Ottavio Serra

Alcuni esempi di sviluppo in serie di Fourier

In queste pagine presenterò quattro esempi di sviluppo in serie di Fourier, accompagnati da elaborazione grafica e numerica realizzata con mio software.

1) Funzione f(x) periodicizzata con periodo T=4, così definita:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\in[-1;1] \\ 0, x\in]1;3] \end{cases} = a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi kx}{4}\right).$$

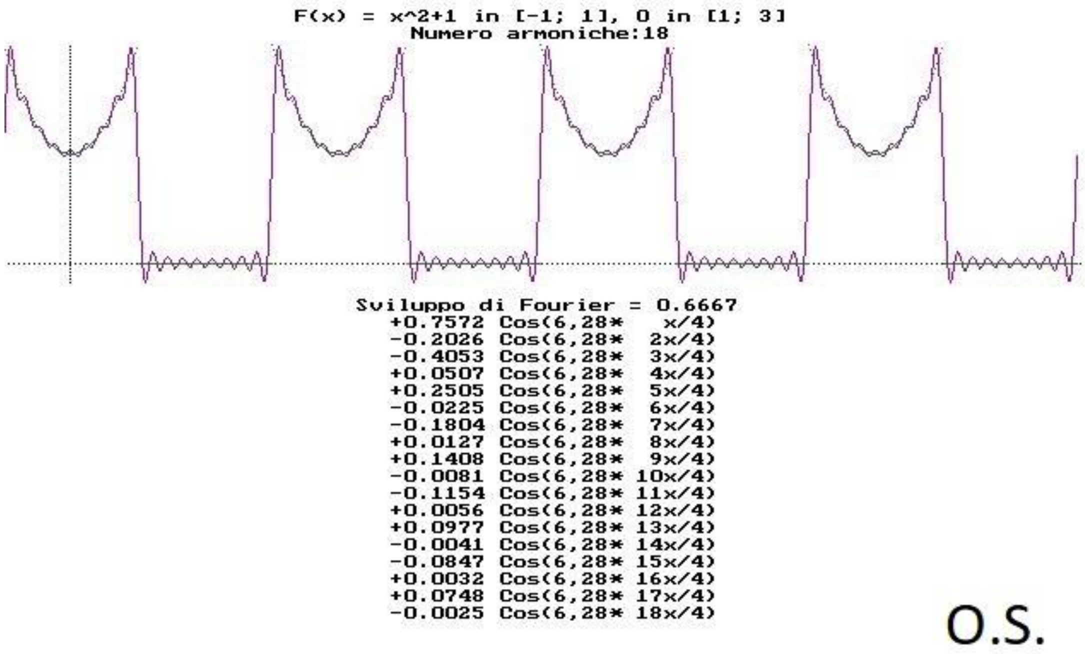
N.B. I termini in Seno non compaiono, per ovvi motivi di simmetria (f(x) è pari).

Il valore di a_0 è il valore medio di f su un periodo: $a_0=\frac{1}{4}\int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx=\frac{2}{4}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}.$

Per k>0, $$a_k=\frac{2}{4}\int_{-1}^{3} f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{4}\right)dx=\frac{2}{4}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\cos\left(\frac{2\pi kx}{4}\right)dx = \\ =\frac{4}{\pi k}\left[\left(1-\frac{4}{\pi^2k^2}\right)sen\frac{\pi k}{2}+\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}\right].$$ (Integrazione per parti).

Risulta a_1=0,7572149938; $a_2=-2/\pi^2$=-0,202642367; a3=-0,405301; eccetera. $a_{18}=-2/(81\ \pi^2)$= -0,0025017576,

d'accordo con i valori numerici a 4 cifre calcolati col mio programma "Armonic" in Pascal7. Vedere nella figura seguente anche il grafico delle prime 18 armoniche sovrapposto al grafico di f(x).



2) Funzione f(x) periodicizzata con periodo T=2π, così definita:

$$f(x)=\begin{cases} x, x\in[0;\pi] \\ 0, x\in]\pi;2\pi] \end{cases} = a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)+b_k sen(kx)\,.$$

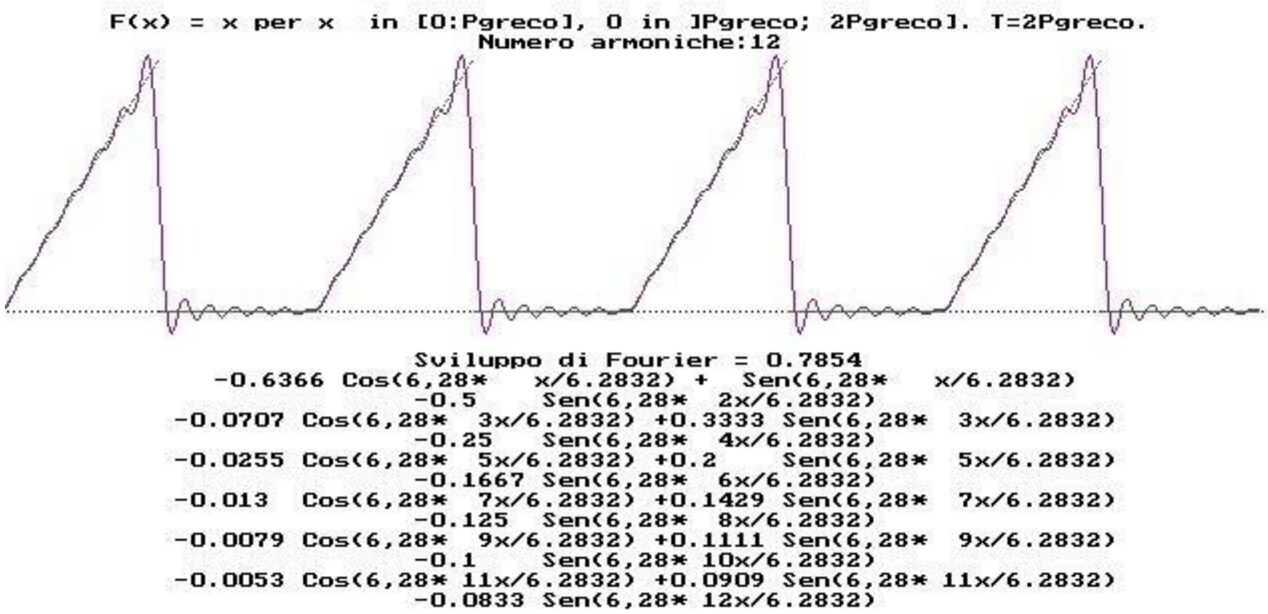
$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{\pi}{4}.$$

Per k>0, $a_k=\dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx=\dfrac{1}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi)-1\right)=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi k^2}(kdispari) \\ 0,(kpari)\end{cases}.$

$$b_k=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} xsen(kx)dx=\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Pertanto $ff(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\cos(x)+sen(x)-\dfrac{1}{2}sen(2x)-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\cos(3x)}{3^2}+\dfrac{sen(3x)}{3}-\dfrac{sen(4x)}{4}-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\cos(5x)}{5^2}+\dfrac{sen(5x)}{5}-...$

Risultato del mio programma “Armonic”:



3) Funzione f(x) periodicizzata con periodo T=2, così definita:

$f(x)=\begin{cases}-1, x\in[-1;0]\\+1, x\in]0;1]\end{cases}$. La funzione è dispari, perciò $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k sen\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)$.

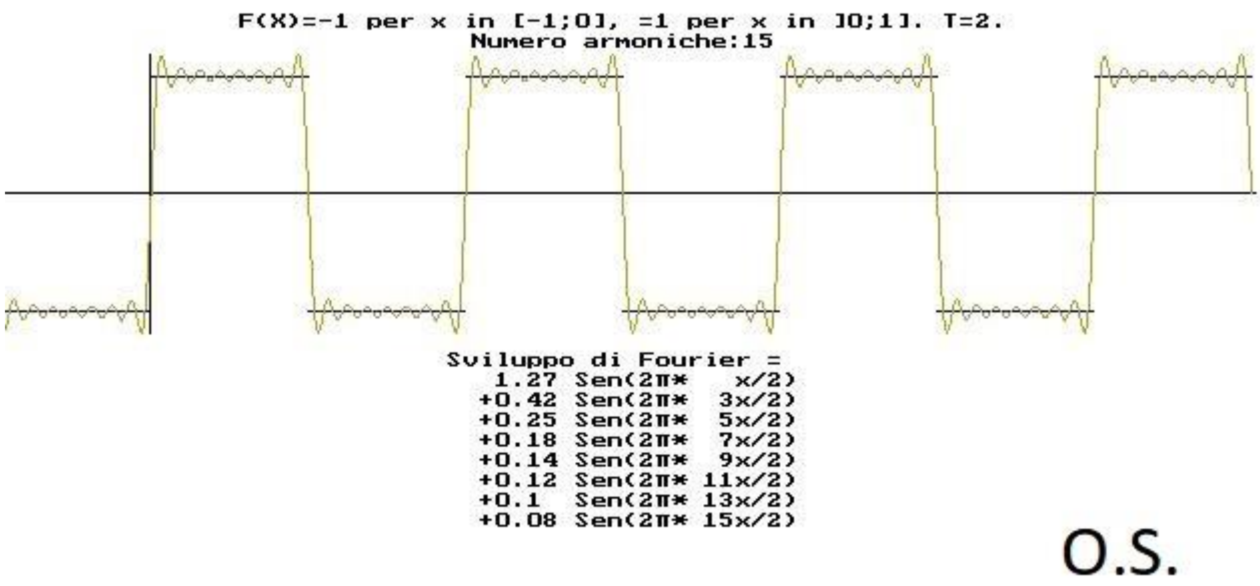
$b_k=\frac{4}{T}\int_0^1 1.sen\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)dx=2\int_0^1 sen(\pi kx)dx=\frac{2}{\pi k}[1-\cos(\pi k)]=\frac{2}{\pi k}\left[1-(-1)^k\right]=4/(\pi k)$ per k dispari, 0 per k pari.

Perciò $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{sen\left((2h-1)\pi x\right)}{2h-1}$.

Si noti che per ogni x strettamente positivo ≤1 risulta f(x)=1e perciò la serie

$\sum_{h=1}^{\infty}\frac{sen\left((2h-1)\pi x\right)}{2h-1}=\frac{\pi}{4}$, in particolare per x=1/2 si ottiene la serie $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$ convergente a π/4, risultato già noto a Leibniz.

Riporto il risultato ottenuto col mio programma “Fourier”:



N.B. La funzione presenta criticità nel punto singolare x=0, perciò nel calcolo numerico dei coefficienti ho dovuto limitare la precisione a due cifre decimali.

4) Funzione f(x) periodicizzata con periodo T=2, così definita:

f(x)=|x| per x in [-1;]. La funzione è pari, perciò la serie di Fourier contiene solo coseni.

Il termine costante a_0=1/2 e per k>0

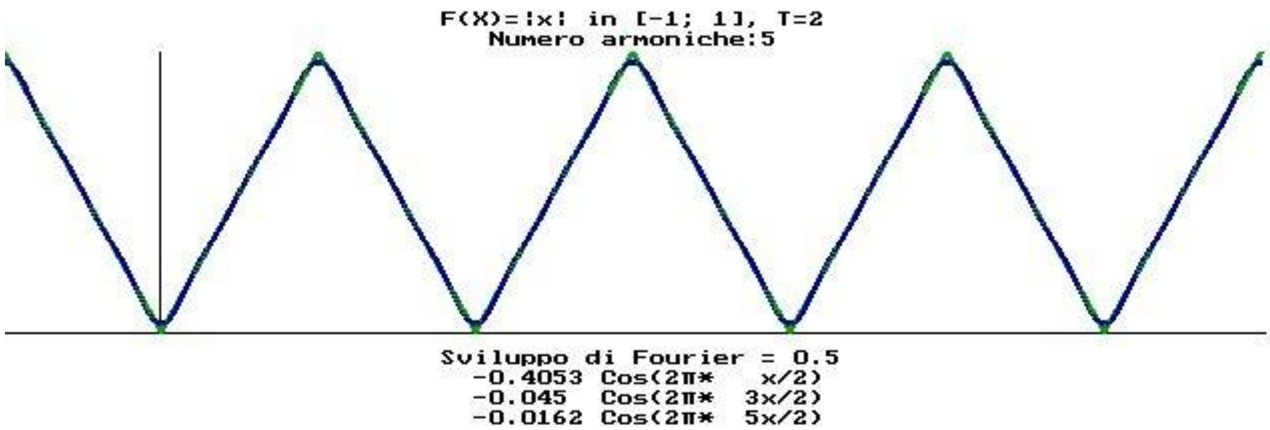
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^1 x\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)dx = 2\int_0^1 x\cos(\pi kx)dx = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left(\cos(\pi kx)-1\right) = \begin{cases} 0, k=2h \\ \frac{-4}{\pi^2 k^2}, k=2h-1 \end{cases}.$$

Perciò $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2h-1)\pi x\right)}{(2h-1)^2}$.

Si noti il notevole risultato: per x=1, f(x)=1 e per ogni h il coseno nella serie vale -1, perciò

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{-1}{(2h-1)^2} \Rightarrow \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{(2h-1)^2} \equiv \left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Riporto, al solito, l'elaborazione col programma "Fourier":



Si noti come, già con poche armoniche, il polinomio trigonometrico si sovrappone quasi esattamente alla funzione f(x), smussandone le angolosità.

5) Funzione f(x) periodicizzata con periodo T=4, così definita:

f(x)=x^2 in [-1;1], 0 in]1;3], T=4.

Si tratta di una funzione pari, perciò la serie trigonometrica è i soli coseni.

Il termine costante a_0 vale 1/6, mentre per k>0 si ha

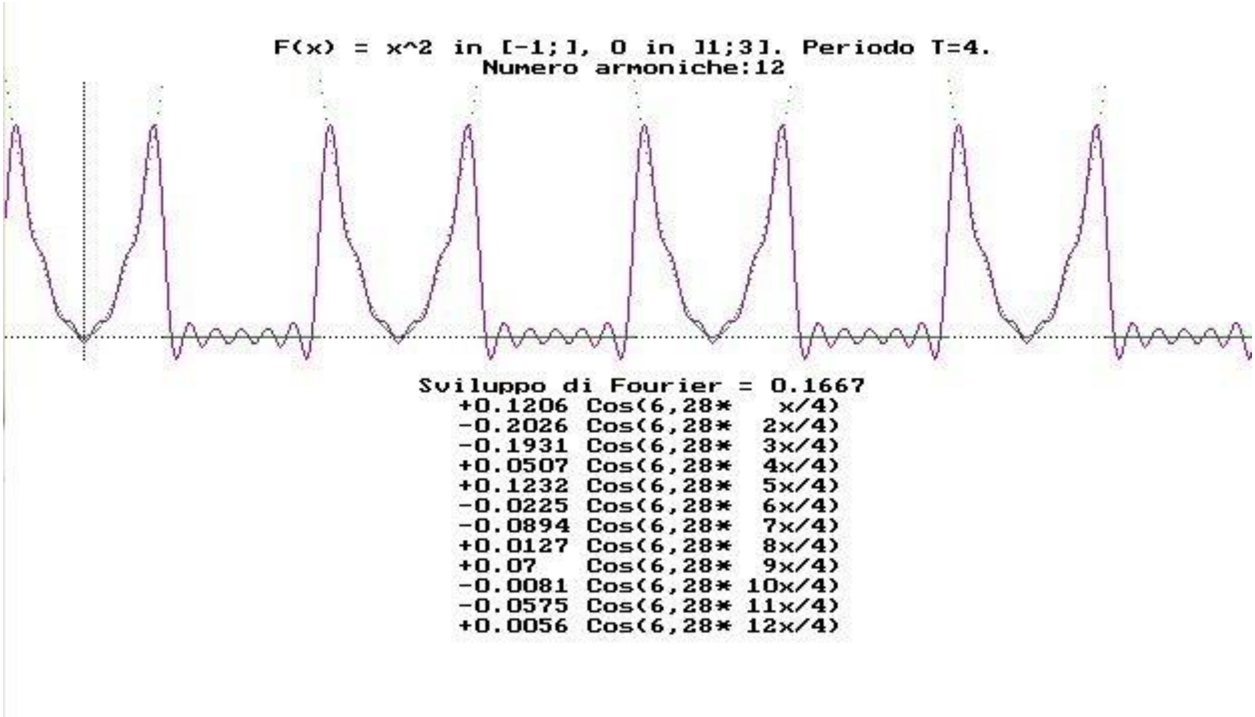
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)dx = \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{\pi k}\left(1-\frac{8}{\pi^2 k^2}\right)sen\left(\frac{\pi k}{2}\right)+\frac{8}{\pi^2 k^2}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right].$$

(Verificare, integrando per parti).

La serie di Fourier è pertanto

$$\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi k}\left(1-\frac{8}{\pi^2 k^2}\right)sen\left(\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{8}{\pi^2 k^2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right].\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right).$$

Il mio solito software fornisce



Che succede per x=1? Il coseno di πkx/2 si annulla per k dispari, perciò restano solo i termini con k pari. Ma sen(πk/2) si annulla per k pari, perciò alla fine si ottiene

$$f(1)-\frac{1}{6}=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2h)^2}\cos^2(\pi h)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}=\frac{2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}$$ [1].

Perciò **f(1)=1/6+2/6=1/2**, come vuole la teoria: in una singolarità di prima specie la serie di Fourier converge alla semisomma del limite sinistro e del limite destro, nel nostro caso **(1+0)/2.**

Ricordo che altri esempi di serie di Fourier si trovano nell'articolo "P greco è dappertutto" nell'Annuario del Liceo Scientifico Scorza di Cosenza, reperibile anche nel mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0, cartella Articoli, sottocartella Annuario del liceo scientifico Scorza di Cosenza, n° 8.*

[1] Vedi il mio articolo "*P greco è dappertutto*" citato più sopra, nonché "*Il problema di Basilea*" nel mio sito, cartella Articoli sotto cartella Miscellanea.