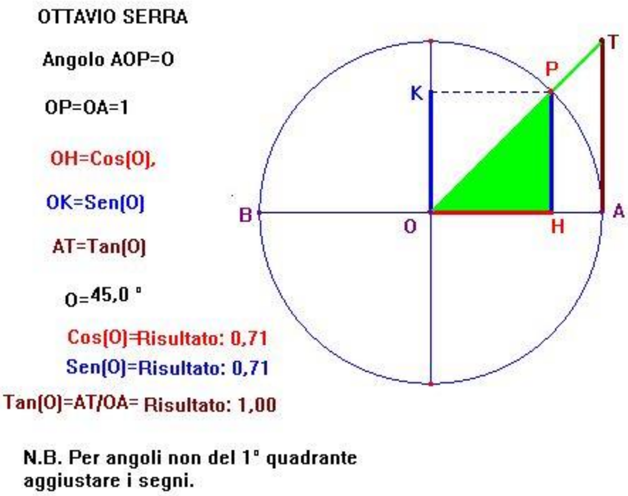
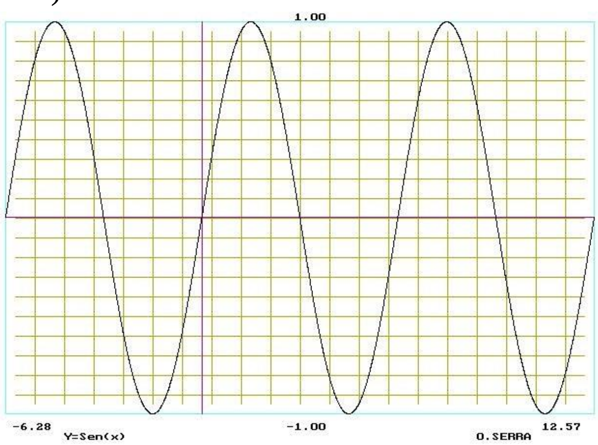
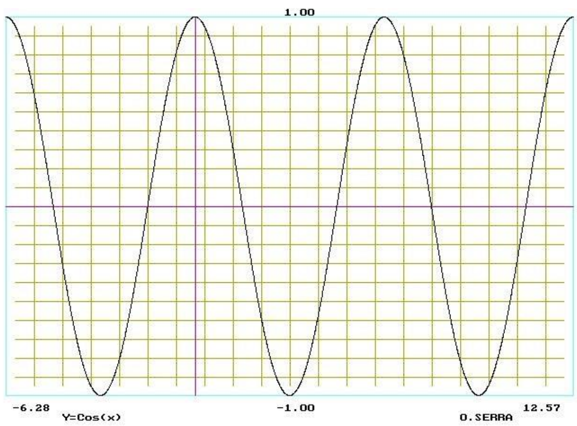
OTTAVIO SERRA,
Formulario di Trigonometria.

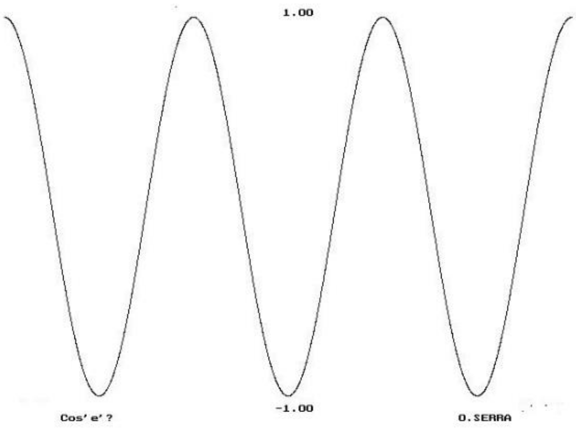


Dal triangolo OPH si deduce:

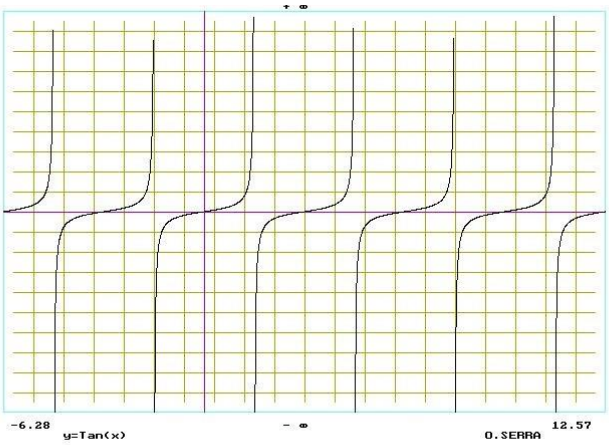
1) $Cos^2x+Sen^2x=1$. $Cosx=Sen(\pi/2 \; -x)$, $Tang(x) = Sen(x)/Cos(x)$, $Cos(x) = \frac{1}{\mp\sqrt{1+Tang^2(x)}}$, $Sen(x) = \frac{Tang(x)}{\mp\sqrt{1+Tang^2(x)}}$. (La prima è l'identità circolare o goniometrica ed è una conseguenza immediata del teorema di Pitagora). La funzione $Cotang(x)=1/Tang(x)=Tang(\pi/2 - x)$.
2) **Grafici** nel piano xy (x è l'angolo in radianti, misurato a partire da OA; positivo in senso antio-rario).

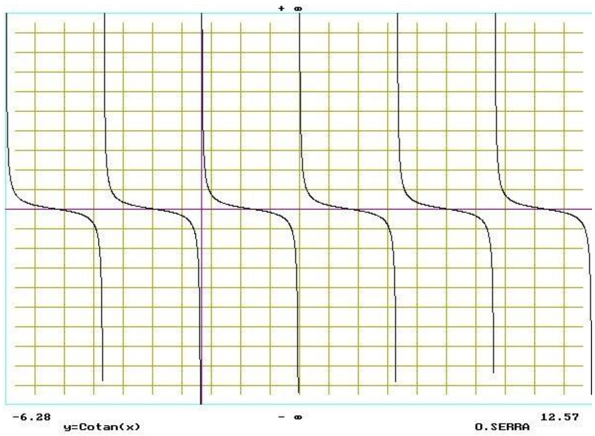






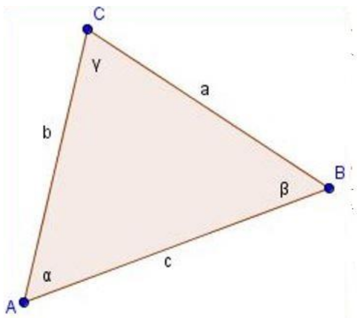
Cosa rappresenta questa curva?





Dai grafici si evince che le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente sono periodiche: che significa? Quali sono i loro periodi? Mentre seno e coseno sono funzioni oscillanti (tra -1 e 1), tangente e cotangente sono *monotòne,* rispettivamente crescente e decrescente.
La Griglia aiuta a localizzare i valori dell'ascissa x. Esprimere a parole il comportamento di Tan(x) nell'intorno del punto $x=\pi/2$, di Cotan(x) nell'intorno del punto **x=0.**
Giustificate le seguenti affermazioni: il **coseno** è una funzione **pari; seno, tangente e cotangente** sono funzioni **dispari. La caratteristica delle funzioni pari, come il coseno, è di avere il grafico simmetrico rispetto all'asse y; e quella delle funzioni dispari?**

TRIGONOMETRIA



Triangolo ABC

1)Teorema dei seni: $a/Sen(\alpha)=b/Sen(\beta)=c/Sen(\gamma)$. (Guarda il triangolo ABC)
(Tracciare un'altezza, sia CH; $CH=aSen\beta=bSen\alpha$. Eccetera).
2)Teorema delle proiezioni: $a=bCos(\gamma)+cCos(\beta)$. (Ovvio).

3)Teorema del coseno o di Carnot: (Lazzaro Carnot) **$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$.** (Applicare il teorema delle proiezioni ai lati a, b e c, moltiplicare la prima formula per a, la seconda per –b, la terza per –c, sommare e semplificare).

Esercizi

a. Calcolare gli angoli di un triangolo i cui lati misurano 3, 6 e 7 metri. Sapresti dire se il triangolo è acutangolo, rettangolo o ottusangolo prima di calcolare i coseni degli angoli?

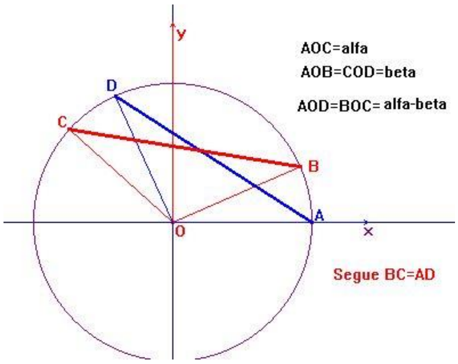
b. Le diagonali di un parallelogrammo misurano 6 e 4 metri e formano un angolo di 30°. Calcolare l'area e il perimetro del parallelogrammo.

c. Calcolare l'area di un parallelogrammo, sapendo che due lati di lunghezza 4 m e $3\sqrt{2}$ m formano un angolo di 120°. (Abituarsi a tradurre in radianti, perché in futuro…).

d. Calcolare l'area del triangolo di lati 5, 6, 9 metri.

Formule goniometriche.

1) **Sottrazione e addizione**. **Cos(α- β)= Cos(α)Cos(β)+ Sen(α)Sen(β). Questa è** la formula fondamentale. Per dimostrarlo, vedi la seguente figura.



A(1; 0), B(Cosβ; Senβ), C(Cosα; Senα), D(Cos(α-β); Sen(α-β)); calcolare le distanze BC e AD, uguagliare e semplificare. **Si può** ottenere la formula precedente, anche applicando il teorema di Carnot al triangolo AOD: provare.

Le formule seguenti sono immediate conseguenze della precedente.

Cos(α+ β)= Cos(α)Cos(β)- Sen(α) Sen(β).

Sen(α+ β)=Sen(α)Cos(β)+Cos(α) Sen(β).

Sen(α- β)=Sen(α)Cos(β)-Cos(α) Sen(β).

Dedurre Tan(α-β) e Tan(α+β), Cotan(α-β) e Cotan(α+β).

2) **Duplicazione**. Sen(2α)=2Sen(α)Cos(β),

$\cos(2\alpha)= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1-2\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1$,

$\tan(2\alpha))=2\tan(\alpha)/(1-\tan^2(\alpha)$, Cotan(2α))=? Facile.

3) **Bisezione**. $Sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-Cos(\alpha)}{2}}, Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+Cos(\alpha)}{2}}\ ,\ Tann\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-Cos(\alpha)}{1+Cos(\alpha)}}$.

(Dimostrarle per esercizio).

4) Formule parametriche razionali. Posto t = Tan(x/2), dimostrarle per esercizio:

$Sen(x)=\frac{2t}{1+t^2}, \mathrm{Cos}(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \mathrm{Tan}\,g(x)=\frac{2t}{1-t^2}$. Suggerimento:

$Senx = 2Sen\frac{x}{2}C\,os\frac{x}{2} = \frac{2Sen\frac{x}{2}C\,os\frac{x}{2}}{C\,os^2\frac{x}{2} + Sen^2\frac{x}{2}} = \dots.$ $C\,os\,x = C\,os^2\frac{x}{2} - Sen^2\frac{x}{2} = \dots$, eccetera.

5) Formule di prostaferesi. (Parti da Sen(α+β) = …, Sen(α-β) =…, somma, sottrai, eccetera).

Sen(x)+Sen(y)=2Sen($\frac{x+y}{2}$)Cos($\frac{x-y}{2}$), Sen(x)-Sen(y)=2Cos($\frac{x+y}{2}$)Sen($\frac{x-y}{2}$)

Cos(x)+Cos(y)=2Cos($\frac{x+y}{2}$)Cos($\frac{x-y}{2}$), Cos(x)-Cos(y)=-2Sen($\frac{x+y}{2}$)Sen($\frac{x-y}{2}$).

6) Formule di Werner (inverse delle formule di prostaferesi).

Sen(x)Cos(y)=$\frac{1}{2}[Sen(x+y)+Sen(x-y)$, Cos(x)Sen(y)=$\frac{1}{2}[Sen(x+y)-Sen(x-y)]$,

Cos(x)Cos(y)=$\frac{1}{2}[Cos(x+y)+Cos(x-y)$, Sen(x)Sen(y)=$-\frac{1}{2}[Cos(x+y)-Cos(x-y)]$.

Sarano utili, in futuro, per trasformare prodotti di funzioni goniometriche in somme, facilmente integrabili. **Esempio:** Sen(7x)Cos(3x)=$\frac{1}{2}$[Sen(10x)+Sen(4x)]. Aspetta il calcolo integrale, per il momento applica a qualche equazione

Esercizi

a. Calcolare Sen(15°), Cos(15°), Tan(15°), CoTan(15°); idem, per l'angolo di 75°.

b. Calcolare Tan($\frac{\pi}{8}$) e poi delle altre tre funzioni goniometriche. **Nota,** l'angolo è espresso in radianti: qual è il suo valore in gradi? Idem, per l'angolo di $5\frac{\pi}{8}$.

c. Risolvere le equazioni: Sen(6x)+Sen(2x)=0; Sen(6x)+Cos(2x)=0:

Tan(x)+3Cotan(x)=2$\sqrt{3}$; Sen(x)+Tan(x)=0; 2Sen(x)+Tan(x)=0;

Sen(x)+2Tan(x)=0; 2Sen(x)-Tan(x)=0; Sen(x)+2Cos(x)=3; Sen(x)+2Cos(x)=4.

Sen(x)+2Cos^2(x)=2; Sen^2(x)+Sen(x)Cos(x)-2Cos^2(x)=0;

$\sqrt{3}$ Sen(x)+Cos(x)-2=0 (Prova con le formule parametriche razionali);

Sen(x)+2Cos(x)=3; Sen(x)+2Cos(x)=$\sqrt{5}$; Sen(x)-Cos(x)-$\sqrt{2}$=0;

2Cos(9x)Cos(7x)=Cos(16x); Sen(4x)Sen(6x)=$\frac{1}{2}$Cos(2x);

Cos(12x)+Cos(10x)+Cos(8x)=0; Cos(12x)+Cos(8x)+Cos(2x)=0;

Sen(7x)+Sen(3x)+Cos(2x)=0; Sen(8x)-Sen(4x)+Cos(2x)=0;

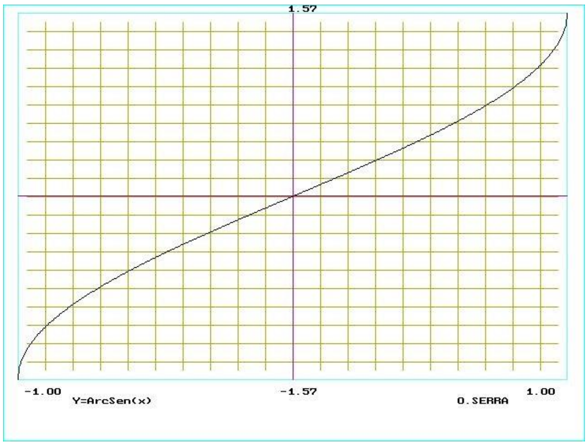
Sen(7x)+Sen(3x)+Sen(2x)=0. (Forse ha infinite soluzioni, **ma solo una è evidente**).

x-Cos(x)=0 (Ohibò! Questa chi la risolve? Se ci sono soluzioni, devono essere le ascisse dei punti di intersezione delle curve y=x e y=Cos(x). Fai un grafico ricava una stima approssimata dell'**unica** soluzione).

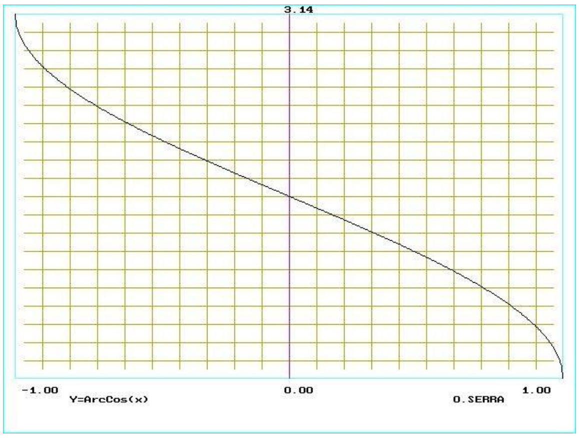
d. La funzione f(x)=Sen(x)+Cos(x) assume il valore 1 per gli angoli complementari x=0° e x=90°. Qual è il valore massimo della funzione f? Utilizzare considerazioni di simmetria. Determinare anche il valore minimo.

Funzioni circolari inverse.

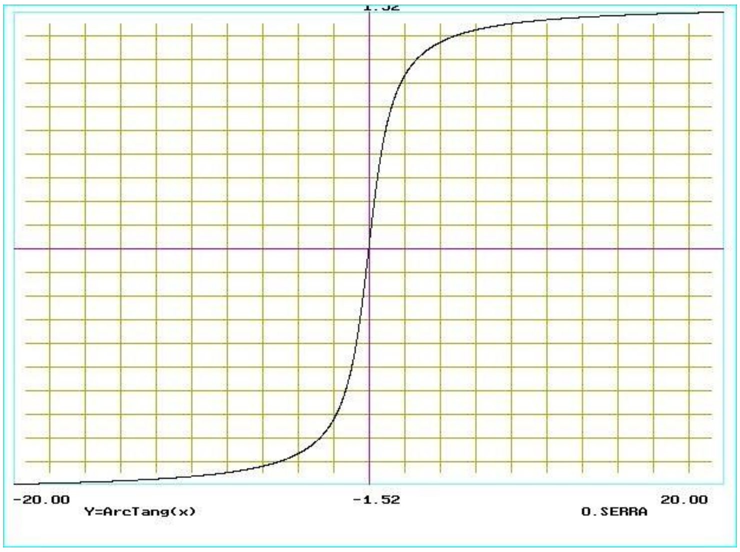
Y = ArcSen(x) è l'inversa funzionale di x = sen(y) dopo aver ristretto il dominio del seno a $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.



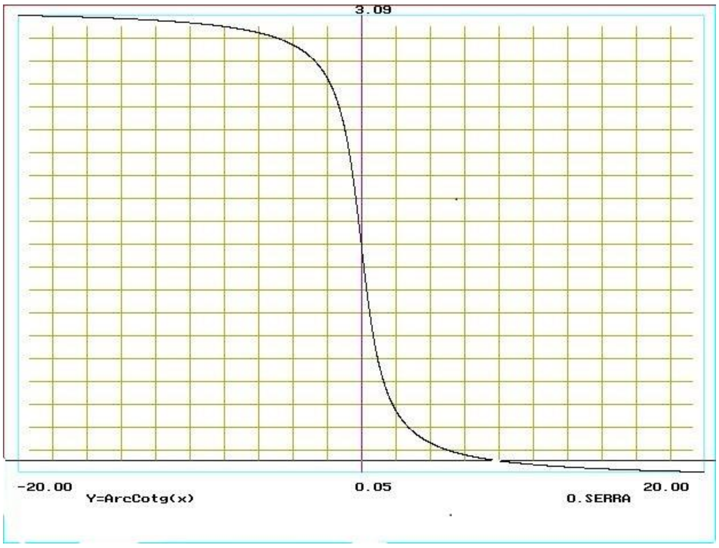
Y = ArcCos(x) è l'inversa di x = Cos(y) (restrizione del dominio all'intervallo [0; π]. Grafico:



Y = ArcTang(x) è l'inversa di x = Tang(y) dopo aver ristretto il dominio della tangente a $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.



Y = ArcCotang(x) è l'inversa di x = Cotang(y) dopo aver ristretto il dominio della cotangente all'intervallo]0; π[. Grafico:



Derivate delle funzioni inverse. **Se non avete studiato le derivate, saltate questo paragrafo**.

Sia x = g(y) è l'inversa di y = f(x), allora D[f(x)]=1/D(g(y)]. Perciò:

Se x=sen(y), D[sen(y)]=cos(y) implica D[ArcSen(x)]=1/cos(y)=1/$\sqrt{1-sen^2y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Se x=cos(y), D[cos(y)]=-sen(y) implica D[ArcCos(x)]=-1/sen(y)=-1/$\sqrt{1-cos^2y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Se x=Tang(y), D[Tang(y)=1+Tang^2(y) =1+ x^2 implica $D[ArcTan(x)] = \frac{1}{1+x^2}$.

Se x=Cotang(x), D[CoTang(y)=-1-Tang^2(y) =-1- x^2 implica $D[ArcCoTan(x)] = \frac{-1}{1+x^2}$.

ESERCIZI.

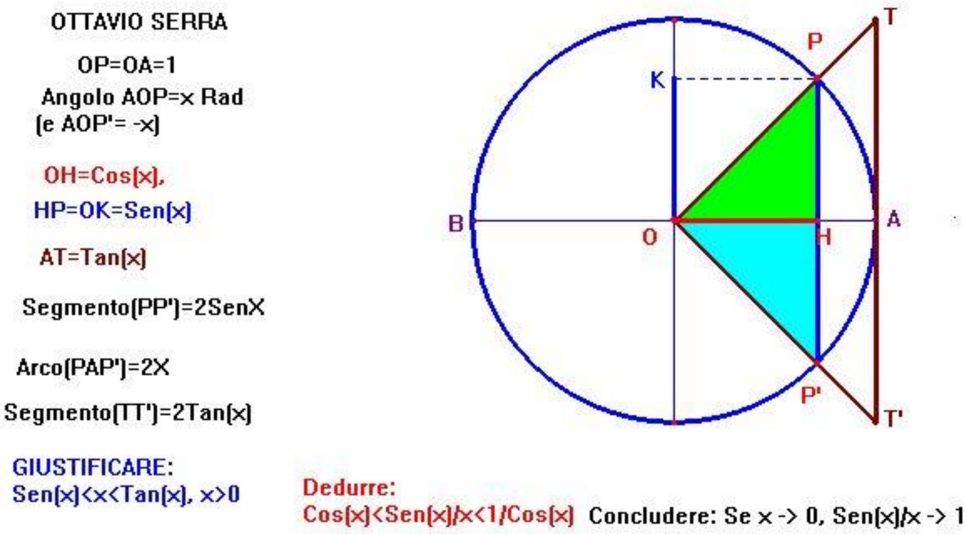
1) Le funzioni arcoseno e arcocoseno sono definite nell'intervallo [-1; 1]. Siccome la somma delle loro derivate è zero, segue che la loro somma è costante. Determinare tale costante.

Stesso esercizio per la somma di Arcotangente e di Arcocotangente definite su tutto ***R***.

Dimostrare le proposizioni precedenti senza far uso delle derivate.

2) Secondo la formula di Erone, un triangolo di lati a, b, c ha area $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ essendo p il semiperimetro. Dimostrare tale formula, partendo dalla formula immediata S=semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso. Sfruttare il teorema del coseno per determinare il coseno dell'angolo compreso tra due lati e poi ricavare il seno dall'identità circolare $Cos^2x+Sen^2x=1$.
3) Risolvere il seguente problema. In un triangolo ABC la bisettrice AS dell'angolo A divide il lato BC in due parti, BS=9 cm ed SC=6 cm. Sapendo che il perimetro del triangolo è 50 cm, calcolare le lunghezze dei lati, l'area del triangolo e la lunghezza della bisettrice AS.

Approssimazione ed esattezza: un approccio euristico.



Dal disegno e dalla didascalia si riconosce che il segmento PP' è minore dell'arco PAP', perché il segmento è il percorso minimo tra due punti. Meno ovvio è che l'arco PAP ha lunghezza minore del segmento TT'. Per dimostrarlo, osservo che l'area del settore circolare OPAP' è minore dell'area del triangolo OTT', in quanto il settore è contenuto nel triangolo. L'area del settore è $\frac{1}{2}r^2.2x=x$ (r=1 e gli angoli sono misurati in radianti), l'area del triangolo è $\frac{1}{2}$OA.TT'=$\frac{1}{2}$r.2Tan(x)=Tan(x), perciò x<Tan(x). In conclusione, **Sen(x)<x<Tan(x).** Se per un momento supponiamo x positivo e minore di un angolo retto, Sen(x)>0 e allora, dividendo per esso e invertendo le frazioni, si ottiene $[1] Cos(x) < \frac{Sen(x)}{x} < 1$. Siccome si tratta di disuguaglianze tra funzioni pari, la [1] resta vera sia per valor postivi, sia per valori negativi di x. E siccome per x arbitrariamente piccolo in valore assoluto

Cos(x) è sempre più prossimo a1, si conclude che $\frac{Sen(x)}{x}$ ***tende*** a 1 quando si prende x sempre più prossimo a 0, ma restando, ovviamente, diverso da 0. Si scrive $\lim_{x \to 0} \frac{Sen(x)}{x} = 1$ e si legge: il **limite per x che tende a 0, ma x diverso da 0, di** $\frac{Sen(x)}{x} = 1$. (Fare dei test con la calcolatrice; se trovate che la frazione si avvicina a 0,017 invece che a 1, vuol dire che …).

Ciò si interpreta dicendo che x è un'approssimazione di Sem(x), tanto migliore quanto più x è piccolo.

Il solito Pierino ha pensato che un'approssimazione migliore di Sen(x) è $\mathbf{x+ax^2}$, cioè aggiungendo al termine lineare x un termine quadratico, con un coefficiente "**a**" da determinare opportunamente.

Dimostrate, senza eseguire alcun calcolo, che il coefficiente "**a**" deve essere **0,** perciò l'idea di Pierino non funzione. Una migliore approssimazione potrebbe essere, forse, $x+ax^3$. Ritenete plausibile questa seconda proposta? Giustificare la risposta.

Collegata alla precedente è la seguente: se x tende a 0, $\frac{1-Cos(x)}{x^2}$ marcia verso $\frac{1}{2}$. Moltiplicate numeratore e denominatore di $\frac{1-Cos(x)}{x^2}$ per 1+Cos(x) e tenete conto del risultato precedente.

Si ricava che in prossimità di x=0 Cos(x) si approssima con $1-\frac{1}{2}x^2$.

Secondo voi, un'approssimazione migliore si potrebbe ottenere aggiungendo al termine quadratico un monomio di grado terzo o quarto? Motivate la risposta.

Quanto detto è il primo passo per costruire le tavole delle funzioni goniometriche; per quanto riguarda le calcolatrici, gli algoritmi sono implementati nel microprocessore.