Ottavio Serra

Integrali ellittici e applicazioni.

Premessa. Mentre la lunghezza di un arco di parabola (e ovviamente di circonferenza) è calcolabile con primitive elementari, ciò non accade per l'ellisse (o per l'iperbole) che pure sembra parente stretta della circonferenza.

Ricordo che sono dette funzioni elementari le funzioni algebriche, le funzionali circolari e le loro inverse, il logaritmo e l'esponenziale e le funzioni iperboliche con le loro inverse, che sono esprimibili in termini di esponenziali e logaritmi.

Esempio. Lunghezza dell'arco di parabola $y=x^2$, per x compresa tra 0 e b:

$l=\int_0^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_0^b \sqrt{1+4x^2}dx$. Mediante la sostituzione 2x=Senh(t) si ottiene

$l=\frac{1}{4}\left(2b\sqrt{1+4b^2}+\log(2b+\sqrt{1+4b^2}\right)$. Per chi non conosce le funzioni iperboliche, si consiglia la sostituzione $1+4x^2=(2x+t)^2$ (un po' più laboriosa).

Per calcolare la lunghezza dell'ellisse si richiedono integrali detti, appunto, ellittici.

E' interessante notare che anche per calcolare il periodo di oscillazione di un pendolo semplice si richiede un integrale ellittico. Precisamente, per il calcolo del periodo di un pendolo, occorre un integrale ellittico detto di prima specie, mentre per calcolare la lunghezza dell'ellisse un integrale ellittico detto di seconda specie.

Comincio con lo studio del pendolo.

La legge di conservazione dell'energia fornisce $\frac{1}{2}l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-gl\cos\theta=-gl\cos\theta_0=E$, costante in assenza di forze dissipative. Esplicitando dt, si ottiene $dt=\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$, il cui integrale da 0 a θ_0 fornisce un quarto del periodo T, pertanto $T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$. Dalle formule di bisezione si ottiene

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{2\left[sen^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{sen^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Ponendo $sen(\theta_0/2)=e$, $sen(\theta/2)=e.senx$ (ed eseguendo la sostituzione), si ottiene

[1] $$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-e^2sen^2x}}=4\sqrt{\frac{l}{g}}Ell1(e,\frac{\pi}{2}).$$

$Ell1(e,\frac{\pi}{2})=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-e^2sen^2x}}$ si chiama **integrale ellittico <u>completo</u> di 1ª specie**, per distinguerlo dalla **funzione integrale ellittica di prima specie** $Ell1(e,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-e^2sen^2x}}$.

Una volta tabulata la funzione Ell1(e, φ), oppure avendo a disposizione un algoritmo per calcolarla, si può determinare il tempo impiegato dal pendolo per descrivere l'angolo compreso tra φ_1 e φ_2.
Verificare che, per piccoli angoli di oscillazione, cioè approssimando senx cn x, la [1] si riduce alla formula elementale $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$..

Lunghezza dell'ellisse,
Dalle equazioni parametriche x=acost, y=bsent,
si ricava $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 sen^2 t + b^2 \cos^2 t}dt = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}dt$ e per la lunghezza dell'arco di ellisse compreso nell'intervallo angolare [0, φ], si ha

$$l = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}dt = a\int_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^2 sen^2 x}dx.$$

(Per verificare l'identità tra i due integrali, porre t=π/2 -x).
La lunghezza dell'arco di ellisse nel primo quadrante, un quarto dell'intera ellisse, è

$$\frac{L}{4} = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}dt = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2 sen^2 x}dx$$

Dunque, L/4=a.Ell2(e, π/2), avendo posto Ell2(e, π/2 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^2 sen^2 x}dx$) , **detto integrale ellittico *<u>completo</u> di seconda specie***. In generale, si chiama **integrale ellittico di seconda specie l'integrale**

$$Ell2(e,\phi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1 - e^2 sen^2 x}dx$$

Si noti che nel caso del pendolo, nell'integrale ellittico di prima specie il parametro "*e*" rappresenta il seno della metà dell'angolo massimo θ_0 (e=sen(θ_0/2)), nel caso dell'ellisse (integrale ellittico di seconda specie, **"*e*" denota l'eccentricità.**
Gli integrali ellittici di 1ª e di 2ª specie, si possono calcolare con un algoritmo di calcolo approssimato, per esempio quello di Simpson o, ancora più efficiente, quello di Richardson – Romberg. Per gli integrali ellittici completi è anche abbastanza facile sviluppare in serie binomiale la funzione integranda e poi integrare termine a termine, perché si ottengono serie totalmente convergenti.
Per la funzione integranda di Ell1(e, π/2) si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{-1}{2}}{n}\left(-e^2 sen^2 x\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1.3...(2n-1)}{2^n n!}(-1)^n e^{2n} sen^{2n}(x) =$$

$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{2^n}\frac{1.3...(2n-1)}{n!}sen^{2n}(x)$. Integrando iterativamente per parti, si ottiene

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx = \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{\pi}{2} = \frac{1.3...(2n-1)}{2^n.n!}\frac{\pi}{2}$ e in definitiva

$Ell1(e,\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^n}{2^n}\frac{1.3...(2n-1)}{n!}\right)^2\right]$. Il periodo del pendolo (vedi la [1]) risulta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^n}{2^n}\frac{1.3...(2n-1)}{n!}\right)^2\right].$$ Per "piccole oscillazioni" avremo

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{e^2}{4}\right] = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{sen^2\frac{\theta_0}{2}}{4}\right] \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{\theta_0^2}{16}\right].$$

Se $\theta_0^2/16$ si ritiene trascurabile rispetto a 1, si ottiene la legge di Galilei. Per esempio, se $\theta_0 = 3° = 0{,}052^{rad}$, $\theta_0^2/16 = 1{,}7.10^{-4}$ e la formula di Galilei dà un errore minore di 2 decimillesimi.

Per lo sviluppo in serie dell'integrale ellittico completo di seconda specie otteniamo

$$\sqrt{1-e^2sen^2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n e^{2n}sen^{2n}(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1/2(1/2-2)...(1/2-n+1)}{n!}e^{2n}sen^{2n}(x);$$

$$\text{Ell2}(e,\pi/2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2sen^2x}dx = \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2^n n!}e^{2n}\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left((e/2)^n\frac{1.3...(2n.1)}{n!}\right)^2\right].$$

Di seguito riporto gli algoritmi in Pascal per il calcolo degli integrali ellittici completi, utilizzando i loro sviluppi in serie. L'unico "input" è il parametro "*e*".

```
Function Ell1:reale;
  var n,disp:naturale;S,T,pot,F,Pd:reale;
 begin S:=1;pot:=1;F:=1;PD:=1;n:=0;disp:=-1;
  repeat pot:=pot*e;n:=n+1;F:=F*n;disp:=disp+2;PD:=PD*disp;
   T:=sqr(pot*PD/F);S:=S+T
  until T<epsilon;
  Ell1:=S*Pi/2
 end;
 Function Ell2:reale;
  var n,disp:naturale;S,T,pot,F,Pd:reale;
 begin S:=1;pot:=1;F:=1;PD:=1;n:=0;disp:=-1;
  repeat n:=n+1;pot:=pot*e;disp:=disp+2;PD:=PD*disp;F:=F*n;
   T:=Sqr(pot*PD/F)/(2*n-1);S:=S-T
  until T<epsilon;
  Ell2:=S*Pi/2
 end;
Begin
……… Leggi(e);… {Corpo istruzioni}
End.
```