Ottavio Serra

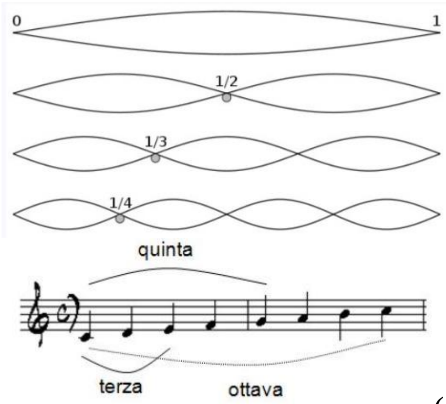
Il problema di Basilea

1. Nicola d'Oresme e la serie armonica.

La serie armonica

$$[1]\mathrm{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

era conosciuta fin dall'antichità, naturalmente non in questa forma, ma come successione indefinita degli inversi dei numeri naturali 1,1/2,1/3,1/4,1/5, …
L'aggettivo "armonica" è dovuto a un fatto scoperto dai pitagorici mentre studiavano gli accordi armonici di una corda vibrante (il *monocordo).* Notarono che, dimezzando, col ponticello, la lunghezza della parte di corda virante, si otteneva una nota, gradevole all'orecchio, di altezza (frequenza) doppia, accordo di ottava; dividendola in tre parti si otteneva un accordo cosiddetto di quinta. Perciò i numeri 1, 1/2 1/3, … costituivano una successione di accordi musicali armonici. L'altezza dei suoni era, ovviamente, inversamente proporzionale alla lunghezza del tratto di corda vibrante.



(da Wikipedia)

Certamente, gli antichi non avevano alcuna idea della convergenza o divergenza di una serie. Siccome la serie cresce lentamente, non è facile, neanche oggi, *vedere subito* il suo comportamento.
La dimostrazione più antica della divergenza della serie armonica è dovuta al francese Nicola Oresme (1323–1382); essa parte dall'idea che, raggruppando opportunamente i termini della serie armonica, si può costruire una serie minorante, a termini costanti positivi, che perciò diverge. Si procede così: 1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+…>1+1/2+(1/4+1/4) +(1/8+1/8+1/8+1/8) +… cioè sostituendo tutti i termini che precedono quello avente al denominatore una potenza di due con quest'ultimo. Si vede che la serie minorante è 1+1/2+1/2+1/2+… chiaramente divergente.
Una dimostrazione della divergenza della serie armonica, basata sul calcolo integrale, discende dalle disequazioni (dove n rappresenta la parte intera di x):

$$[2]\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_{1}^{x} \frac{1}{t}dt < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 < \log(x) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

dalla quale si evince che la serie armonica ha divergenza logaritmica.[1]
Ricordo che, invece, la serie armonica a segni alterni 1-1/2+1/3-1/4+ … è convergente, come si dimostra col criterio di Leibnitz; la convergenza è lenta, perché non è assoluta, e la somma vale log(2).

[1] Per maggiori dettagli, si veda sul mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0,* cartella Articoli, sezione Liceo scientifico Scorza, l'articolo "*La costante di Eulero Mascheroni*".

2. Jakob Bernouilli e la serie armonica generalizzata.

Lo svizzero Jakob Bernouilli è il capostipite della famosa famiglia di matematici che annovera il fratello Joannes e il nipote Daniele. Jakob è noto specialmente per il suo trattato di calcolo di probabilità, *Ars* conjectandi, il nipote Daniele per gli studi di idrodinamica.
Jakob studiò la serie armonica generalizzata

$$[3]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$ [2]

Questa converge perché è maggiorata dalla serie *a cannocchiale* convergente

$$[4]\, 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2.$$

Dopo aver calcolato una discreta approssimazione della [3], Jakob Bernouilli cercò invano di ottenere la somma della serie in forma chiusa; ne parlò al fratello Joannes, che annoverava tra i suoi studenti all'università di Basilea un brillante allievo, Leonardo Eulero (1707-1783).
Questi venne a conoscenza del problema che i più rinomati matematici dell'epoca non riuscivano a risolvere e che veniva chiamato "***il problema di Basilea***".

3. Eulero e la formula mirabile.

Nel 1735 Eulero trovò e pubblicò la soluzione del problema di Basilea, che lasciò ammirati i contemporanei, sia perché la formula mostrava un inaspettato legame col numero π, sia per la genialità e la semplicità del procedimento usato. La mirabile formula trovata da Eulero è la seguente:

$$[5]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Eulero utilizzò la serie di Mac Laurin (1698-1746), per il seno e le formule di Viète (1540-1603) che legano gli zeri di un polinomio ai suoi coefficienti. Sia dato il polinomio di grado n
$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \dots +a_1x+a_0$, siano $x_1, x_2, \dots x_n$ i suoi zeri, reali e complessi) contati con le dovute molteplicità. (Ai tempi di Viète era noto, anche se mancava una dimostrazione formalmente corretta, che un'equazione algebrica di grado n dovesse avere n radici).
Vieète scrive P(x) in funzione dei suoi zeri: $a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Confrontando I coeffici*enti* dei termini *simili nelle due espressioni di P(x)*, ricava

$$[6]\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{-a_{n-1}}{a_n},\sum_{i=1..n-1}^{k=2..n}x_ix_k=\frac{a_{n-2}}{a_n},..,\prod_{k=1}^{n}x_k=\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

Se in P(x) poniamo x=1/z, otteniamo un'equazione in z, di grado n, se a_0 è diverso da zero:

---

[2] La [3], in verità, è un caso particolare della serie armonica generalizzata con esponente qualsiasi di n. Si veda nel mio sito, cartella Articoli sezione Liceo scientifico Scora l'articolo "*Riemann e il fascino dei numeri primi*".

$a_0z^n+a_1z^{n-1}\ldots+a_{n-1}z+a_n=0$ e la somma delle radici $z_1+\ldots z_n=-a_1/a_0$. M i numeri z_k sono i reciproci delle precedenti radici x_k, tutte diverse da zero per l'ultima delle [6], perciò abbiamo

$$[7]\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=\frac{-a_1}{a_0}.$$

Della [7] si servirà Eulero.

Dalla formula di Mac Laurin per il seno si ricava:

$$[8]\frac{sen(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots$$

Gli zeri della [8] sono $x_n=n\pi$, con n diverso da zero. Ponendo $x^2=z$, la [8] diventa

$$[9]\frac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}=1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots$$

I cui zeri sono $z_n=n^2\pi^2$.

A questo punto Eulero estende le formule di Viète da un polinomio a una serie infinita, senza una giustificazione adeguata, e questo è l'unico neo del suo procedimento.

Uguagliando a zero la [9] scrive in realtà un'equazione algebrica di grado infinito e applica la formula [7] di Viète:

$$[10]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z_n}=\frac{+\frac{1}{3!}}{1},$$

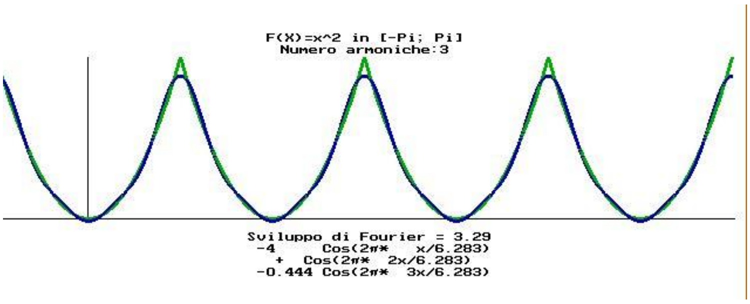
ovvero

$$[11]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Una dimostrazione rigorosa della [5] (della [11]) si può ottenere mediante sviluppo in serie di Fourier (1768-1830) della funzione $f(x)=x^2$ definita nell'intervallo $[-\pi;\pi]$, resa periodica per traslazione lungo l'asse delle x:

$$x^2{}_{[-\pi,\pi]}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$. (Vedi più avanti, nota [4])

Il grafico con le prime 3armoniche è riprodotto nell'immagine seguente[3]



Mediante sviluppo in serie di Fourier è possibile trovare, in forma chiusa, la somma di altre serie numeriche interessanti. Per esempio la somma delle quarte potenze di 1/n

$$\sum_{n==1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

che trova applicazione nel calcolo del potere emissivo integrale del corpo nero.[4]

[3] Vedi nel mio sito la cartella *Programmi eseguibili*, sezione *calcolo*, il programma *Analisi armonica di Fourier*
[4] Vedi nel mio sito la cartella *Articoli*, sezione *Liceo Scientifico Scorza*, l'articolo "*P greco è dappertutto*".