Ottavio Serra

Un metodo elementare per il calcolo di “aree”.

1) *Premessa*.

Una porzione di piano cartesiano non si misura necessariamente in m^2 o in cm^2 o in altre unità di misura di superfici: tutto dipende dal significato che si dà agli assi cartesiani. Se, per esempio, l’asse delle ascisse (asse x) rappresenta il tempo e l’asse delle ordinate (asse y) la velocità di una particella, l’area compresa tra il grafico della velocità e l’asse delle ascisse nell’intervallo di tempo $a \leq t \leq b$ rappresenta lo spazio percorso nell’intervallo di tempo b-a e perciò si misura in m, o in cm (o altra unità di lunghezza). Infatti, $s \times \frac{m}{s}$=m. (secondi×metri al secondo = metri).

Analogamente, se rappresentiamo in un diagramma V,p (volume - pressione) l’equazione di stato di un gas, l’area rappresenta un lavoro e si misura in Joule.

Si capisce pertanto l’importanza estrema del calcolo di “aree” che va sotto il nome di calcolo “integrale” (integrale significa totale o somma; infatti l’integrale si riduce al calcolo di somme).

La porzione di piano cartesiano, compresa tra il grafico di una funzione f(x) e l’asse delle x nell’intervallo $a \leq x \leq b$, rassomiglia a un trapezio rettangolo, (con il lato obliquo di solito curvilineo) e perciò si suole chiamare trapezoide. (Vedi fig. 1)

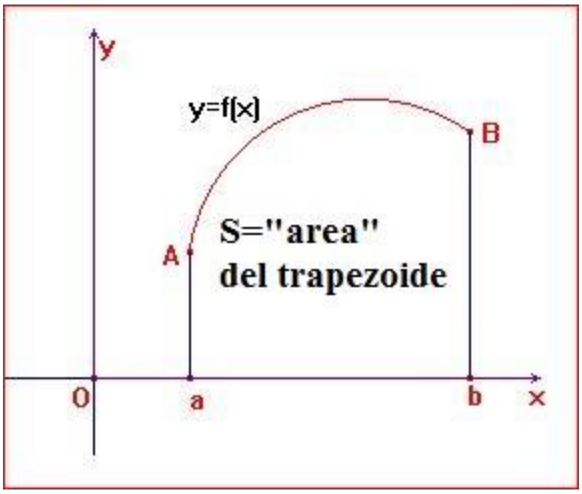


fig. 1

2) *Calcolo.*

Come calcolare l’area S del trapezoide? Una prima idea è di approssimare il trapezoide con un trapezio: la parte tratteggiata in azzurro, commettendo un errore dato dalla parte tratteggiata in rosso.

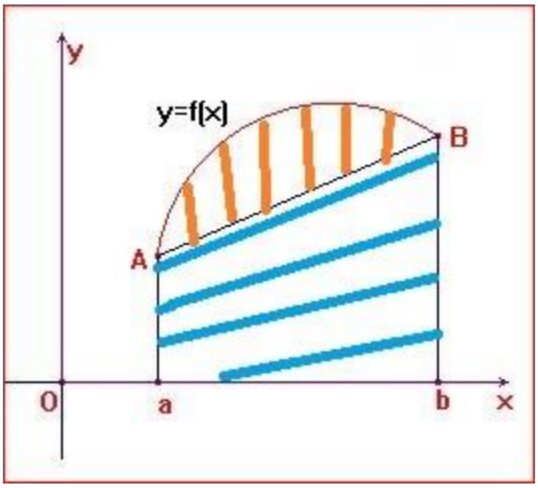


fig. 2

Posto h=b-a, l’area del trapezio è [f(a)+f(b)].h/2.
Si può diminuire l’errore dividendo [a; b] in n parti (conviene uguali) e applicando agli n trapezoidi la formula precedente. Diciamo Tc la somma delle aree degli n trapezi e x_1, x_2, … x_{n-1} i punti intermedi tra a e b. Posto ora h = (b-a)/n, si ottiene:

[1] $Tc = h.[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1)+ f(x_2)+ \ldots + f(x_{n-1})]$.

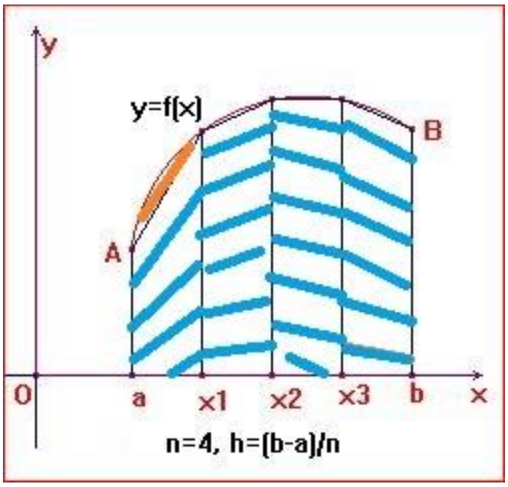


fig. 3

L’errore, la parte in roso, è ora molto più piccolo.(Vedi fig. 3).
Il valore approssimato di S, dato da Tc, è detta “formula <u>chiusa</u> dei trapezi”, perché coinvolge gli estremi a e b dell’intervallo *base* [a; b] del trapezoide.
Un altro modo per approssimare l’area del trapezoide utilizza il punto medio di [a; b] e conduce a una formula detta “formula <u>aperta</u> dei trapezi”, perché non utilizza gli estremi a e b. (Vedi fig. 4). L’area del trapezio così ottenuto è denotata Ta.

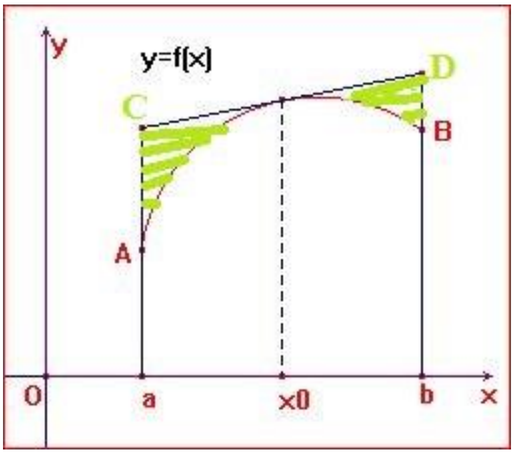


fig. 4

Questa volta l’errore (la parte tratteggiata in verde) è di segno opposto a quello della formula chiusa. (Vedi fig. 2). Risulta $Ta=(b-a).f(x_0)$.
Anche ora si può dividere b-a in n parti uguali, ognuna di lunghezza h=(b-a)/n e si ottiene, detti z_1, z_2, … z_n i punti medi degli n intervallini,
[2] $Ta=h[f(z_1)+f(z_2)+\ldots+f(z_n)]$.
Osservando le due figure, fig. 2 e fig. 4, si nota che l’errore Ec della formula chiusa è di segno opposto a quello Ea della formula aperta e vale ***<u>circa</u>*** il doppio in valore assoluto, come si nota meglio nella figura seguente (fig. 5), che mette a confronto i due casi:

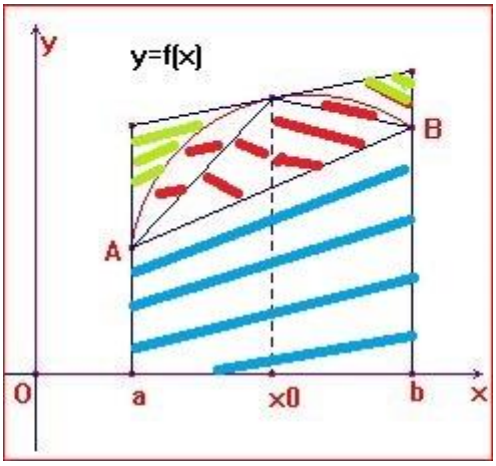


fig. 5

La parte in rosso è circa il doppio di quella in verde.

Ciò suggerisce la seguente interpolazione: siccome S=Tc+Ec=Ta+Ea, segue che Tc-2Ea=Ta+Ea e quindi Ea= $\sim\frac{Tc-Ta}{3}$ $e\ infine$

[3] $S = \sim\frac{2Ta+Tc}{3}$.

Nella figura seguente (fig. 6) è riportata l'elaborazione "MatCos" per la funzione $y=x^2+3x-4$ nell'intervallo [-4; 1]. Si noti che l'"area" è negativa, ciò perché il trapezoide è al di sotto dell'asse delle x. Il valore interpolato è molto buono, pur avendo diviso l'intervallo *base* in solo 16 parti. Ciò dipende anche dal fatto che la funzione parabolica è particolarmente semplice.

Il valore esatto, per chi conosce il calcolo integrale, è -125/6 = -20.8333333333333…

Un valore più preciso si potrebbe ottenere dividendo l'intervallo [-4; 1] in un numero maggiore di parti, a scapito però della rapidità di elaborazione. "MatCos" è relativamente lento, perché usa un linguaggio "*interpretato*" scritto non in un codice "*nativo*", ma in un linguaggio *compilato* sottostante.

Il vantaggio didattico di "MatCos" è la semplicità di utilizzo e la possibilità di vedere l'elaborazione in atto (in run-time) sulla parte sinistra del foglio di lavoro. Si può rendere l'elaborazione più veloce utilizzando la relativa opzione (*spuntando* la casella in basso a destra della parte sinistra del fogliodi lavoro).

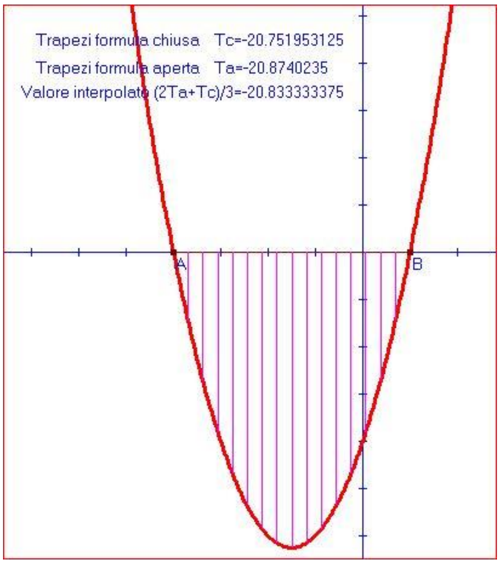


fig. 6

Riporto ora il listato del programma “MatCos”.

```
STAMPA("Modifica eventualmente le unità di misura");
rifcart(1,1);
STAMPA("INTEGRALE di f(x) in [a;b]");
Stampa("METODO dei TRAPPEZI");
colore(9);spessorepenna(3);
f=FUNZIONE("x^2+3*x-4");
xa=legginum("a=");xb=legginum("b=");
graficofunz(f);
spessorepenna(1);colore(1);
A=punto(xa,0);B=punto(xb,0);
base=segmento(A,B);
n=legginum("Numero punti=");
fa=valutafunz(f,a);fb=valutafunz(f,b);
Qa=punto(xa,fa);Qb=punto(xb,fb);
la=segmento(A,Qa);lb=segmento(B,Qb);
x=xa;colore(13);
Se n>32 allora m=32;altrimenti m=n;
h=(xb-xa)/m;Per (i da 1 a m-1) esegui;
 x=x+h;P=punto(x,0);fx=valutafunz(f,x);
 Q=punto(x,fx);segmento(P,Q);
fine;cancella(P,Q,Qa,Qb);
x=xa;h=(xb-xa)/n;S=(fa+fb)/2; (* Qui comincia la formula “chiusa” *)
Per (i da 1 a n-1) esegui;
 x=x+h;v=valutafunz(f,x);Tc=Tc+v;
fine;Tc=Tc*h;
x=xa-h/2;Ta=0;      (* Qui comincia la formula “aperta” *)
Per (i da 1 a n) esegui;
 x=x+h;v=valutafunz(f,x);Ta=Ta+v;
fine;Ta=Ta*h;
Trap=(2*Ta+Tc)/3;
Tc=(Tc*1e6+1e15-1e15)*1e-6;
Ta=(Ta*1e6+1e15-1e15)*1e-6;
Trap=(Trap*1e6+1e15-1e15)*1e-6;
Scrivi("Trapezi formula chiusa      S=",S);
Scrivi("Trapezi formula aperta      T=",T);
Scrivi("Valore interpolato (2T+S)/3=",Trap);
```

Nota. Il software “MatCos” è stato realizzato dal gruppo didattico diretto dal Prof. Francesco Aldo Costabile, ordinario di Analisi numerica all’Università della Calabria.

3) *Giustificazione degli errori di troncamento.*

Abbiamo visto a livello grafico intuitivo che Tc è circa uguale a -2Ta. Cerchiamo ora di giustificarlo col calcolo, servendoci del polinomio di Taylor, nell’ipotesi che la funzione f(x) sia derivabile fino al secondo ordine in [a; b]. Assumiamo come punto iniziale della formula di Taylor il punto medio x_0 di [a; b]. Si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}.(x - x_0)^2$$

ovvero, posto $t=x-x_0$,

$$[4]\, f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\mathrm{t} + \frac{f''(\xi)}{2!} t^2$$

Integrando da a a b e cioè, posto h=b-a, da –h/2 ad h/2, si ricava:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(t)dt = f(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{24}h^3.$$

Siccome f(x_0)h è Ta, formula "aperta" dei trapezi, segue che l'errore di troncamento è

[5] $\quad Ea = \frac{f''(\xi)}{24}h^3.$

Applichiamo ora la [4] agli estremi a e b dell'intervallo di integrazione:

$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{-h}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\frac{h^2}{4}$ e analogamente

$f(b) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\frac{h^2}{4}.$

A rigore ξ (opportuno punto di [a; b]) varia da una formula all'altra, ma ciò influisce poco, se la funzione f(x) è abbastanza regolare (se f'' varia poco in [a; b])..

Sommando membro a membro e moltiplicando per h/2, si ricava:

$\frac{f(a)+f(b)}{2}h = f(x_0)h + \frac{f''(\xi)h^3}{8}$, cioè $Tc = Ta + \frac{f''(\xi)}{8}h^3.$

Siccome S=Tc+Ec=Ta+Ea, segue: Tc+Ec=Ta+ $\frac{f''(\xi)}{24}h^3$, da cui si ricava Ec=$\frac{f''(\xi)}{24}h^3$+Ta-Tc e quindi

[6] Ec=$\frac{f''(\xi)}{24}h^3$- $\frac{f''(\xi)}{8}h^3$ = - $\frac{f''(\xi)}{12}h^3$. Si conferma perciò l'dea intuitiva che Ec ≅ -2Ea.

Dividendo [a; b] in n parti, posto per comodità a=x_0 e b=x_n, l'"area" dell'i^{mo} trapezio è Tc$_i$= $\frac{b-a}{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$ e il corrispondente errore di troncamento è Ec$_i$ = $-\frac{f''(\xi i)}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}$, per cui sommando per i da 1 ad n si ottiene Tc=$\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$ ed Ec=$\sum_{i=1}^{n} -\frac{f''(\xi*)}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3} = -\frac{f''(\xi*)}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$. (Ho chiamato f''(ξ*) il valore medio degli f''(ξ_i)).

L'errore di troncamento, dunque, decresce col quadrato di n (e cresce col cubo di b-a).

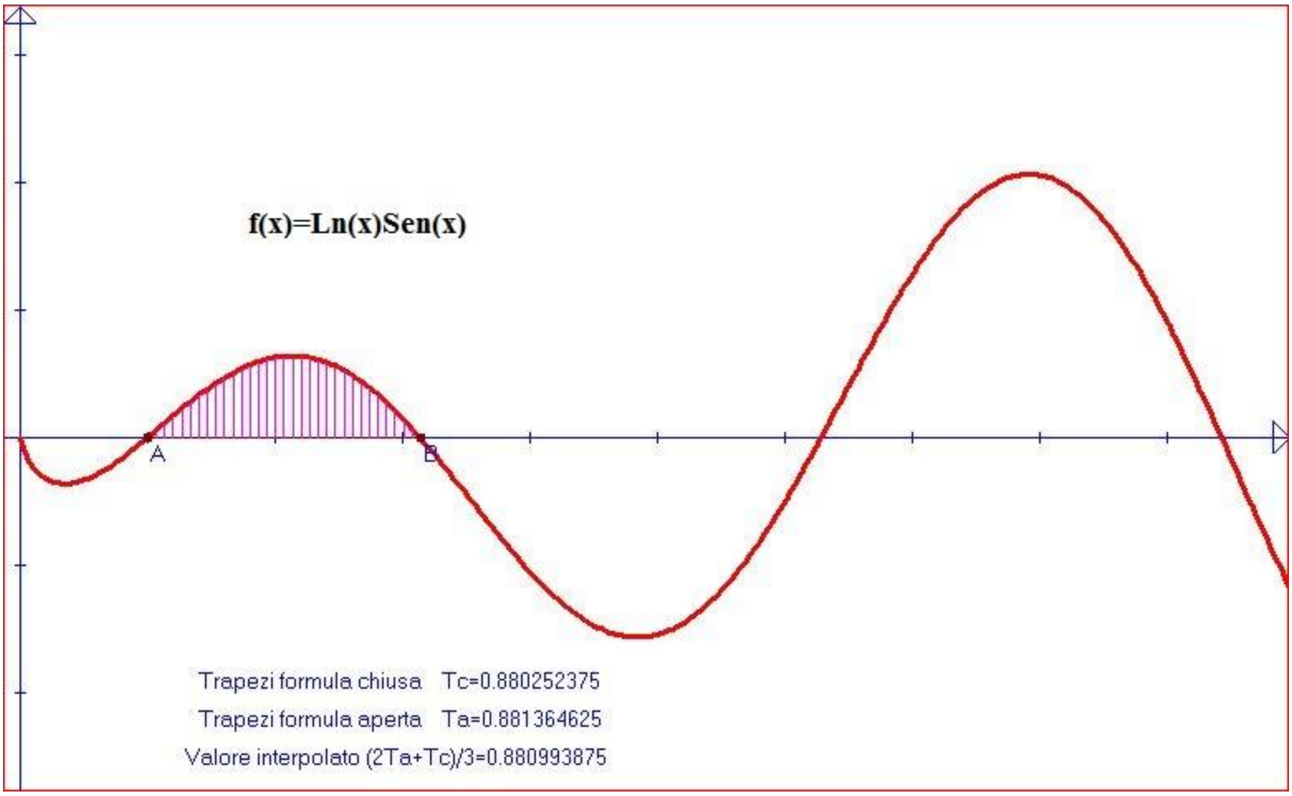
Analogamente, si trova

Ta = $\frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\right]$, dove z_i è il punto medio dell'i^{mo} intervallino [x_{i-1}; x_i] ed Ea=$\frac{f''(\xi)}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$.

Come si vede, sia nella formula chiusa che in quella aperta l'errore di troncamento cresce col cubo di b-a e decresce col quadrato di n. Perciò, a parità di intervallo base [a; b], per diminuire l'errore occorre aumentare il numero n di parti in cui dividere [a; b]; però al crescere di n crescono gli errori di arrotondamento. Occorre perciò trovare un giusto compromesso.

Nella pagina seguente viene riportato l'output dell'integrale ("area") della funzione f(x) = Ln(x)Sen(x) tra 1 e π: $S = \int_1^{\pi} Ln(x).Sen(x)dx$. L'intervallo base è stato diviso in 32 parti e il risultato della formula interpolata è preciso fino alla 5^a cifra decimale. Ciò può essere convalidato sia dividendo l'intervallo di integrazione in 64 parti, sia confrontando il valore ottenuto con altri software.

(Si badi che **non esiste** una primitiva elementare della funzione proposta).


f(x)=Ln(x)Sen(x)
A
B
Trapezi formula chiusa Tc=0.880252375
Trapezi formula aperta Ta=0.881364625
Valore interpolato (2Ta+Tc)/3=0.880993875