il termine ($\sqrt[n]{a}$)$^{n-1}$ non compare in X; ma ciò è impossibile, perchè tale coefficiciente è l'inverso di $a-b^n$.

Si conclude che i numeri del tipo $X=\sqrt[n]{a}-b$, (ovvero del tipo $\sqrt[n]{a}+b$), sono ***isofratti se e solo se n=2,*** $\sqrt{a}+\sqrt{b}++c$ ***cioè se e solo sono numeri metallici.***

Esercizio. Dimostrare che i numeri del tipo $\sqrt{a}+\sqrt{b}+c$, con a, b, c razionali positivi e a e b non qudrati perfetti, sono isofratti solo se b=a (e dunque si ritorna ai numeri metallici).

Viene il sospetto che i numeri isofratti siano solo i numeri metallici a parametro intero e infatti è così, come si dimostra facilmente.

Se X è isofratto, ha la stessa parte decimale di 1/X: il loro prodotto è 1 e la loro iffeerenza è un numero intero n. Posto $x_1=X$, $x_2=-1/X$, $x_1.x_2 = -1$ e $x_1+x_2 =n$, perciò x_1 e x_2 sono radici dell'equazione $x^2-nx-1=0$ e dunque $X=x_1$ è un numero metallico di classe (caratteristica) n.
Si conclude che non ci sono numeri isofratti all'infuori ddei numeri metallici di carattteristica intera.
Osservazione Qualcuno si potrebbe chiedere come mai ho perso tanto tempo nei paragrafi precedeni, se alla fine ho dimostrato in poche righe che i numeri isofratti sono necessariamente metallici. Il motivo è che non ho visto subito la semplice soluzione e ho lasciato i tentativi precedeti volti a trovare numeri isofratti non metallici come documentazione psicologica del lavorio matematico.