OTTAVIO SERRA

MOTO DEI PROIETTILI E PARABOLA DI SICUREZZA

1) Moto di un proiettile in un piano verticale. Lo studio del problema sarà condotto con mezzi elementari; non sono richieste conoscenze di trigonometria né di calcolo delle derivate. Si richiedono solo conoscenze elementari di geometria.
Ipotesi: accelerazione di gravità g costante; resistenza del mezzo trascurabile. Assumiamo la posizione iniziale nell'origine O(0; 0).
Dette v_{0x} e v_{0y} le componenti iniziali della velocità, t il tempo trascorso dall'istante iniziale, le equazioni parametriche del moto sono:

$$[1]\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ricava $t=x/v_{0x}$ e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$[2]\, y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x$$, che è una parabola.

Osserviamo che $\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ rappresenta il coefficiente angolare m della velocità iniziale v_0, che in tutto il seguito assumeremo costante in modulo. (*Adopereremo sempre lo stesso* <u>*cannone*</u>).

Siccome $\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = m \Rightarrow v_{0y} = m.v_{0x}$, dalla relazione $v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_0^2$, si ottiene $v_{0x}^2 = \frac{v_0^2}{1+m^2}$ e l'equazione [2] assume la forma più comoda

$$[3]\, \mathrm{y} = -\frac{1}{2}g\frac{1+m^2}{v_0^2}x^2 + mx .$$

Per y=0 otteniamo le intersezioni della parabola con l'asse x: $x_0=0$ (punto di partenza) e $[4]\, x_G = \frac{2mv_0^2}{g(1+m^2)}$ (Gittata). Il vertice della traiettoria parabolica, come la gittata, dipende dall'*alzo* m. Esso ha ascissa $x = \frac{x_G}{2} = \frac{mv_0^2}{g(1+m^2)}$ e ordinata $y = \frac{m^2v_0^2}{2g(1+m^2)}$.

Si osservi che al variare dell'alzo α da 0° a 90°, ovvero di m da zero (tiro orizzontale) a infinito (tiro verticale), la gittata cresce da zero a un massimo e poi decresce ritornando a zero. Ciò si capisce fisicamente perché, se m tende all'infinito, il tiro è verticale e il proiettile ricade nel punto di partenza. Da un punto di vista matematico, si osservi che la frazione $\frac{m}{1+m^2}$ vale zero per m=0, poi cresce fino a un massimo, che calcoleremo tra poco, e poi de-

cresce a zero perché, se m diventa sempre più grande, 1 è sempre più trascurabile rispetto ad m^2 e la frazione tende a $m/m^2 = 1/m$, che tende a zero al crescere di m.
Invece l'ordinata del vertice va sempre crescendo al crescere di m, da zero per m=0, al massimo $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ per m tendente all'infinito; infatti nella frazione $\frac{m^2}{1+m^2}$, al crescere di m, il numero 1 diventa trascurabile rispetto ad m^2 e la frazione si approssima ad $m^2/m^2 = 1$.
(Questo risultato è noto da un problema elementare: "*A quale altezza giunge un sasso lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0?*").

Veniamo ora al calcolo della massima gittata. Per ricavare dalla [4] la gittata massima al variare di m , dobbiamo trovare il massimo della frazione $\frac{m}{1+m^2}$; dimostreremo che il massimo si ottiene per m=1.
Partiamo dal seguente **teorema aritmetico**: " Se la somma dei quadrati di due numeri positivi a e b è costane: $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$, allora il prodotto ab è massimo quando $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Proviamo prima con degli esempi. Sia $a^2+b^2=25$. Se a=2 e b=$\sqrt{21}$, il prodotto ab=$2\sqrt{21} \cong 9{,}165$. Se a e b sono più vicini tra loro, per esempio a=3 e b=4, ab=12, maggiore del prodotto precedente. Se a=b=$\frac{5}{\sqrt{2}}$, il prodotto ab = $\frac{25}{2}$ =12,5 e questo dovrebbe essere il valore massimo di ab.
Ora dimostriamolo, partendo dalla relazione $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$; nell'espressione vale il segno di uguaglianza se a=b. Da questa relazione segue $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ e perciò il massimo di ab è uguale ad $a^2=b^2 = \frac{c^2}{2}$, per a=b.
Nel nostro caso è $v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_0^2$, costante per ipotesi, perciò il massimo di $v_{0x}.v_{0y} = \frac{v_0^2}{2}$ quando $v_{0x=v_{0y}}$, ovvero quando m=1. Ciò significa che l'*alzo* α del cannone deve essere di 45°.
La gittata massima (vedi la 4) sarà perciò
[5] $R_{max} = \frac{{v_0}^2}{g}$ e il vertice della parabola di massima gittata sarà V(x=$\frac{{v_0}^2}{2g}$; y=$\frac{{v_0}^2}{4g}$).
Nella fig1 seguente sono riportate varie traiettorie per diversi alzi α, ma con la stessa v_0.

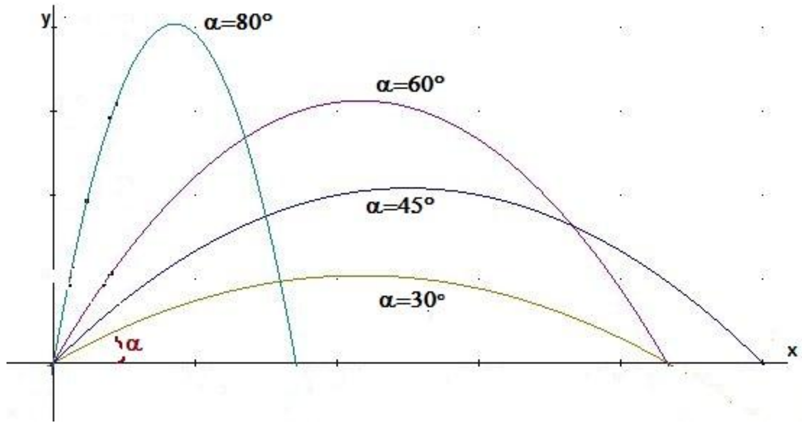

fig1

2) **Determiniamo ora la zona di sicurezza**, cioè la parte di piano (verticale) i cui punti non sono raggiungibili dal proiettile, comunque si vari l'alzo α (si intende, per una data velocità iniziale v_0 del proiettile). Dall'esame della fig1 si intuisce che la zona di sicurezza sia al di-sopra di una curva che delimita le varie traiettorie ottenute al variare dell'alzo α o, il ché è lo steso, al variare del coefficiente angolare m del vettore velocità iniziale $\vec{v}_0$. Troveremo che questa curva è una parabola, detta ***parabola di sicurezza***.

Interpretiamo l'equazione [3] della traiettoria generica come un'equazione di 2° grado in m; un punto (x; y) sarà raggiungibile dal proiettile, se l'equazione ammette soluzioni reali per m; se le soluzioni sono due, il punto può essere colpito in due modi: uno con una traiettoria *tesa in salita*, l'altro con una traiettoria *discendente di ritorno*; se le due soluzioni coincidono, c'è una sola traiettoria per quel punto: (x; y) si trova proprio sulla curva di sicurezza. Infine se l'equazione non ammette soluzioni reali per m, il punto è irraggiungibile. La regione di sicurezza si ottiene imponendo che l'equazione [3] nell'incognita m abbia discriminante negativo e perciò la curva di sicurezza si avrà per discriminante uguale a zero.

Riscriviamo la [3] nella forma

$[6] gx^2m^2 - 2v_0^2xm + 2v_0^2y + gx^2 = 0$ e uguagliamo a zero il Δ/4:

$[7] \frac{\Delta}{4} = v_0^4x^2 - gx^2(2v_0^2y + gx^2) = 0$, da cui si ricava

$[8] y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$, *parabola di sicurezza*.

Si noti che la parabola di sicurezza taglia l'asse x nel punto di gittata massima $R_{max} = \frac{v_0{}^2}{g}$.

Il suo vertice ha ascissa 0 e ordinata $\frac{v_0^2}{2g}$, che è la quota raggiunta da un proiettile lanciato verticalmente con velocità iniziale v_0.

La parabola di sicurezza ha l'asse y come asse di simmetria e ciò significa che il proiettile può essere lanciato, oltre che verso destra, anche simmetricamente verso sinistra, nel 2° quadrante. (Si immagini la prossima fig2 riflessa rispetto all'asse y come in uno specchio) oppure si guardi la successiva fig3.

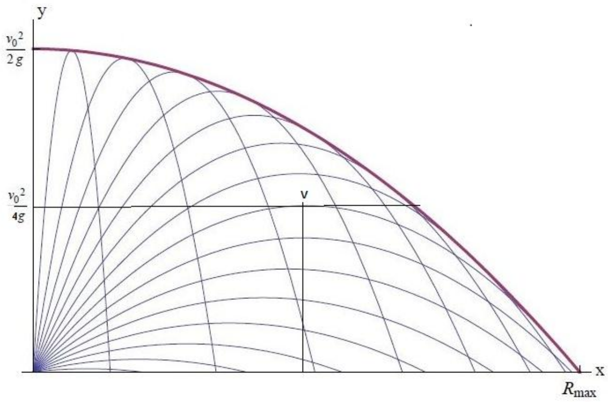

fig2

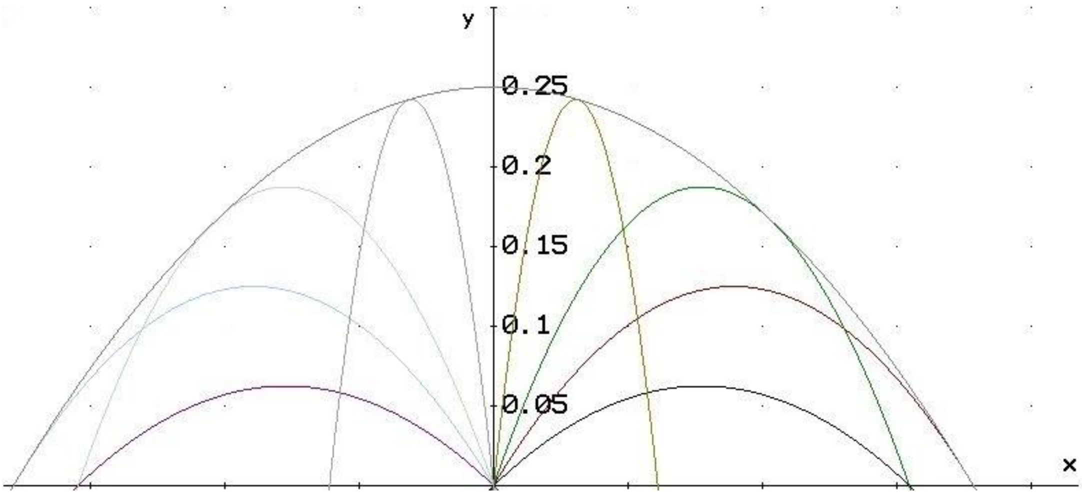

fig3

Guardando la fig2 o la fig3 sembra di capire che le varie traiettorie, al variare di m, siano tangenti alla parabola di sicurezza.
Infatti, facendo sistema tra la [3] e la [8], si trova che il discriminante vale zero; il punto di contatto è quindi $x_c = \frac{v_0^2}{gm}, y_c = \frac{v_0^2}{2g}(1 - \frac{1}{m^2})$, che è tanto più al di sotto del vertice della traiettoria relativa ad m quanto più m è piccolo (in valore assoluto).
Per m=1 (o m= -1), traiettoria di gittata massima, il punto di contatto con la parabola di sicurezza è ($\pm R_{max}$; 0); infine, per |m|<1 il punto di contatto scende al disotto dell'asse x.

Prima osservazione. Sia le parabole di tiro che quella di sicurezza sono tagliate al di sotto dell'asse x, che rappresenta il suolo, pensato piano e orizzontale.

Seconda osservazione. Il piano verticale x, y in cui si immagina avvenga il moto del proiettile può avere qualsiasi orientazione, vale a dire ci sono infiniti piani verticali di tiro, che formano fascio intorno all'asse verticale y. Per conseguenza la parabola di sicurezza, ruotando col piano di tiro intorno all'asse y, descrive un paraboloide rotondo sotto al quale stanno i punti che il proiettile può raggiungere.