Ottavio Serra

Integrazione ricorsiva di alcune classi di funzioni.

Si tratta di determinare la primitiva $F_n(x)$ di una funzione continua $f_n(x)$, dove il parametro n è un numero naturale, esprimendo $F_n(x)$ in funzione di $F_j(x)$, essendo j=n-1 o j=n-2.

Gli algoritmi ricorsivi che tratterò in questo articolo sono stati da me implementati in Pascal[1].

$[1]B_n = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^n} dx = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} dx - \int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} dx. = B_{n-1} - \int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} dx.$ Calcolando quest'ultimo integrale per parti, si ottiene

$$\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} dx. = \int x \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} dx = x\frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+x^2\right)^{-n+1}}{-n+1} dx = -\frac{x}{(2n-2)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} B_{n-1}.$$

Sostituendo nella [1] si ottiene un'equazione di 1° grado nell'incognita B_n:

$B_n = B_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)\left(1+x^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} B_{n-1}$**.** Risolvendo quest'equazione, otteniamo

$[a]B_n = \frac{2n-3}{2n-2} B_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)\left(1+x^2\right)^{n-1}}$, *con la condizione di arresto* **B_1 = ArcTan(x).**

Il secondo caso che ho studiato è

$$[2]C_n = \int \mathrm{Cos}^n(x)dx = \int \mathrm{Cos}^{n-1}(x)Coos(x)dx = Sen(x)\mathrm{Cos}^{n-1}(x) - \int Sen(x)(n-1)\mathrm{Cos}^{n-2}(x).(-Sen(x))dx =$$

$= Sen(x)\mathrm{Cos}^{\,n-1}(x) + (n-1)\int (1-\mathrm{Cos}^2(x)).\mathrm{Cos}^{n-2}(x)dx = Sen(x)\mathrm{Cos}^{n-1}(x) + (n-1)[C_{n-2} - C_n]$ e infine

$$[b]C_n = \frac{1}{n} Sen(x)\mathrm{Cos}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} C_{n-2},$$

con la condizione di arresto C_1=Sen(x) , se n è dispari; C_0=x , se n è pari. Perciò conviene implementare separatamente la ricorsione, a seconda che n è pari o dispari. Lo stesso si verifica per l'integrale di $Sen^n(x)$.

Verificare che per l'integrale di $Sen^n(x)$ si trova

$$[c]S_n = -\frac{1}{n}\mathrm{Cos}(x)Sen^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} S_{n-2},$$

con la condizione iniziali S_1=-Cos(x), se n è dispari; S_0=x, se n è pari.

---

[1] Vedi nel sito *digilander.libero.it/ottavioserra0* Cartella ***Programmi eseguibili***, sotto-cartella ***Calcolo,*** *i programmi 20), 21), 22), 23), 24) rispettivamente: Primitiva simbolica di $1/(1+x^2)^n$, di Coseno e Seno elevati a esponente pari, di Coseno e Seno elevati a esponente dispari (quest'ultimo con algoritmo iterativo), di Tangente $^n(x)$, di Log $^n(x)$.*

A rigore, si potrebbe ridurre l'integrazione di $\mathrm{Sen}^n(x)$ a quella di $\mathrm{Cos}^n(x)$, come segue:

$$\int Sen^n(x)dx = \int \mathrm{Cos}^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = -\int \mathrm{Cos}^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)d\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Nota. Se n è dispari, il calcolo di C_n e di S_n si può eseguire facilmente per iterazione, che richiede un minore impegno di memoria rispetto alla ricorsione. Infatti

$$C_{2n+1} = \int \mathrm{Cos}^{2n+1}(x).dx = \int \mathrm{Cos}^{2n}(x).dSen(x) = \int \left(1-Sen^2(x)\right)^n .dSen(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\frac{Sen^{2k+1}}{2k+1}.$$

Analogamente,

$$S_{2n+1} = \int Sen^{2n+1}(x).dx = -\int Sen^{2n}(x).d\,\mathrm{Cos}(x) = -\int \left(1-\mathrm{Cos}^2(x)\right)^n .d\,\mathrm{Cos}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{\cos^{2k+1}}{2k+1}.$$

Verificare, per n=1 e per n=2, cioè per 2n+1=3 e per 2n+1=5, che gli algoritmi iterative danno gli stessi risultati dei corrispondenti ricorsivi.

Calcolo ora

$[3]T_n = \int \mathrm{Tan}^n(x)dx = \dfrac{\mathrm{Tan}^{n-1}(x)}{n-1} - T_{n-2}$**,** con l'arresto T_1 = -Log|Cos(x)|, se n è dispari; T_0=x, se n è pari.

(La verifica della [3] è immediata).

N.B. *Log* è il logaritmo naturale, spesso denotato con *Ln.*

La primitiva di Cotan^n(x) s i può ridurre alla [3], sostituendo x con il complementare.

Verificare che si ottiene la formula, analoga alla [3],

$[4]CT_n = \int Co\,\mathrm{Tan}^n(x)dx = -\dfrac{Co\,\mathrm{Tan}^{n-1}(x)}{n-1} - CT_{n-2}$, con l'arresto CT_1=Log|Sen(x)|, se n è dispari; CT_0=x, se n è pari.

(L'algoritmo [4] non l'ho implementato).

Ho, poi, considerato la potenza n^{ma} di Log(x).

$[5]L_n = \int Log^n(x)dx = xLog^n(x) - \int xnLog^{n-1}(x).\frac{1}{x}dx = xLog^n(x) - L_{n-1}$, con arresto L_0=x.