Ottavio Serra

Funzioni iperboliche

Premessa.

Tutti conoscono le funzioni circolari, seno e coseno, definite sul cerchio canonico, centrato sull'origine O(0; 0) degli assi cartesiani e il cui raggio è assunto come unità di misura delle lunghezze: $x^2+y^2=1$. Detto A il punto di intersezione del cerchio col semiasse positivo delle x, A(1; 0), P(x; y) un punto sul cerchio, α l'angolo AOP, cos(α)=x(P) e sen(α)=y(P). Se α è misurato in radianti, anche l'arco AP ha misura α e, cosa più interessante per il seguito, il settore circolare POP'A ha area = α, avendo chiamato P' il simmetrico di P rispetto all'asse x. (Fig.1).

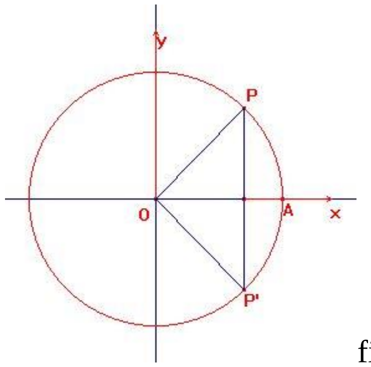


fig.1

Basta una proporzione: l'area S del settore sta all'area π del cerchio come l'angolo al centro del settore, 2α, sta all'angolo giro, 2π.

Si noti che l'area del triangolo POP' vale $\cos(\alpha)sen(\alpha)=\frac{sen(2\alpha)}{2}$.

Vediamo come le definizioni di coseno e seno si possano trasferire dal cerchio all'iperbole canonica, cioè equilatera con semiassi uguali a 1, introducendo le cosiddette funzioni iperboliche, cosh e senh.

L'iperbole canonica x^2-y^2=1 e le funzioni iperboliche.

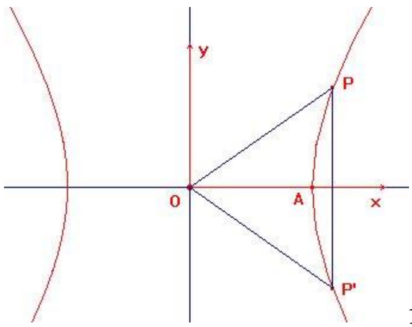


fig.2

Preso un punto P(x; y) sull'iperbole, definiamo cosh(α) = x, senh(α) = y, dove α, in analogia col caso delle funzioni circolari, è l'area del settore ***iperbolico*** POP'A (Vedi Fig.2).

Siccome l'iperbole ha due rami, si decide di prendere P sul ramo destro, di ascissa positiva, anzi maggiore o uguale a 1), e l'area del settore iperbolico, come quella dell'analogo settore circolare, positiva o negativa a seconda che l'ordinate di P sia positiva o negativa e di conseguenza la circolazione dei punti POP'A sia antioraria o oraria.

Siccome, però, P’ e P sono simmetrici rispetto all’asse x, **se si scambiano** P e P’ l’area del settore cambia segno, ma l’ascissa di P resta immutata; ciò significa che l’ascissa di P è una funzione pari dell’area del settore iperbolico mentre l’ordinata è una funzione dispari.

Questa volta, però, il settore è concavo e interno al triangolo POP’, perciò tale settore non è la somma, bensì la differenza tra il triangolo e il segmento (iperbolico) PAP’P. Per calcolare α occorre togliere dall’area del triangolo, che vale xy, l’area del segmento iperbolico che indico con 2J, essendo J l’integrale da 1 (ascissa di A) a x (ascissa di P). Calcolo J.

$J=\int_1^x y((t)dt=\int_1^x \sqrt{t^2-1}dt.$ Il modo più semplice di razionalizzare la funzione integranda è di porre $\sqrt{t^2-1}=z-t,$ da cui segue $2tz=z^2+1$ e quindi $t=\frac{z^2+1}{2z},$ $dt=\frac{2z^2-(z^2+1)}{2z^2}dz=\frac{z^2-1}{2z^2}dz$ e $\sqrt{t^2-1}=z-\frac{z^2+1}{2z}=\frac{z^2-1}{2z}.$ Pertanto

$$J=\int_1^{x+\sqrt{x^2-1}}\frac{(z^2-1)^2}{4z^3}dz=\frac{1}{4}\int_1^{x+\sqrt{x^2-1}}\left(z+\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z}\right)dz=\frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2z^2}-2\log(z)\right]_1^{x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}\right]-\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{1}{8}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2\right]-\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}4x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Rightarrow 2J=x\sqrt{x^2-1}-\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Segue

$[1]\alpha=xy-2J=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Da questa ricavo la x (ascissa di P), che rappresenta cosh(α):

$\sqrt{x^2-1}=e^\alpha-x\Rightarrow 2xe^\alpha=e^{2\alpha}+1\Rightarrow x=\frac{e^{2\alpha}+1}{2e^\alpha}=\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}.$ In definitiva,

$[2]\cosh(\alpha)=\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2},$

$[3]senh(\alpha)=\sqrt{x^2-1}=\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}.$

Dalla [1], ricordando che $x^2-y^2=1$, si ricava $x=\sqrt{y^2+1}$ e perciò

$[4]\alpha=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$

Le formule [1] e [4] esprimono l’area α del settore iperbolico rispettivamente in funzione del cosh(α), ascissa x di P, e del senh(α), ordinata y di P. Ma allora α è l’inversa del coseno iperbolico di x e l’inversa del seno iperbolico di y. Pertanto

$[5]\cosh^{-1}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, con x ≥ 1, perchè il coseno iperbolico non è monotòno, e

$[6]senh^{-1}(y)=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$

Come è usale, la variabile indipendente si indicherà da ora in poi con x e la funzione con y, pertanto, in astratto, senza fare riferimento all'origine geometrica delle funzioni, scriveremo

$[5bis] y=\cosh^{-1}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, dominio: x>1,

$[6bis] y=senh^{-1}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, dominio: ***R.*** Analogamente,

$y=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, y=senh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. (Per entrambe il dominio è ***R).***

Grafici:

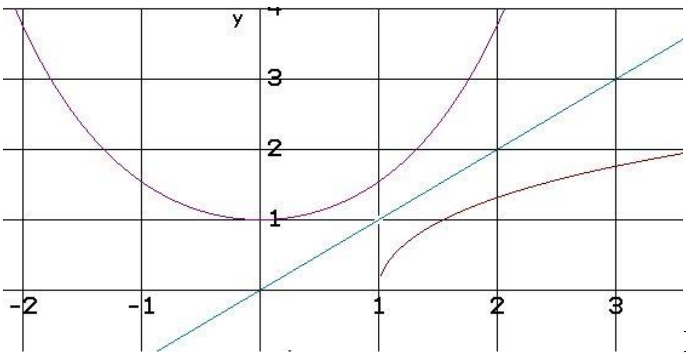


Fig.3

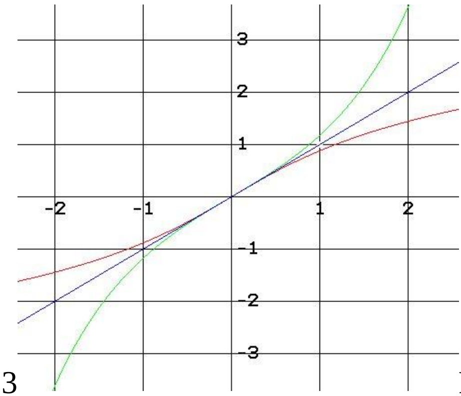


Fig.4

Cosh((x) e inversa (dopo la restrizione del dominio). *Senh(x) e inversa.*

Si noti la simmetria tra una funzione (resa biunivoca, con un'eventuale restrizione) e l'inversa rispetto alla diagonale, y=x, del piano cartesiano.

Nota. *cosh^{-1} viene di solito chiamato SettCosh o ArcCoshh; senh^{-1}, SettSenh o ArcSenh.*

Si definiscono anche tangente e cotangente: $\tanh(x)=\frac{senh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+^{-x}}, \coth(x)=\frac{\cos h(x)}{sen\,h(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-^{-x}}$

In Fig.5 i grafici (Questi suggeriscono l'esistenza di asintoti: **determinarli**).

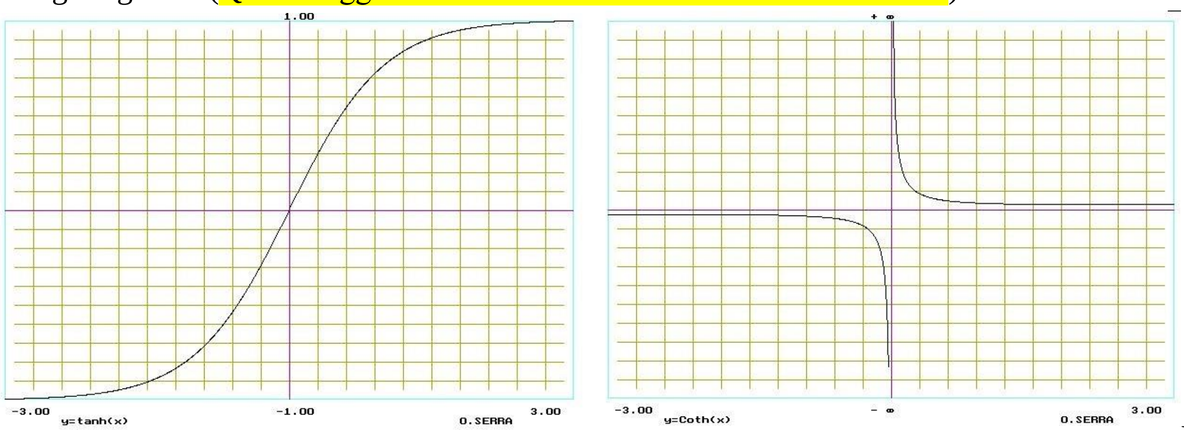


Fig.5

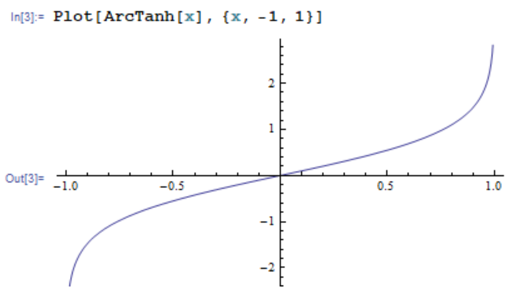
Si noti che Senh: ***R→R e Tanh: R→***]-1; 1[sono ***monotòna crescenti*** e perciò invertibili senza restrizioni, mentre Cosh e Coth richiedono una restrizione del dominio per essere invertite.

Per ottenere Tanh^{-1} si ponga y=Tanh^{-1}(y). Segue x=Tanh(y)=$\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$ e quindi

$[7] y=\mathrm{Tanh}^{-1}(x)\equiv Arc\,\mathrm{Tanh}(x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.(-1<x<1). Analogamente,

$$[8]\ y = Coth^{-1}(x) \equiv ArcCoth(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$ (x>1).

In Fig.6 riporto i grafici di y=**tanh^{-1}**(x) (ArcTanh(x)) e di y=**coth^{-1}**(x) (ArcCoth(x)).



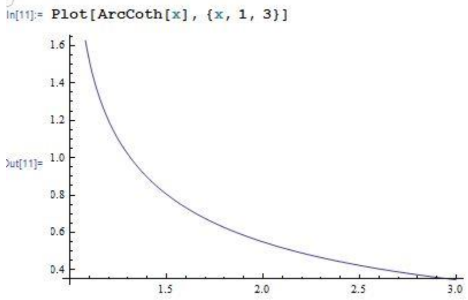


Fig.6

Tanh^{-1}: ***R*** →]-1; 1[. *Coth^{-1}*:]1; +∞[→]0; +∞[.

Derivate.

$$[9]\frac{d}{dx}\mathrm{Cosh}(x) = Senh(x), \frac{d}{dx}Senh(x) = \mathrm{Cos}h(x).$$ **Dimostrazione immediata.**

$$[10]\frac{d}{dx}\mathrm{Tanh}(x) = \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = \frac{1}{\mathrm{Cosh}^2(x)} \equiv 1-\mathrm{Tanh}^2(x).$$

$$[11]\frac{d}{dx}\mathrm{Coth}(x) = \frac{\left(e^x-e^x\right)^2-\left(e^x+e^x\right)^2}{\left(e^x-e^x\right)^2} = \frac{-4}{\left(e^x-e^x\right)^2} = \frac{-1}{Senh^2(x)} \equiv 1-\mathrm{Coth}^2(x). \quad (x>1).$$

Dalle [5 bis] e [6 bis] segue

$$[12]\frac{d}{dx}\mathrm{Cosh}^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x>1,$$ e

$$[13]\frac{d}{dx}Senh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Dalla [7] e dalla [8] otteniamo

$$[14]\frac{d}{dx}\mathrm{Tanh}^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2},$$ (-1<x<1) e

$$[15]\frac{d}{dx}Coth^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2},$$ (x>1).

Esercizi.

(1) Calcolare le derivate di ordine 192 di senh(x) e cosh.(x) e quelle di ordine 311.

(2) Calcolare formule di bisezione per Senh. Cosh,, Tanh, Coth.

(3) Studiare le funzioni $y = \log\left(\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\right)$ e $y = \log\left(\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}\right)$.

(4) Ricavare le derivate delle funzioni iperboliche inverse mediante il teorema di *derivazione delle funzioni inverse.*

(5) Determinare gli sviluppi in serie di Taylor di senh(x) e di cosh(x) con punto iniziale x_0=0.

(6) Integrare le funzioni e^x.Senh(x), e^x.Cosh(x), Tanh(x), Coth(x), $\text{Senh}^2(x)$, $\text{Cosh}^2(x)$, $\text{Tanh}^2(x)$, $\text{Coth}^2(x)$, $\text{Senh}^{-1}(x)$, $\text{Cosh}^{-1}(x)$, $\text{Tanh}^{-1}(x)$, $\text{Coth}^{-1}(x)$, x.$\text{Senh}^{-1}(x)$, x.$\text{Tanh}^{-1}(x)$, x.$\text{Cosh}^{-1}(x)$, x.$\text{Coth}^{-1}(x)$. (Usare al bisogno l'integrazione per parti).

(7) Calcolare le primitive di $Senh\left(\sqrt{x}\right), \text{Cosh}\left(\sqrt{x}\right), Senh^{-1}\left(\sqrt{x}\right), \text{Cosh}^{-1}\left(\sqrt{x}\right), Tanh^{-1}\left(\sqrt{x}\right), \text{Co}t\,\text{h}^{-1}\left(\sqrt{x}\right).$ *

* Usare al bisogno l'integrazione per parti (e per sostituzione).

(8) Calcolare numericamente, a meno di 10^{-2}, $\int_0^1 \text{Tanh}\left(\sqrt{x}\right)dx$. (Badate, la funzione integranda non ammette primitiva elementare).

(9) Ammette invece primitiva elementare la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Non conviene eseguire la sostituzione algebrica $\sqrt{x^2+1} = t - x$, per la laboriosità dei calcoli, meglio una sostituzione mediante una funzione iperbolica (**quale?**). Calcolate poi $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$ Non vi dico il risultato, ma se trovate la formula corretta, il suo valore numerico approssimato è 1.222016177…

(10) Calcolate anche $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx, \int \frac{\sqrt{1-x^2},}{x}d, \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

(11) Calcolate $\int \sqrt{x^2+2x+5}dx, \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx, \int \sqrt{-x^2+2x+3}dx, \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx, \int \sqrt{x^2-2x+3}dx.$

NOTA. Fig.1 e Fig.2 sono state realizzate con "Cabri", Fig.3 e Fig.4 con "Derive, i grafici di Fig.5 col mio programma "*Grafunz*" in Pascal, i grafici di Fig.6 con "Mathematica".