

Ottavio Serra.

Un'introduzione alternativa alla meccanica quantistica.

0. Premessa sulle costanti universali.

Le grandi teorie unitarie del secolo XX° hanno in comune la constatazione che in esse esiste una costante universale: la velocità **c** della luce per la Meccanica Relativistica, il quanto elementare di azione **h** per la Meccanica Quantistica, la costante di gravitazione universale **G** per la Relatività generale.

La difficoltà, a livello didattico, della Meccanica Quantistica rispetto alla Meccanica Relativistica è che, mentre tutti sanno che cos'è una velocità e tutti, si spera, hanno sentito nominare la costante di gravitazione universale, nessuno studente, credo, sappia che cosa sia l'Azione.

La Relatività ristretta, in pratica, discende dall'ammettere che in natura esiste una velocità limite **c**, quella della luce, che è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, è invariante rispetto al cambiamento del sistema di riferimento inerziale.

La Relatività generale si basa sul fatto che **G** è ancor più universale di quanto pensasse Newton, quando unificò la fisica terrestre e la fisica celeste, essa mette in relazione la materia (massa-energia) con la curvatura dello spazio-tempo.

La fisica classica, in particolare la meccanica classica, è un **limite**, il limite a cui tende la relatività ristretta per velocità **piccole** rispetto a **c**, il limite a cui tende la relatività generale per campi gravitazionali così deboli che lo spazio-tempo ha curvatura prossima a zero, il limite a cui tende la meccanica quantistica per azione **grande** rispetto ad **h**.

1. L'azione: che sarà mai?

Uno dei primi argomenti del corso di fisica è lo studio del moto tramite i diagrammi tempo-spazio (piano t,s), tempo-velocità (piano t,v), tempo-accelerazione (piano t,a). Il tempo è quello (sottinteso) di Galilei e Newton, che scorre in modo uguale per tutti dal passato verso il futuro; e va bene così, in una descrizione del mondo **non relativistica**. Il tempo è rappresentato come una freccia, una retta orientata da sinistra (il passato) a destra (il futuro).

Nel piano t,a l'area sottesa dal grafico della funzione $a=a(t)$ rappresenta la variazione di velocità Δv nell'intervallo di tempo tra l'istante iniziale t_0 , che conviene assumere uguale a 0 (pensate all'arbitro di una partita di calcio) e l'istante corrente t . Conoscendo $v(0)=v_0$, otteniamo la funzione $v=v(t)=v_0+\Delta v$. L'area sottesa dalla funzione $v=v(t)$ rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo tra l'istante iniziale 0 e l'istante corrente t . Abbiamo finito (sempre che sappiamo calcolare quelle "**aree**"), aree che secondo il significato degli assi coordinati si misurano in m/s o in m .

Esempio dell'accelerazione costante.

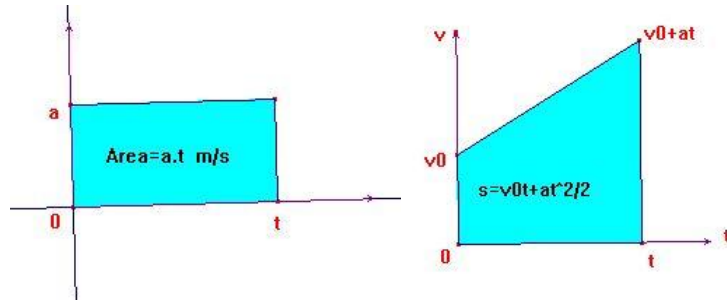


fig. 1

La formula che compare nella parte destr di fig. 1 è la legge del moto uniformemente accelerato, della caduta dei gravi, trovata per la prima volta da Galilei con un faticoso procedimento. L'area di questo trapezio rettangolo è la somma delle basi (verticali: le velocità iniziale e finale) per l'altezza (orizzontale: l'intervallo di tempo t) diviso 2. $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

Tutto questo è noto agli studenti. Non credo sia nota la rappresentazione del moto nello spazio delle fasi, posizione- impulso \vec{r}, \vec{p} , che nel caso di moto unidimensionale diventa il piano x,p. (Siccome $p=mv$ ed m è costante, quando c'è di mezzo p, pensate alla velocità v). Siccome i moti reali sono sempre limitati in posizione e velocità e sono periodici (si pensi al moto dei pianeti, al moto armonico, al moto di una particella libera vincolata a muoversi senza attrito su un segmento), il moto nel piano x,p è sempre rappresentato da una linea chiusa, detta *orbita*. Il caso più semplice è quello di una particella libera, non soggetta a forze, che si muove su un segmento OA lungo a. La sua velocità v, il suo impulso $p=mv$, è costante in modulo, salvo agli estremi O e A in cui cambia verso. Vedi la sua orbita in fig. 2.

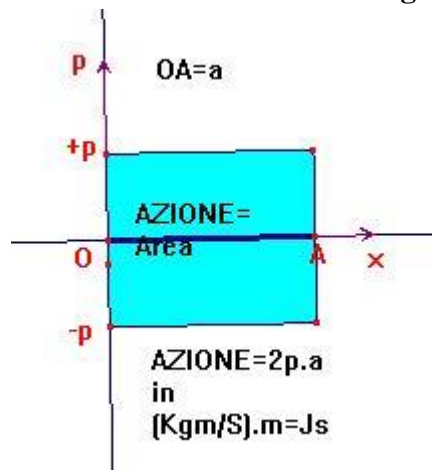


fig. 2

Nel piano x,p l'area di una figura è il prodotto di un'energia per un tempo, è un'azione. Si noti che l'azione ha le stesse dimensioni fisiche del modulo del momento angolare. Anche lo spin di una particella è un momento angolare (intrinseco) e perciò si misura in Js come un'azione.

Vediamo ora come si presenta nello spazio delle fasi il moto armonico (particella di massa m soggetta a forza elastica $F=-kx$, $(k/m=\omega^2)$, che è di fondamentale importanza in fisica. L'energia potenziale è $U=\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, l'energia cinetica è $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}$ e siccome l'energia totale è costante ($U+K=E$), abbiamo

$\frac{1}{2}(m\omega^2)x^2 + \frac{p^2}{2m} = E$, ovvero $\frac{x^2}{2E/(m\omega^2)} + \frac{p^2}{2mE} = 1$. Questa è l'equazione di un'ellisse, perciò l'azione è l'area racchiusa dall'ellisse, che è π per il prodotto dei semiassi:

$$A = \pi \sqrt{\frac{4E^2}{\omega^2}} = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu} = E.T \text{ (giusto, l'energia totale dell'oscillatore armonico per il periodo}^1\text{)}.$$

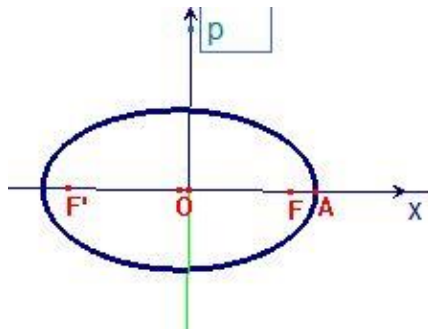


fig. 3

2. Il quanto elementare di azione h .

Planck (1900) per spiegare la legge sperimentale dell'irraggiamento del corpo nero (la bocca di un forno), è costretto a immaginare che le particelle costituenti il corpo nero, schematizzate come oscillatori armonici, non possono scambiare energia con la radiazione elettromagnetica in modo continuo, ma solo in pacchetti discreti, in quanti di energia proporzionali alla frequenza: $\varepsilon = h\nu$. Compare così una nuova costante, h , che Planck chiama *quanto elementare di azione*. La formula trovata da Planck è così potente che consente di calcolare sia il valore di h ($6,626 \times 10^{-34}$ Js), sia la costante di Boltzmann k_B ($1,38 \times 10^{-23}$ J/°K), da cui ricava il primo valore abbastanza preciso del numero di Avogadro ($N = R/k_B = 8,31 / (1,38 \times 10^{-23}) = 6 \times 10^{23}$ molecole/mole).

Einstein (1905) spiega l'effetto fotoelettrico andando oltre Planck: questi pensava che la luce fosse un flusso continuo di energia trasportata dalle onde elettromagnetiche, ma gli oscillatori del corpo nero, diciamo pure, gli atomi, per qualche loro misteriosa ragione, potessero scambiare energia solo per quanti, per quantità discrete. **No**, dice Einstein, se vogliamo spiegare l'effetto fotoelettrico, dobbiamo immaginare che la luce (la radiazione elettromagnetica) è essa stessa quantizzata: un fascio di luce non è un flusso continuo di energia (elettromagnetica), ma una raffica di particelle aventi energia **proporzionale** alla frequenza. Tali particelle, che Einstein chiama quanti di luce, ora sono dette **fotoni**.

Einstein determina la costante di proporzionalità e trova lo stesso valore della costante h di Planck. **Qui gatta ci cova!**

¹ Per il moto armonico vedi l'articolo 21 *Moti piani*, nella sezione *Annuario del Liceo Scientifico Scorza di Cosenza*, cartella *Articoli* nel mio <http://digilander.libero.it/ottavioserra0>

Bohr (1913) applica all'atomo di idrogeno l'idea della quantizzazione. Per spiegare lo spettro discreto (a righe) dell'idrogeno impone che il momento angolare dell'elettrone sia quantizzato: $mvr=n\hbar$. A questo punto diventa chiaro che \hbar è una **costante universale**.

In fig. 4 le 4 righe, nel visibile, dello spettro dell'idrogeno atomico (serie di Balmer).



fig. 4

4102 4341 4861 6563 Angstrom

Il quanto elementare di azione h , ora detto costante di Planck, è **il minimo valore** possibile per l'azione; l'azione di una particella è perciò un multiplo intero di h . In verità, questo minimo, dell'ordine di grandezza di h , dipende dal formalismo matematico della teoria, può essere \hbar ($h/2\pi$) o $\hbar/2$ ($h/4\pi$). Come dicono, scherzando, i fisici di Berkeley (California), **$4\pi=1$** .

Nella teoria originale di Heisenberg il minimo valore dell'azione è $\frac{1}{2} \hbar \equiv \frac{h}{4\pi}$ (Vedi più avanti il paragrafo 3. **Si noti** che $\frac{1}{2} \hbar$ è lo spin dell'elettrone misurato lungo una qualsiasi prefissata direzione, perciò si dice brevemente che lo spin dell'elettrone è $\frac{1}{2}$).

Importante è il suo valore numerico: $h=6,626 \times 10^{-34}$ Js, un valore molto piccolo alla scala macroscopica. Se l'azione di una particella è di qualche h , la variazione di uno o due h si nota nettamente: l'azione varia con discontinuità, varia a salti, è **quantizzata**. Se invece l'azione (dai granelli di sabbia ai pianeti, è miliardi di miliardi di h , la variazione di qualche migliaio o milione di h non si nota, l'azione appare una grandezza continua, e quindi è lecito dire, con Leibniz, ***natura non facit saltus***.

Due esempi.

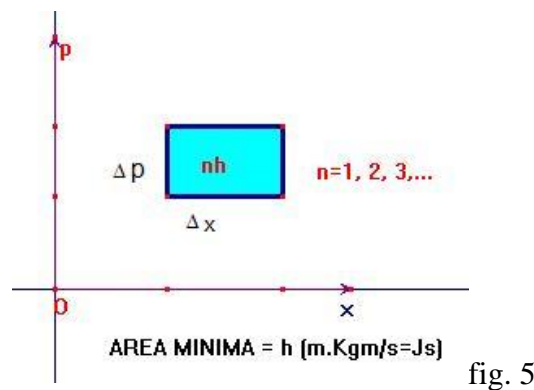
Primo: pallina da ping pong di 10 grammi, lanciata avanti e indietro alla velocità di 10 m/s lungo un tavolo di 4 metri. L'azione è $A=\Delta p \cdot \Delta x=2mva=2 \times 10^{-2} \times 10 \times 4=0,8$ Js e quindi la pallina ha un'azione di circa $10^{33}h$, enorme rispetto ad h , la pallina a tutti gli effetti è un **oggetto classico**, macroscopico, **non mostra effetti quantistici**. (Anche una cellula umana è un oggetto grande, **macroscopico**: stimando una massa media dell'ordine di 10^{-12} Kg, una velocità di 0,1 mm/s su un tratto di un mm andata e ritorno, la sua Azione vale circa $3 \cdot 10^{14}h$, centomila miliardi di volte maggiore di h).

Secondo: l'elettrone nell'atomo di idrogeno. Massa= 10^{-30} Kg, velocità= 10^6 m/s, diametro dell'atomo= 10^{-10} metri. $A=\pi 10^{-10} \times 2 \times 10^{-30} \times 10^6 = 6,28 \times 10^{-34}$ Js, praticamente uguale ad h : **l'elettrone è una tipica particella quantistica.**

Compton (1922) Verifica sperimentalmente le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso nell'interazione (urto) elastica tra un fotone di alta energia (raggi X) e un elettrone (quasi) libero. La trattazione è ovviamente relativistica. La conclusione è che il fotone, anche se ha massa zero, si comporta a tutti gli effetti come una *particella ordinaria* (**quasi**).²

3. Il principio di indeterminazione di Heisenberg deriva da h (o da \hbar o da $\frac{1}{2}h$). Dallo spazio delle fasi, piano (x, p) in due dimensioni, **si vede** che $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$. Ciò significa che se voglio determinare la posizione di un elettrone con un errore minore di Δx , *inevitabilmente* cresce l'indeterminazione Δp sull'impulso (l'indeterminazione $\Delta v = \Delta p/m$ sulla velocità) e viceversa.

Si dice che x e p sono osservabili **incompatibili**.



Da $E = \frac{p^2}{2m}$ segue $2m\Delta E = 2p\Delta p$ e siccome $\Delta x = v\Delta t$, la precedente disuguaglianza diventa $v\Delta t \cdot \frac{m\Delta E}{p} \equiv \Delta E \cdot \Delta t \geq h$ (anche energia e tempo sono osservabili **incompatibili**).

Spesso si dice, **erroneamente**, che il principio di indeterminazione non ci permette di **conoscere** simultaneamente, con precisione grande a piacere, i valori di due grandezze incompatibili. Questo modo di esprimersi è **ingannevole**, spinge a pensare che una particella possiede posizione e impulso determinati, ma il processo di misura introduce una **perturbazione incontrollabile**, per cui una misura di posizione, quanto più è precisa, tanto più **disturba** il valore dell'impulso e viceversa.

L'equivoco risale allo stesso Heisenberg³. Ma non è questione di *conoscibilità*, l'incompatibilità è di natura **ontologica**, non **epistemica**. Ciò che non si può osservare, (misurare), neanche in linea di principio, non ha realtà fisica, **non esiste**. Una conseguenza del principio di indeterminazione è che non è lecito parlare di **traiettoria** per una particella quantistica.

² Vedi nel mio sito <http://digilander.libero.it/ottavioserra0> cartella Articoli sezione Annuario Liceo Scientifico Scorza di Cosenza l'articolo 11: **Teoria dei Quanti** e sezione Miscellanea gli articoli 22: **Fisica del '900** e 33: **Effetto Compton**.

³ Werner Heisenberg: *I principi fisici della teoria dei quanti*, Boringhieri 1963 (Ed. tedesca 1930).

Che cosa fa un fotone che va da un punto A a un punto B riflettendosi su uno specchio? Si chiede Richard Feynman. Fa quello che gli pare, conclude il fisico americano.

4. Le onde. Il concetto di *onda*, nato in meccanica classica per spiegare la propagazione in un mezzo materiale elastico di vibrazioni armoniche (in generale periodiche, sovrapposizione di moti armonici), si è rivelato fondamentale per creare modelli esplicativi in svariati campi della fisica, dalle onde acustiche alle onde elettromagnetiche. Il successo di un modello spinge ad applicarlo in contesti anche molto lontani da quello originario.

Secondo la teoria di Maxwell⁴ a un'onda e.m. è associata un'energia ε e un impulso (quantità di moto) p il cui rapporto è la velocità della luce: $\varepsilon/p=c$, vedi nota⁵. Siccome $\varepsilon=h\nu$ (Planck e Einstein), segue $h\nu=pc$ e quindi $p= h\nu/c=h/\lambda$.

Ad ogni quanto di luce (fotone) è perciò associata una lunghezza d'onda $\lambda=h/p$.

Louis de Broglie (nella tesi di dottorato del 1924) estese questa relazione anche alle particelle con massa non nulla, in primo luogo agli elettroni.

Su questa idea di de Broglie Schrodinger fondò la sua *Meccanica ondulatoria* in analogia con l'ottica ondulatoria, più maneggevole della prima meccanica quantistica di Heisenberg, la *Mec- canica delle matrici*. Il successo fu tale (diffrazione degli elettroni, effetto tunnel, transistor, mi- crosco- pio a scansione, ...) da spingere i fisici a credere che le particelle elementari avessero una *doppia natura*, ondulatoria o corpuscolare che manifestano a seconda dell'esperimento a cui sono sottoposte, ma mutuamente *esclusive* (principio di **complementarità** di Bohr).

Ma non c'è nessun motivo **stringente** per credere che le particelle elementari abbiano una dop- pia natura: le onde della meccanica ondulatoria non sono onde reali, descrivono solo distribu- zioni di probabilità, così come non sono reali i deferenti e gli epicicli dell'astronomia tolemaica, che servono solo a descrivere con moti circolari uniformi il moto irregolare dei pianeti.

Del resto, nessuno ha mai visto le onde sonore o le onde elettromagnetiche. **Le onde non esi- stono**. Se però qualcuno obietta che ha visto le onde su una corda vibrante o le onde del mare, gli si può rispondere che 1°: si tratta di vibrazioni *trasversali* (cioè perpendicolari alla direzione di propagazione, 2°: coinvolgono un enorme numero di particelle (macroscopiche), un enorme numero di tratti di corda o di goccioline d'acqua e le onde **continue** emergono per effetto **statistico**⁶.

5. Osservabili, osservatori e strumenti di misura, realtà fisica.

Che cos' un'osservabile? Ciò che si può misurare (**osservare**). Una misura è un'interazione tra il sistema sottoposto a misura e un altro sistema (strumento) che subisce una trasformazione irreversibile (risultato della misura). Il sistema può essere classico (macroscopico) o quantistico (microscopico), lo strumento è necessariamente classico (lastra fotografica, nastro di carta, me- moria magnetica, cervello umano), perché deve subire una trasformazione irreversibile, la

⁴ Vedi nel sito di nota² nella cartella *Articoli, Miscellanea*, il N° 50 *Dalle Equazioni di Maxwell alle onde E.M.*

⁵ Vedi nello stesso sito, *Articoli*, sezione *Annuario del liceo scientifico Scorza* il N° 09 *Teoria della Relatività*.

⁶ Per approfondire, vedi nel sito su citato nella cartella *Articoli*, sezione *Miscellanea*, gli articoli N° 53 *Particelle quanti- stiche* e N° 54 *Effetti quantistici*.

registrazione della misura. E' necessaria una presa d'atto **cosciente** da parte di un osservatore umano? (Von Neumann dice sì, Landau dice no, io dico no). Osservatore è sinonimo di strumento di misura, cosciente o meno.

Una proprietà di un sistema fisico non è data in assoluto, è sempre data in termini di relazione con qualcosa d'altro. Per esempio, la posizione di un elettrone o di un pianeta ha senso solo in relazione alla posizione di altri oggetti, il sistema di riferimento. Lo stesso vale per l'impulso. Siccome i valori iniziali di posizione e velocità (impulso/massa) sono necessari per determinare la traiettoria di una particella e siccome $\Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{h}{m}$, *il principio di indeterminazione* esclude che, in generale, si possa parlare di **traiettoria**. Ciò è possibile solo se le indeterminazioni (simultanee) su posizione e velocità sono trascurabilmente piccole rispetto agli (inevitabili) errori di misura.

Per non restare nel vago, faccio due esempi.

Elettrone nell'atomo di idrogeno. Massa $m=10^{-30}$ Kg, Velocità dell'ordine di 10^6 m/s (ricavabile dal modello di Bohr). Anche ammesso che Δv sia dell'ordine di v , cioè 10^6 m/s, si avrebbe

$$\Delta x \geq \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{10^{-30} \cdot 10^6} \approx 6 \cdot 10^{-10},$$

un'indeterminazione sulla posizione più di 6 volte le dimensioni

dell'atomo al quale deve appartenere. Per l'elettrone nell'atomo non ha senso parlare di traiettoria, la traiettoria non esiste.

Orbita della Luna intorno alla Terra. Massa $m=7 \cdot 10^{22}$ Kg, velocità orbitale 10^3 m/s. Ammettendo una Δv di 1 m/s, si ricava una Δx dell'ordine di

$$\frac{h}{m\Delta v} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{7 \cdot 10^{22} \cdot 1} \approx 10^{-56} \text{ metri, immensamente, assurdamente, più piccola di ogni più rosea speranza di qualsiasi astronomo, mille miliardi di miliardi di volte più piccola della lunghezza di Planck}^7.$$

La Luna può stare tranquilla, la sua traiettoria è ben determinata, **esiste**.

⁷ Vedi nel mio sito, già citato, l'articolo N°16 *Scala di Planck* nella sezione *miscellanea* della cartella *Articoli*.