OTTAVIO SERRA

MOTO DI UN PROIETTILE IN UN MEZZO RESISTENTE

Premessa. Lo studio del moto di un proiettile in assenza di resistenza del mezzo è elementare; si può trattare con le conoscenze matematiche del 3° Liceo scientifico. Se si tiene conto della resistenza del mezzo, il grado di difficoltà dipende dal tipo di resistenza:
1° Resistenza viscosa, cioè resistenza proporzionale alla prima potenza della velocità, il ché accade se la velocità è piccola, al massimo un metro al secondo. In tal caso basta una conoscenza elementare del calcolo integrale.
2° Resistenza idraulica, cioè resistenza proporzionale al quadrato della velocità; l'esperienza insegna che ciò si verifica se la velocità supera un metro al secondo. In tal caso occorre conoscere le tecniche risolutive delle (dei sistemi di) equazioni differenziali.
Cominciamo dal 1° caso.
1°Resistenza viscosa. L'equazione del moto è $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$ e dividendo per la massa m:

[1] $\vec{a} \equiv \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \alpha\vec{v}.$

(Si ricordi che l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo. La costante α è la resistenza del mezzo per unità di massa; si misura in s^{-1}).
Proiettando la [1] sugli assi cartesiani, si ottengono due equazioni (differenziali) scalari:

[2] $\begin{cases} \dot{v}_x = -\alpha v_x \\ \dot{v}_y = -g - \alpha v_y \end{cases}$, avendo denotato, come è d'uso, con un puntino la derivata rispetto al tempo.

Si ricordi ancora che il vettore $\vec{g} = (0; -g)$.
La prima delle [2] si integra immediatamente e dà

[3] $v_x = v_{0x}e^{-\alpha t}$, essendo v_{0x} la componente x della velocità iniziale $\vec{v}_0$. (Per $t \rightarrow \infty$ $v_x \rightarrow 0$).

La seconda si scrive $\dfrac{dv_y}{g + \alpha v_y} = -dt$, che fornisce $\dfrac{1}{\alpha}\log(g + \alpha v_y) = -t + c \Rightarrow g + \alpha v_y = Ae^{-\alpha t}$.

La costante A si determina imponendo che, per t=0, $v_y=v_{0y}$, pertanto

$g + \alpha v_y = (g + \alpha v_{0y})e^{-\alpha t} \Rightarrow v_y = (\dfrac{g}{\alpha} + v_{0y})e^{-\alpha t} - \dfrac{g}{\alpha}$, dunque

[4] $v_y = (\dfrac{g}{\alpha} + v_{0y})e^{-\alpha t} - \dfrac{g}{\alpha}$. (Per $t \rightarrow \infty$ $v_y \rightarrow -g/\alpha$ e $v_x \rightarrow 0$: il moto tende a diventare uniforme).

La [3] e la [4] danno rispettivamente la componente x e la componente y della velocità in funzione del tempo.
Vediamo che cosa succede per $\alpha \rightarrow 0$. Siccome per α trascurabile $e^{-\alpha t} = 1 - \alpha t$ +infinitesimi di ordine superiore rispetto ad αt, la [3] fornisce $v_x = v_{0x}$ e la [4] dà $v_y = g/\alpha - gt + v_{0y} - v_{0y} \cdot \alpha t - g/\alpha = v_{0y} - gt$, cioè le formule della velocità del moto uniformemente accelerato nel caso elementare di assenza di resistenza del mezzo.
Supponendo che all'istante iniziale il grave si trovi nell'origine delle coordinate ($x_0=0$, $y_0=0$), calcoliamo x(t) e y(t).

Dalla [3] si ricava $x = -\dfrac{v_{0x}}{\alpha}e^{-\alpha t} + c_1$ e poiché x=0 per t=0, si ottiene $c_1 = \dfrac{v_{0x}}{\alpha}$ e infine

[5] $x=\frac{v_{0x}}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$. Si noti che x non può superare $\frac{v_{0x}}{\alpha}$.

Integriamo ora la [4]. $y=\left(\frac{-g}{\alpha^2}-\frac{v_{0y}}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}-\frac{g}{\alpha}t+c_2$. Calcoliamo c_2 imponendo y=0 per t=0:

$c_2=\frac{g}{\alpha^2}+\frac{v_{0y}}{\alpha}$ e alla fine otteniamo y:

[6] $y=\left(\frac{g}{\alpha^2}+\frac{v_{0y}}{\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha t}\right)-\frac{g}{\alpha}t$.

Vediamo a che cosa si riducono la [5] e la [6] se $\alpha \to 0$.

Dal limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, e^x si approssima con 1+ x, $1-e^{-\alpha t}$ con αt e quindi $x=v_{0x}t$ (moto uniforme lungo l'asse x).

Per approssimare la [6] quando $\alpha \to 0$, occorre un'ulteriore termine nell'approssimazione di e^x (Taylor del 2° ordine):

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+...$ per cui $1-e^{-\alpha t}=\alpha t-\frac{\alpha^2 t^2}{2}+...$ Perciò alla fine

$y=\left(\frac{g}{\alpha^2}+\frac{v_{0y}}{\alpha}\right)\left(\alpha t-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)-\frac{g}{\alpha}t = v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$, come ci si aspetta.

Determiniamo ora la traiettoria del grave nel piano (verticale) x, y.

Dalla [5] ricaviamo $1-e^{-\alpha t}=\frac{\alpha}{v_{0x}}x$ e ancora $t=-\frac{1}{\alpha}\log\left(1-\frac{\alpha x}{v_{0x}}\right)$. Sostituendo nella [6] avremo

$y=\left(\frac{g}{\alpha^2}\frac{v_{0y}}{\alpha}\right)\frac{\alpha x}{v_{0x}}-\frac{g}{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}\log\left(1-\frac{\alpha x}{v_{0x}}\right)\right]$, che scriveremo meglio come segue:

[7] $y=\left(\frac{g}{\alpha^2}+\frac{v_{0y}}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{v_{0x}}x+\frac{g}{\alpha^2}\log\left(1-\frac{\alpha x}{v_{0x}}\right)$.

Da questa equazione ricaviamo ancora una volta che deve essere $x<v_{0x}/\alpha$; la retta $x=v_{0x}/\alpha$ è un asintoto verticale per la traiettoria: $\lim_{x\to\frac{v_{0x}}{\alpha}} y(x)=-\infty$. (Capite perché il limite è negativo?)

Vediamo ora se, per α trascurabile, la traiettoria diventa una parabola, come deve essere in assenza di resistenza del mezzo.

Dobbiamo ricordare l'approssimazione di $\log(1+z)=z-z^2/2+\ldots$ (Taylor). Pertanto,

$\log\left(1-\frac{\alpha x}{v_{0x}}\right)=-\frac{\alpha x}{v_{0x}}-\frac{\alpha^2x^2}{2v_{0x}^2}+...$ e la y della formula [7] diventa

$y=\left(\frac{g}{\alpha^2}+\frac{v_{0y}}{\alpha}\right)\frac{\alpha x}{v_{0x}}+\frac{g}{\alpha^2}\left(-\frac{\alpha x}{v_{0x}}-\frac{\alpha^2x^2}{2v_{0x}^2}\right) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2}=mx-\frac{1}{2}g\frac{1+m^2}{v_0^2}x^2$ (parabola).

Si è posto $m=v_{0y}/v_{0x}$ e perciò $v_{0x}^2=\frac{v_0^2}{1+m^2}$ (vedi la lezione "*moto dei proiettili e parabola di sicurezza*" nel sito[i]).

Propongo ora alcuni grafici ottenuti col mio programma "*Galileo*"[ii] :

(Ho assunto $v_{0x}=v_{0y}=0.2$, $g=0.05$, $\alpha=0.2$)

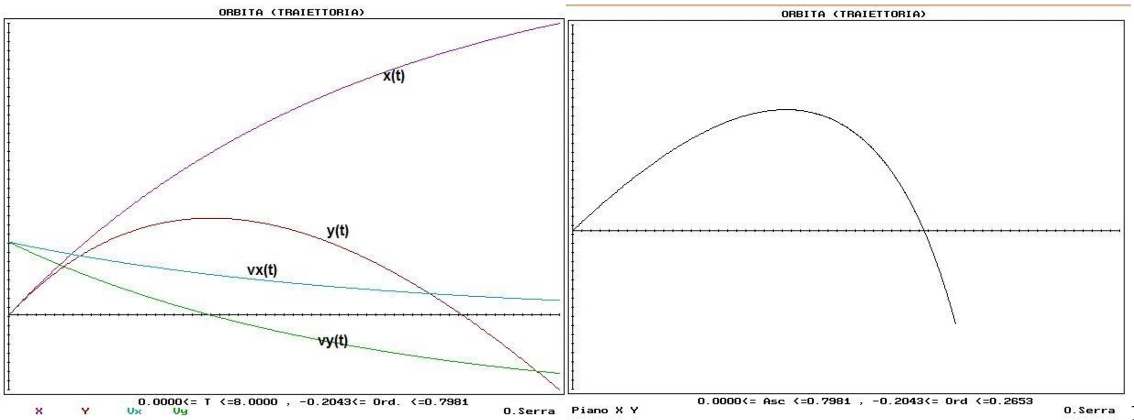


fig1

Ora un grafico realizzato con “Derive” con gli stessi dati di prima che confronta due traiettorie nel piano x, y: una con α=0.2 e l’altra con α=0.4:

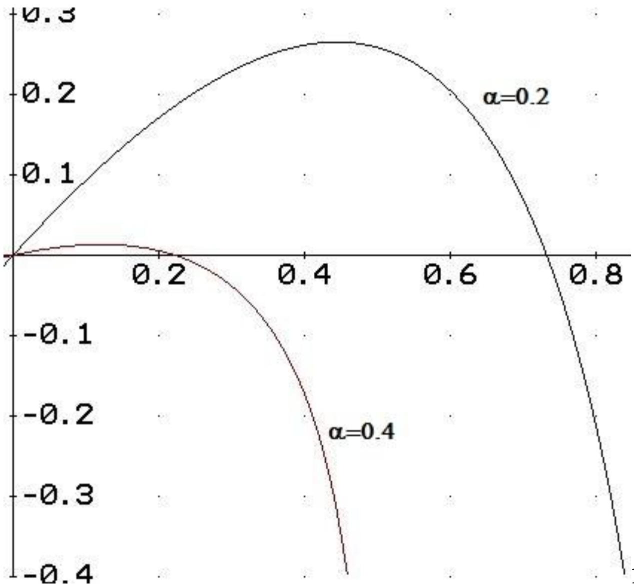


fig2

2° Resistenza idraulica.

In questo caso la legge del moto è

[8] $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{g}-\beta v^2\dfrac{\vec{v}}{v}\equiv\vec{g}-\beta v\vec{v}$. (β si misura in m^{-1}).

Assumeremo le solite condizioni iniziali $x(0)=0$, $y(0)=0$, $v_x(0)=v_{0x}$, $v_y(0)=v_{0y}$.

Proiettando la [8] sugli assi cartesiani, avremo il seguente sistema di equazioni differenziali:

[9] $$\begin{cases}\dot{v}_x=-\beta\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_x\\ \dot{v}_y=-g-\beta\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_y\end{cases}.$$

Questa volta, a differenza del caso di resistenza viscosa, le due equazioni del sistema differenziale non sono integrabili separatamente. Trattiamo alcuni casi particolari.

(a) Moto orizzontale, $v_y=0$. Omettendo il pedice x, avremo: $\dot{v}=-\beta v^2\Rightarrow v=\dfrac{v_0}{1+v_0\beta t}$.

Integrando ancora avremo: $x=\dfrac{1}{\beta}\log(1+v_0\beta t)$. Verificare che, per β trascurabile si ha $x=v_0t$.

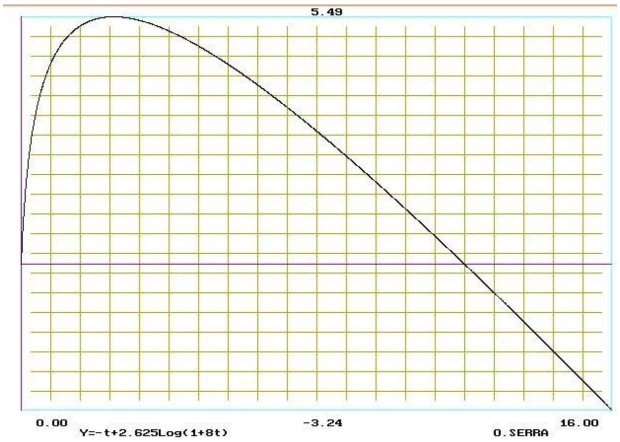
(b) Moto verticale, v_x=0. Omettendo il pedice y, otteniamo $\dot{v} = -g - \beta v^2$.

Verificare che integrando si ottiene

$v = \dfrac{v_0 - gt}{1 + v_0 \beta t}$. E' plausibile questo risultato?

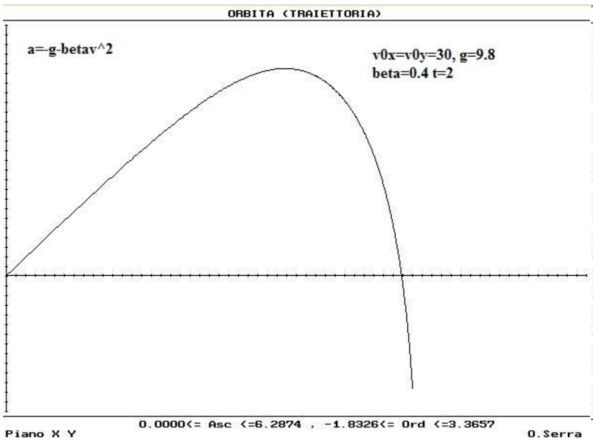
Integrando ancora, otteniamo y(t): $y = -\dfrac{g}{v_0 \beta} t + \left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{g}{v_0^2 \beta 2} \right) \log\left(1 + v_0 \beta t\right)$.

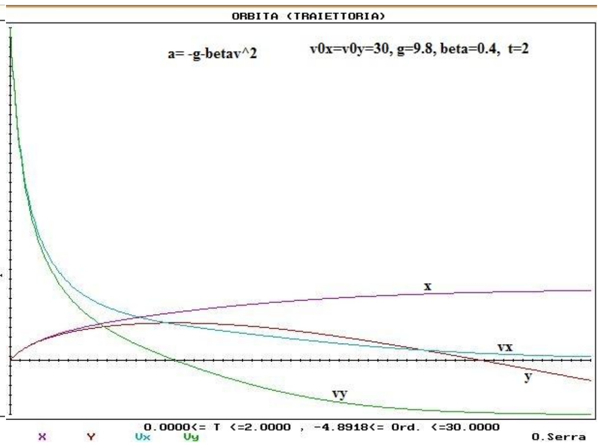
Ecco il diagramma orario (grafico temporale nel piano t, y) per g=8, β=0.4, v_0=20:



Se β è trascurabile, approssimando il logaritmo col polinomio di Taylor di 2° grado $\log(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + ...$ con z=v_0βt, si ottiene la formula elementare y=v_0t-$gt^2/2$ del moto uniformemente accelerato e questo ci conforta sulla correttezza dei calcoli effettuati.

Per integrare il sistema [9] in generale si può ricorrere a metodi numerici, per esempio al metodo di Runge-Kutta da me implementato nel programma "*Galileo3*"[iii].
Presenterò alcuni grafici ottenuti con "*Galileo3*":





[i] digilander.libero.it/ottavioserra0 cartella articoli, miscellanea.
[ii] digilander.libero.it/ottavioserra0 cartella eseguibili, fisica "*Moto di un grave in presenza di resistenza viscosa*".
[iii] digilander.libero.it/ottavioserra0 cartella eseguibili, fisica "*Moto di un grave in presenza di resistenza idraulica*".