Ottavio Serra

Dalle equazioni di Maxwell alle onde elettromagnetiche

Premessa.

Maxwell elaborò dal punto di vista matematica i lavori dei sui predecessori, essenzialmente quelli di Ampère e di Faraday, con una importantissima aggiunta alla legge della circuitazione di Ampère, per una fondamentale **esigenza di simmetria**, che si dimostrò decisiva per la scoperta delle **onde elettromagnetiche** e per la conseguente **teoria della luce**, come vedremo tra breve.
In seguito i **principi di simmetria** assunsero sempre di più il **ruolo di guida** per la giustificazione o la scoperta di leggi fisiche, dalla **teoria della relatività** di Einstein al **modello a quark** delle particelle di Murray Gel-Man.
Esemplificherò ora il **ruolo** dei principi di **simmetria** presentando il teorema di Gauss sul flusso di un campo vettoriale come conseguenza necessaria delle simmetrie dello spazio (e del tempo); in questa prospettiva il teorema di Gauss diventa un principio regolatore di leggi fisiche, quali le leggi di Newton e di Coulomb. Le **simmetrie dello spazio** (e del tempo) sono descritte dalle seguenti proprietà (che assumerò come postulati):
1: lo spazio è tridimensionale ed euclideo.
2: lontano da corpi interagenti lo spazio (vuoto) è **omogeneo** (ha le stesse proprietà in ogni punto) e **isotropo** (ha le stesse proprietà in ogni direzione).
3: il tempo è **omogeneo** (ha le stesse proprietà in ogni istante) e **assoluto** (scorre allo stesso modo per tutti gli osservatori: **è il tempo di Galilei e di Newton**).
Come capiremo in seguito, la teoria di Maxwell è una teoria relativistica, ma Maxwell non poteva saperlo, perché il suo lavoro precede di 32 anni quello di Einstein (1873 e 1905 rispettivamente).
Il teorema di Gauss esprime il flusso di un campo vettoriale, in particolare del campo elettrico, attraverso una superficie chiusa in funzione delle sorgenti, cariche interne alla superficie.
Le **sorgenti** di un campo vettoriale si chiamano ***cariche;*** cariche elettriche sono le sorgenti del campo elettrico, cariche gravitazionali le sorgenti del campo gravitazional***e.*** Queste ultime, per una mirabile simmetria della natura, sono proporzionali alle masse, e perciò da Newton identificate con esse; **Einstein** chiamò questa simmetria ***principio di equivalenza*** e su di esso edificò **la teoria della relatività generale** (1915).
La legge di Gauss afferma che il flusso di un campo vettoriale ***uscente*** da una superficie **chiusa** S è proporzionale alla carica interna alla superficie. (Vedi fig.1)

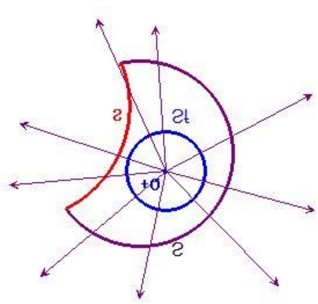

fig.1

Basta ragionare su una carica "*puntiforme*" Q (se positiva, le linee di forza sono uscenti, se negativa sono entranti). **Se la carica non si può considerare puntiforme**, la si divise in parti arbitrariamente piccole e poi si sommano i contributi (si **integra)**. Se consideriamo una superficie sferica S_f di centro Q, le linee di forza che intersecano S sono **tutte e sole** quelle che intersecano S_f, perciò il flusso è lo stesso. L'esigenza della proporzionalità tra flusso e carica è giustificata dal fatto che se il flusso avesse una dipendenza **non lineare** dalla carica sorgente, allora il valore del flusso dipenderebbe dall'arbitrarietà in cui ciascuno **pensa** suddivisa la carica. Se, per esempio, il flusso fosse proporzionale al quadrato della carica, $\Phi = \alpha Q^2$, e pensassi Q divisa in due parti uguali, avremmo $\Phi = \alpha\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{Q}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha Q^2$, che è la metà di prima e così via per le altre infinite suddivisioni e le altre infinite dipendenze funzionali.

Non si potrebbe costruire una teoria del campo, non sarebbe possibile la scienza.

Per motivi storici la costante di proporzionalità è posta uguale a **4πk**, dove 4π dipende dalla geometria, k è una costante di ***dimensionamento****:* la costante di Coulomb per il campo elettrostatico (per il flusso del campo gravitazionale k va sostituita con la costante di gravitazione universale G e nella legge di Newton G va preceduta dal segno *meno, perché il campo gravitazionale è sempre attrattivo*).

In definitiva

$$[1]\Phi_{S(chiusa)}\left(\vec{E}\right) = 4\pi kQ,$$

Usando gli integrali, superficiali e di volume), la legge di Gauss si scrive

$$[1']\int_S \bar{E}.\bar{n}dS = 4\pi KQ = 4\pi K\iiint_V \rho(x,y,z)dV$$

. (**n** è il versore della normale esterna alla superficie chiusa S, V il volume racchiuso da S, ρ è la densità volumica di carica (elettrica, in C/m^3; gravitazionale in Kg/m^3; ecc.). Nel caso della legge di Coulomb si suole porre, nel vuoto, $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, essendo ε_0 la costante dielettrica del vuoto (ε_0=8,854.10^{-12} F/m, Farad/metro).

Gauss dimostrò il suo teorema ammettendo valida la legge di Newton (e di Coulomb.)

Capovolgendo il punto di vista, la legge di Gauss diventa un principio fondamentale legato alla simmetria dello spazio. In tale prospettiva la legge di Coulomb si deriva osservando che il flusso attraverso due superfici sferiche centrate su una carica puntiforme Q sono attraversate dallo stesso flusso e perciò il flusso per unità di superficie, per l'isotropia dello spazio, è inversamente proporzionale all'area della sfera. Ma nello spazio euclideo l'area della sfera è proporzionale al quadrato del raggio e si ottiene la legge di Coulomb (idem, quella di Newton).

La potenza dei principi di simmetria consente di trovare, senza calcolo integrale, il campo elettrico generato da un filo rettilineo infinitamente lungo (**molto lungo rispetto alle distanze in gioco**) elettrizzato in modo uniforme, o il campo generato da un piano elettrizzato in modo uniforme.

Chiaramente, se l'elettrizzazione non è uniforme o se non si intravede un'adeguata simmetria, è necessario ricorrere al calcolo integrale.

Che il campo magnetico generato dalla corrente in un filo rettilineo indefinito decresca con la (**semplice**) distanza dal filo è verificabile sperimentalmente (legge di Biot e Savart), ma la simmetria cilindrica della sorgente e l'isotropia dello spazio rendono la legge necessaria, inevitabile (**non può essere altrimenti**!).

Una considerazione importante. Se la superficie **chiusa** non contiene cariche, il flusso uscente è zero; è zero anche se ci sono cariche esterne alla superficie. In tal caso, infatti, il flusso attraverso una parte della superfice è entrante e per l'altra parte è uscente, ma di modulo uguale (vedi fig.2).

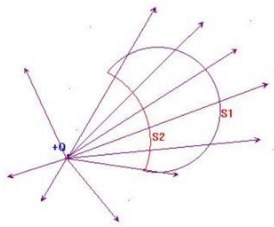

fig.2

Le due parti di S si possono considerare due superfici distinte ***attaccate*** per il bordo comune, che è una linea chiusa γ. Le due superfici aperte: (**pentola e coperchio**) sono attraversate dallo stesso flusso. Si conclude che attraverso una superficie aperta **il flusso (**di un qualunque campo vettoriale**) non dipende dalla forma o dall'area della superficie, ma soltanto dal suo bordo γ.**

Faccio due esempi. Come curva γ prendo la circonferenza di centro O e raggio OA=r (vedi fig.3)

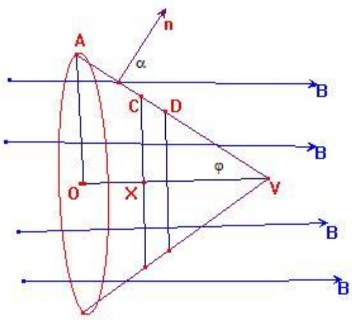

fig.3

Considero poi due superfici di bordo γ, prima il cerchio limitato da γ e poi la superficie laterale del cono di base il cerchio limitato da γ e vertice V. Considero un campo vettoriale uniforme ***B*** parallelo all'asse OV del cono. Il flusso attraverso il cerchio è ovviamente $\Phi=\pi r^2 B$. Il flusso attraverso la superficie laterale del cono è l'area laterale del cono per B per cos(α), ma α è l complementare di φ e quindi $\Phi=\pi r(AV)B.\text{sen}(\varphi)$. Ma $AV.\text{sen}(\varphi)=OA=r$, perciò infine $\Phi=\pi r^2 B$, come prima.

Si noti che in questo esempio non c'è stato bisogno di calcolo integrale, perché la normale alla superficie del cono forma un angolo fisso con la direzione del campo.

Un secondo esempio.

Considero ancora la circonferenza γ di centro O e raggio OA=r, ma questa volta come seconda superficie di bordo γ prendo la superficie semisferica di circonferenza massima γ (vedi fig.4).

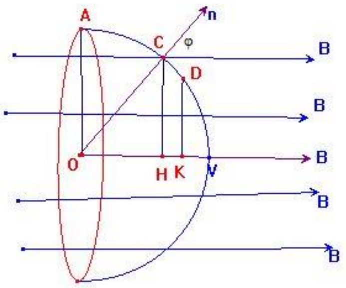

fig.4

Considero la zona sferica di altezza infinitesima HK limitata dalle circonferenze di centri rispettivamente H e K e raggi HC e KD. L'area di tale zona è $dS=2\pi HC.CD$. Passando da C a D l'angolo φ varia di dφ, perciò $CD=OC.d\varphi=r.d\varphi$, mentre $HC=r.\text{sen}(\varphi)$.

Pertanto $dS=2\pi r.\text{sen}(\varphi).rd\varphi=2\pi r^2\text{sen}(\varphi)d\varphi$.

Il flusso infinitesimo attraverso dS sarà $d\Phi=2\pi r^2\text{sen}(\varphi)d\varphi.B.\cos(\varphi)$ e infine

$\Phi = \int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 sen(\varphi) B\cos(\varphi) d\varphi = 2\pi r^2 B \int_0^{\pi/2} sen(\varphi) dsen(\varphi) = 2\pi r^2 B \frac{1}{2}\left[sen^2(\varphi) \right]_0^{\pi/2} = \pi r^2 B$, come ci si aspettava.

Questi due esempi vogliono essere solo un'illustrazione (una conferma psicologica) del teorema generale secondo il quale il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie **non dipende dalla forma e dalla dimensione della superficie ma solo dal suo bordo**, dimostrato più sopra in modo generale con considerazioni di simmetria e praticamente senza bisogno di calcoli.

Le equazioni di Maxwell.

[1] $\int_{S_{chiusa}} \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(x,y,z)dV$ (è la legge di Gauss).

[2] $\int_{S_{chiusa}} \vec{B}.\vec{n}dS = 0$ (le linee di forza del campo magnetico sono linee chiuse, non esistono "cariche magnetiche" isolate, monopoli magnetici, le sorgenti del campo magnetico sono cariche elettriche in movimento, sono le correnti elettriche).

[3] $\oint_\gamma \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\gamma} \vec{B}.\vec{n}dS$ (e la legge di Faraday-Lenz. Il primo membro è la forza elettromotrice indotta espressa come circuitazione del **campo elettromotore indotto**; si badi che questo vettore non è conservativo, non è il campo elettrostatico. La circuitazione è l'integrale curvilineo lungo una linea chiusa, un circuito elettrico, Al secondo membro c'è il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie S avente la linea chiusa γ come bordo.

[4] $\oint_\gamma \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 i + \frac{d}{dt}\int_{S_\gamma} \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}.\vec{n}dS$ (equazione di Ampère – Maxwell).

Se ci si ferma al primo addendo del secondo membro, si ha la legge di Ampère, che consente di calcolare il campo magnetico nel caso stazionario. Il secondo addendo è il contributo originale di Maxwell, che giustificherò nelle righe seguenti.

Si consideri il circuito RC (vedi fig.5)

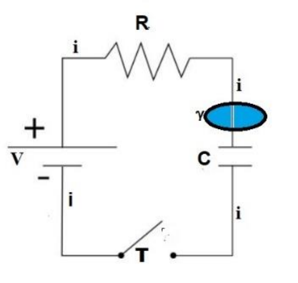

fig.5

Alla chiusura del circuito (tasto T) la resistenza è percorsa da una corrente variabile i, mentre il condensatore si va caricando fino a raggiungere sulle armature una carica Q=CV e la corrente tende a zero.

Secondo la legge di Ampère, intorno al filo percorso dalla corrente si crea un campo magnetico **B** (variabile con i) la cui circuitazione lungo la circonferenza γ di raggio r, centrata sul filo, è $2\pi rB=\mu_0 i$ e si ottiene per B la formula di Biot e Savart.

Il condensatore però dovrebbe rappresentare un ostacolo insormontabile per la corrente, che dovrebbe essere nulla. Invece è diversa da zero. Durante la fase transitoria, prima che tra le armature si raggiunga una tensione pari a V che neutralizza quella della batteria, le cose vanno come se nel condensatore ci fosse una specie di corrente, **non di cariche in movimento**, che Maxwell chiamò **corrente di spostamento i**$_S$: vediamo perché. Come è noto, nel condensatore si genera un campo elettrico uniforme **E** ortogonale alle armature, variabile nel tempo, il cui modulo è E= σ/ε_0. La derivata del suo flusso dovrebbe dare la corrente di **spostamento** e questa dovrebbe risultare uguale alla corrente di conduzione i, **per il principio di continuità.**

Detta S l'area delle armature, risulta $\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{d}{dt}ES = \frac{d}{dt}\frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}i$. Questa, però, **non è la corrente di conduzione, lo è a patto di moltiplicarla per ε₀.** Pertanto, la corrente di spostamento dovrebbe essere $i_S = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\Phi_S\left(\vec{E}\right)$.

La legge di Ampère, completata da Maxwell, è dunque $\oint_\gamma \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0(i+i_S) = \mu_0 i + \mu_0\varepsilon_0.\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}.\vec{n}dS$.

Maxwell aveva notato la mancanza di simmetria tra la legge di Faraday e la legge di Ampère: come una variazione di B genera la circuitazione di E, ci si aspetterebbe che una variazione di E generasse la circuitazione di B, ma nulla di tutto questo c'era prima di Maxwell (1873).
E' mirabile che un'esigenza, **puramente teorica**, di **simmetria** abbia condotto Maxwell alle onde elettromagnetiche e alla teoria elettromagnetica della luce.

Le equazioni di Maxwell nel vuoto, in assenza di cariche e di correnti elettriche.

[1'] $\int_{S_{chiusa}} \vec{E}.\vec{n}dS = 0$

[2'] $\int_{S_{chiusa}} \vec{B}.\vec{n}dS = 0$

[3'] $\oint_\gamma \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\gamma} \vec{B}.\vec{n}dS$

[4'] $\oint_\gamma \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S_\gamma} \vec{E}.\vec{n}dS$.

Le equazioni [3'] e [4'], nella loro simmetria, già ci fanno capire che una variazione (nel tempo) di **B** produce un campo elettrico **E** variabile, la cui variazione produce un campo magnetico **B** e così via. I due campi, perciò, mentre variano si propagano nello spazio, come illustrato nella seguente fig.6.

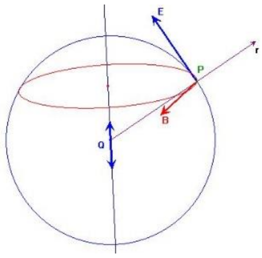

fig.6

Una carica Q, oscillando (verticalmente, come in fig.6), genera in P un campo elettrico variabile con la frequenza di Q. Ma una carica in moto è una corrente, che genera un campo magnetico; **il campo magnetico** la cui linea di forza passante per P è la circonferenza **orizzontale** disegnata in figura. Perciò Campo elettrico e campo magnetico sono ortogonali tra loro. I due campi costituiscono nel loro complesso un unico campo, il **campo elettromagnetico.** Questo, per l'omogeneità e l'isotropia dello spazio vuoto, si propaga per onde **sferich**e centrate su Q. Ogni semiperiodo i campi si invertono, come è illustrato nella **fig7,** propagandosi perpendicolarmente al piano contenente **E** e **B**.

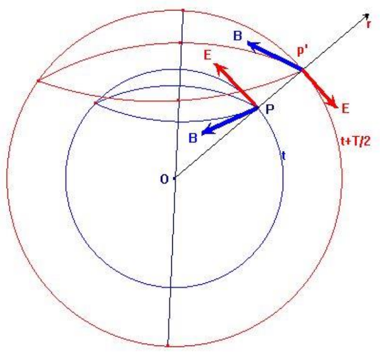

fig.7

A grande distanza da Q l'onda sferica si può considerare piana e a questo caso mi limiterò per semplicità.
Considero un riferimento cartesiano xyz e assumo x come direzione di propagazione, y come direzione di **E**, z come direzione di **B**. Vedi fig.8.

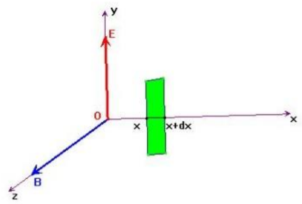

fig.8

Il rettangolo in verde che giace nel piano xy ha lunghezza l parallela all'asse y e larghezza infinitesima dx. il suo bordo γ sia orientato n senso antiorario (rispetto all'osservatore). La legge di faraday [3'] fornisce $-l.E(x,t)+l.E(x+dx,t)=-\frac{\partial B}{\partial t}ldx \Leftrightarrow l\frac{\partial E}{\partial x}dx=-\frac{\partial B}{\partial t}ldx$ ovvero

$$[5]\frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Applico ora la [4'] al rettangolo giallo di fiig.9

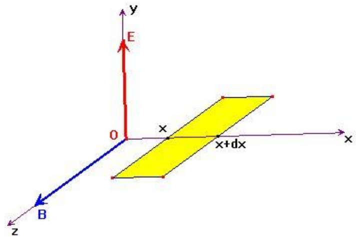

fig.9

Il rettangolo giallo abbia ancora lunghezza l, però ora parallela all'asse z, e larghezza dx e il suo bordo γ orientato in senso antiorario. La [4'] fornisce

$lB-l\left(B+\frac{\partial B}{\partial x}dx\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}.ldx \Leftrightarrow -\frac{\partial B}{\partial x}ldx=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}.ldx$ e infine

$$[6]\frac{\partial B}{\partial x}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Derivando la [5] rispetto a x, la [6] rispetto a t e ricordando il teorema di Schwartz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste, si ottiene $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 B}{\partial t\partial x}=-\frac{\partial^2 B}{\partial x\partial t}=+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, cioè

$$[7]\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Derivando la [6] rispetto a x e la [5] rispetto a t, si ottiene analogamente

[8] $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2}$.

La [7] e la [8] son formalmente identiche, equazioni d'onda, del tipo trovato per la prima volta da D'Alembert, per le corde vibranti, in cui al posto di $\mu_0\varepsilon_0$ c'è $1/v^2$, essendo v la velocità di propagazione delle onde lungo la corda. Dunque, la velocità delle onde elettromagnetiche è $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi.10^{-7}.8,854.10^{-12}}} = \dfrac{10^9}{\sqrt{0,4.\pi.8,854}} = \dfrac{10^9}{3,3356} \approx 2,9970.10^8 m/s$, identica alla **velocità della luce nel vuoto**.

(Ricordando che **ε_0** si misura in **F/m** (Farad al metro) e **μ_0** in **Henry/m= Ώs/m**, verificare che $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ ha effettivamente le dimensioni di una **velocità)**.

Nota storica importante. Da Galilei in poi sappiamo che il valore di una velocità è relativa al sistema di riferimento, ma in questo caso qual è il sistema di riferimento in cui le onde elettromagnetiche hanno la velocità $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$? C'è un sistema di riferimento **privilegiato** e quindi **assoluto,** o la velocità **c** della luce è la ***stessa* in tutti i sistemi di riferimento**? Forse è per questo che le equazioni di Maxwell non danno nessuna indicazione sul sistema di riferimento? Einstein elevò questa **congettura** (**c è invariante**, cioè la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali) al rango di **postulato,** salvando così il principio di relatività galileiana, ma questo postulato costrinse a **cambiare** i concetti di **lunghezza e di durata**, che divennero relative al sistema di riferimento e variabili con questo, mentre **l'invarianza**, **(l'assoluto)**, si spostò a un **livello più profondo** e portò al concetto di **spazio-tempo** (Teoria della relatività speciale del 1905).

La soluzione sinusoidale delle equazioni [7] e [8].

Con la scelta adottata del sistema di riferimento le tre componenti spaziali dei due campi sono le seguenti: **E**=(0,E,0) e **B**=(0,0,B). (Vedi fig.8 e fig.9).

I due campi sono in concordanza di fase e perciò le soluzioni sinusoidali sono

[9] $E = E_0 \operatorname{Cos}(kx - \omega t)$

[10] $B = B_0 \operatorname{Cos}(kx - \omega t)$

E_0 e B_0 sono i valori massimi (le **ampiezze**), k =2π/λ (λ è la lunghezza d'onda), ω=2π/T (T è il periodo). Verificare che la [9] è soluzione della [7] (e la [10] è soluzione della [8]).

Derivando la [9] rispetto a x, la [10] rispetto a t e sostituendo nella [5] si ottiene

$-kE_0 Sen(kx-\omega t) = -\omega B_0 Sen(kx - \omega t)$. Da questa segue $\dfrac{E_0}{B_0} = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T} = c$, cioè **B=E/c**. (**Il modulo del campo magnetico è uguale al modulo del campo elettrico diviso per la velocità della luce**).

(Verificare che allo stesso risultato si arriva derivando la [9] rispetto a t, la [10] rispetto a x e sostituendo nella [6]).

Densità dii energia e intensità di un'onda elettromagnetica.
Tratto il caso semplice delle onde piane monocromatiche (sinusoidali).
Considero dapprima il campo elettrico e calcolo l'energia U necessaria per portare un condensatore (piano) dal potenziale 0 al potenziale V. Sia S l'area delle sue armature, d la loro distanza.

$U=\int_0^V q.dv=\int_0^V Cv.dv=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{S}{d}V^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{Sd}{d^2}V^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.Sd$ (Sd è il volume del condensatore).

Segue che la densità di energia del campo elettrico è

[11]$u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. Analogamente, la densità di energia del campo magnetico è

[12]$u_M=\frac{1}{2\mu_0}B^2$.[1]

Si verifica facilmente che $u_M=u_E$, perciò la densità di energia totale è $u=\varepsilon_0 E^2$. Per un'onda sinusoidale E varia nel tempo; considero perciò il valor medio di u (su un periodo):

[13]$\bar{u}=\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 E_0^2 \, \mathrm{Cos}^2(\omega t)dt=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\equiv\frac{B_0^2}{2\mu_0}$.

(Il valor medio di $\mathrm{Cos}^2(\alpha)$ in un periodo è **1/2**; dare una giustificazione intuitiva, senza integrali).

L'intensità di un'onda è l'energia che in un secondo attraversa l'unità di superficie:

[14]$I=\frac{dU}{Sdt}=\frac{dU.c}{S.c.dt}=\bar{u}.c$ (watt/m^2).

Un'onda elettromagnetica trasporta energia e impulso (quantità di moto). Queste grandezze possono essere trasmesse a una carica elettrica, come vedremo tra poco; vedremo che il campo elettrico trasmette l'energia, il campo magnetico l'impulso (vedi fig.10).

[1] Si dimostra considerando un solenoide di lunghezza l, costituito da N spire di area S. La sua induttanza è $L=\mu_0\frac{N^2S}{l}$, il flusso magnetico è Li e l'energia immagazzinata è $U=\frac{1}{2}Li^2$. Siccome il camp magnetico B è $\mu_0\frac{N}{l}i$, $U=\frac{1}{2\mu_0}B^2(Sl)$. Dividendo per il volume (Sl) del solenoide, segue la [12].

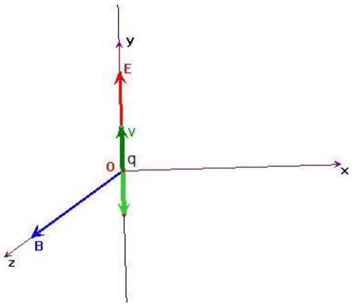

fig.10

Sia data una carica elettrica q posta nell'origine O del riferimento cartesiano di fig.10, sulla quale incide l'onda elettromagnetica piana **E**-**B**, che si propaga nel verso positivo dell'asse x.

In O il campo elettrico $E=E_0 Cos(\omega t)$ fa oscillare la carica q lungo l'asse y (la direzione di **E**) e il suo vettore spostamento è $y=ACos(\omega t-\alpha)$, essendo A l'ampiezza e α il ritardo di fase rispetto al campo elettrico (vettore spostamento di q disegnato in verde). La sua velocità è $v= -\omega A.Sen(\omega t)$.

Su q agisce la forza totale $\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ e l'energia trasmessa dall'onda alla carica in un periodo è

$U = \int_0^T \vec{F}.d\vec{y} = q\int_0^T \left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right).\vec{v}dt = q\int_0^T \vec{E}.\vec{v}dt$ (il prodotto scalare $(\vec{v}\times\vec{B}).\vec{v}$ è zero). Sostituendo le espressioni di E e di v si trova la seguente formula [15]:

$$[15] U = -qE_0 A\omega\int_0^T \mathrm{Cos}(\omega t) Sen(\omega t-\alpha).dt \ .$$

Per l'impulso trasmesso a q si ottiene $\vec{p} = \int_0^T \vec{F}dt = q\left(\int_0^T \vec{E}dt + \int_0^T (\vec{v}\times\vec{B})dt\right) = q\int_0^T (\vec{v}\times\vec{B})dt$ (**l'integrale** di una funzione sinusoidale in un periodo è **zero**). Sostituendo le espressioni di v e di B e ricordando come è diretto il prodotto vettoriale, si ottiene

$$[16] \vec{p} = -qB_0 A\omega\int_0^T Sen(\omega t-\alpha)\mathrm{Cos}(\omega t)dt.\frac{\vec{x}}{x}$$ ($\frac{\vec{x}}{x}$ è il versore dell'asse x).

Si noti che ogni semiperiodo i vettori **v** e **B** si invertono entrambi, perciò il verso di **p** resta sempre concorde col semiasse positivo delle x, verso in cui si propaga l'onda.

Confrontando [15] e [16] si ottiene la seguente notevole formula:

$$[17] \frac{U}{p} = \frac{E_0}{B_0} = c\ .$$

Questa formula ci dice che l'energia trasportata dall'onda è uguale al suo impulso moltiplicato per la velocità della luce, risultato che si presenta come un caso particolare della **dinamica relativistica**, secondo cui per una particella di massa m l'energia e l'impulso sono legati dalla seguente relazione:

$U^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2$, che, per una particella di massa zero, come il fotone, **quanto del campo elettro-magnetico**, si riduce alla [17].

Vediamo, infine, che un'onda elettromagnetica esercita una pressione dipendente dalla densità dell'energia. La pressione P è la forza agente normalmente sull'unità di superficie:

$$[18] P=\frac{F}{S}=\frac{1}{S}\frac{dp}{dt}=\frac{c.dp}{S.c.di}=\frac{dU}{S.dx}=\frac{dU}{dV}=u.$$ La pressione dell'onda è uguale alla densità di energia[2]

Abbiamo visto che le onde elettromagnetiche sono **trasversali:** i vettori **E** e **B** sono ortogonali alla direzione di propagazione (e tra di loro). Se il vettore **E** mantiene direzione costante, l'onda si dice polarizzata (linearmente). In generale, la direzione dei campi non è fissa e la radiazione si dice **non polarizzata.** E' il caso della radiazione (visibile o meno) emessa da una sorgente calda: la radiazione è emessa da miliardi di atomi in modo incoerente con frequenze, fasi e polarizzazioni differenti. Se ne può ricavare **radiazione** (in particolare **luce**) **polarizzata** usando opportuni **filtri.**
Ma ciò richiederebbe un articolo a parte.

Sulle *unificazioni* in fisica.
La prima grande unificazione è dovuta a Newton, che con la sua legge di gravitazione universale unificò Cielo e Terra, il moto dei pianeti e il moto dei gravi, unificazione espressa nell'immaginario collettivo con **l'aneddoto della mela**. Poi venne Maxwell che unificò elettricità, magnetismo e luce, fino a quel momento tre campi separati di indagine. Ogni unificazione produce una rivoluzione scientifica, cioè un cambiamento di paradigma e una riduzione dei concetti indipendenti, a cui segue una fioritura tecnologica.
Ma la sintesi di Maxwell è di natura fenomenologica. Una sintesi più profonda nel campo dell'elettromagnetismo discenda dalla teoria della relatività di Einstein. Mentre con Maxwell si accetta come **punto di partenza** il **fatto** che le correnti, (le cariche elettriche in movimento), generano il campo magnetico, con la relatività si va oltre: il **fatto** viene **spiegato**, ridotto ad **altro**, e quindi gli viene conferito un **senso di necessità logica, di inevitabilità: non può essere altrimenti, perché il campo magnetico è un effetto relativistico del campo elettrico[3].**

In particolare, c, prima di essere la velocità della luce, è il tetto, **finito**, alle velocità di propagazione degli **agenti fisici**. Se c potesse essere arbitrariamente grande (se **c** tendesse all'infinito), **non ci sarebbe campo magnetico**, perché **B=E/c.**

Le grandi sintesi sono dovute alla scoperta che in natura esistono costanti universali.

La relatività ristretta consiste essenzialmente nel fatto che esiste una **velocità** che è la **stessa** in tutti i sistemi di riferimento (**è invariante**): la **conseguenza** è l'unificazione di **spazio e tempo**, di **massa ed energia**.

[2] Sto considerando un'onda elettromagnetica *coerente (*avente fase costante). Ben diverso è il caso della radiazione in equilibrio termico in una cavità. La radiazione è incoerente e la pressione di radiazione è 1/3 della densità di energia. Vedi ad esempio R. Becker, Teoria dell'elettricità 2° volume, $ 7 pag. 45. Sansoni Edizioni scientifiche Firenze, 1950,
[3] Vedi, ad esempio, AAVV ***"La fisica di Berkeley***, vol. 2 "Elettricità e magnetismo" parte prima, Zanichelli 1971.
Jay Orear "Fisica generale" pag. 169 e seguenti, Zanichelli 1970 (utilizzato da me per diversi anni come libro di testo nell'insegnamento liceale);
Ottavio Serra "Il camp magnetico come correzione relativistica del campo elettrico" in Annuario del liceo scientifico Scorza, presente anche nel mio sito ***http://digilander.libero.it/ottavioserra0*** nella cartella ***Lezioni allo Scorza*** sottocartella ***fisica 2011 Bravi in fisica***. (Nello spirito della trattazione di Orear, però ho utilizzato il sistema di unità di misura internazionale MKSA al posto del sistema cgs dell'autore statunitense*.*

Analogamente, **la meccanica quantistica** consiste nel fatto che esiste un **minimo assoluto** per l'azione, **il quanto elementare di azione** così chiamato da Planck e ora detto in suo onore **costante di Planck:** la **conseguenza** è l'unificazione di **frequenza ed energia, di onde e particelle.**

Notevole è il fatto che la costante di Planck è un invariante relativistico, cioè non cambia valore passando da un sistema di riferimento a un altro.

Infine, **la relatività generale** si fonda sull'assunzione al rango di postulato di un **fatto** che si conosceva dai tempi di Newton, cioè che il **rapporto tra carica gravitazionale e massa** è una costante universale: la **conseguenza è l'unificazione di spazio-tempo e massa-energia, di geometria e fisica.**
Le conseguenze tecnologiche di queste unificazioni sono sterminate e sotto gli occhi di tutti: le utilizziamo quotidianamente, spesso in modo inconsapevole.
Si noti che la tendenza della scienza a unificare teorie, a ridurre i principi indipendenti, non è una caratteristica della fisica moderna, ma è da sempre presente nella storia del pensiero scientifico, fin dal tempo dei filosofi di Mileto: **Principio di tutte le cose è l'acqua (o l'aria, o la coca cola); non ha importanza quale sia, ma che dall'inizio della speculazione filosofica sia stato sentita l'esigenza e posto il problema della spiegazione di tutte le cose con un unico principio, del tutto con l'uno.**
Altre unificazioni sono state effettuate nella seconda metà del XX° secolo: la teoria del **campo elettrodebole,** la teoria del **modello standard,** ma di queste qui non parlerò, perché *non mi lascia più ir lo fren dell'arte***.**