Ottavio Serra

Equazioni algebriche di 3° e 4° grado

Premessa. La risoluzione in forma chiusa (con radicali quadratici e cubici) risale agli algebristi italiani del '500: per l'equazione di 3° grado a Scipione del Ferro (Bologna 1465 – Bologna 1526), Niccolò Fontana detto Tartaglia (Brescia 1499- Venezia 1571) e Girolamo Cardano (Pavia 1501 – Roma 1576); per quella di 4° grado a Ludovico Ferrari (Bologna 1522 – Bologna 1565).
Chi è interessato agli approfondimenti storici e, in particolare, alla polemica sulle questioni di priorità tra Tartaglia e Cardano troverà molto materiale su Wikipedia.
Infine va ricordato la sintesi compiuta da Raffaele Bombelli (Bologna 1526 – Roma 1572), che comincia a manipolare con una certa sistematicità le radici quadrate di numeri negativi, che in modo inaspettato comparivano proprio nel caso delle equazioni di terzo grado con tre soluzioni **reali** e perciò detto *caso irriducibile*.
E' vero che radici quadrate di numeri negativi compaiono anche in equazioni di 2° grado, ma in questo caso basta dire che tali equazioni ***non hanno soluzioni*** (nel campo reale). Il caso irriducibile costrinse i matematici a fare i conti con le radici quadrate di numeri negativi, con i numeri *finti*, *assurdi*, *immaginari* (Ancora Leibniz (1646 - 1716) chiamava la radice quadrata di-1 *"un anfibio tra l'essere e il nulla"*.

Ancora non c'era il *teorema fondamentale dell'algebra*, che avrebbe unificato in forma semplice e ***simmetrica*** i vari casi (*alcune equazioni algebriche hanno soluzioni e altre no: alcune volte la colpa è della radice quadrata di numeri negativi, ma non sempre: il caso irriducibile insegna, come vedremo fra poco)). B*isognò aspettare Gauss perché i numeri *immaginari* (oggi detti **numeri complessi)** entrassero con pieno diritto nella matematica.

In ciò che segue userò la notazione moderna. Gli algebristi italiani, sulla scia di Euclide per le equazioni di 2°, trattavano separatamente i casi $x^3=px+q$, $x^3+px=q$, $x^3+q=px$.

L'equazione di 3° grado.

Sia
[1] $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$
la forma generale dell'equazione di 3° grado (allora a coefficienti reali, è sottinteso; oggi in generale a coefficienti complessi).
La prima cosa da fare è di trasformare la [1] nella *forma ridotta* (senza il termine di 2° grado):
[2] $y^3+py+q=0$, eseguendo la traslazione $\mathbf{x=y+a}$. Sostituendo nella [1], si trova $\mathbf{a}=-a_2/3$.
Le soluzioni della **[1]** si trovano, una volta risolta la [2], aggiungendo la costante $\mathbf{a}=-a_2/3$ alle soluzioni y della forma ridotta **[2].**

Quest'ultima si risolve ponendo $\mathbf{y=u+v}$. Segue $y^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$; ma $y^3=-py-q$, dunque

$u^3+v^3+3uv(u+v) = -p(u+v) -q$. Risulta perciò

[3] $u^3+v^3=-q$ e $uv=-p/3$, ovvero $u^3v^3=-p^3/27$. Dunque u^3 e v^3 sono soluzioni dell'equazione ausiliaria

$t^2+qt-p^3/27 =0$ e pertanto u e v sono

$$[4]\begin{cases} u=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \\ v=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \end{cases}.$$

Siccome le radici terze sono tre, dalle [4] sembrerebbe che ci sono 9 combinazioni per u+v=y, ma ciò dipende dal fatto che abbiamo elevato al cubo la seconda delle [3], dalla quale si ricava v=-p/(3u), perciò le radici dell'equazione ridotta [2] sono solo 3, come è giusto.

Posto $\varepsilon=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, radice principale cubica dell'unità (***rotazione di 120°***), avremo

$$[5]\begin{cases} y_1=u+v=u-\dfrac{p}{3u} \\ y_2=\varepsilon u-\varepsilon^2\dfrac{p}{3u} \\ y_3=\varepsilon^2 u-\varepsilon\dfrac{p}{3u} \end{cases}$$. (N.B. le tre radici terze dell'unità sono 1, ε ed $\varepsilon^2=1/\varepsilon$).

Segue poi $x_k=y_k+a$, ovvero $x_k=y_k-a_2/3$. Per k=1, 2, 3

Esempio 1. (Esempio del caso ***irriducibile***). Considero l'equazione

[6] $x^3-6x^2+11x-6=0$. Si deve porre **x=y+2;** con ciò si ottiene

[7] $y^3-y=0$. Questa si potrebbe risolvere in modo immediato, ma procederò facendo uso delle formule generale **[4]** per illustrare il procedimento e in particolare il caso irriducibile.

Nel presente esempio **[7]** p=-1, q=0, perciò

$$[8]\begin{cases} u=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{-1}{27}}}=\sqrt[3]{\dfrac{i}{3\sqrt{3}}} \\ v=\dfrac{-p}{3u}=\dfrac{1}{3u} \end{cases}$$, perciò

$$[9.1]y_1=u+v=u+\frac{1}{3u}=\frac{3u^2+1}{3u}=\frac{3\sqrt[3]{\frac{-1}{27}+1}}{3u}=\frac{-1+1}{3u}=0$$

$$[9.2]y_2=\varepsilon u+\frac{\varepsilon^2}{3u}=\varepsilon u+\frac{1}{3\varepsilon u}=\frac{3\varepsilon^2u^2+1}{3\varepsilon u}=\frac{3\varepsilon^2\left(\frac{-1}{3}\right)+1}{3\varepsilon u}=\frac{1-\varepsilon^2}{3\varepsilon u}=\frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{3u}=\frac{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}{\sqrt[3]{\frac{9i}{\sqrt{3}}}}=-i\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9i}}==1$$

$$[9.3]y_3=\varepsilon^2u+\frac{\varepsilon}{3u}=\varepsilon^2u+\frac{1}{3\varepsilon^2u}=\frac{3\varepsilon u^2+1}{3\varepsilon^2u}=\frac{3\varepsilon\left(\frac{-1}{3}\right)+1}{3\varepsilon^2u}=\frac{1-\varepsilon}{3\varepsilon^2u}=\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{3u}=\frac{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}{\sqrt[3]{\frac{9i}{\sqrt{3}}}}=i\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9i}}==-1$$

Perciò $x_1=0+2=2$, $x_2=1+2=3$, $x_3=-1+2=1$.

Esempio 2. (L'equazione di **Fibonacci**).

[10] $x^3+2x^2+10x-20=0$. Ponendo $x=y-2/3$ si ottiene

[11] $y^3+\frac{26}{3}y--\frac{704}{27}=0$ **(p=26/3, q=-704/27).** Dalla prima delle [4] segue

$$u=\sqrt[3]{\left(\frac{352}{27}\right)+\sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2+\frac{26^3}{3^3.27}}}=\sqrt[3]{\frac{352}{27}+\frac{\sqrt{352^2+26^3}}{27}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{352+\sqrt{352^2+26^3}}\ ;$$

$$v=-\frac{p}{3u}=-\frac{26}{9u}.$$

Eseguendo i calcoli (io ho usato *Mathematica*), si trova

u=2,99881746596, v= -0,963349691471. Pertanto

x_1=u+v-2/3= 1,36880810782
(La famosa soluzione *reale*, esibita dal Fibonacci fino alla sesta cifra decimale. Non so come l'abbia trovata);

$$x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v-\frac{2}{3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}u-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}v-\frac{2}{3}=-\frac{u+v}{2}-\frac{2}{3}+i\sqrt{3}\frac{u-v}{2}=-1,684404\ +\ i3,431331;$$

$$x_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v-\frac{2}{3}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}u+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}v-\frac{2}{3}=-\frac{u+v}{2}-\frac{2}{3}-i\sqrt{3}\frac{u-v}{2}=-1,684404\text{ - }i3,431331$$

Si noti che x_2 e x_3 sono complesse coniugate, come deve essere per le soluzioni di un'equazione algebrica a coefficienti reali.

Esempio 3. (**Due soluzioni** coincidenti).

[12] $x^3-x^2-5x-3=0$. Ponendo $x=y+1/3$ si ottiene

[13] $y^3-\frac{16}{3}y-\frac{128}{27}=0.$

Siccome $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\left(\frac{64}{27}\right)^2-\frac{(16/3)^3}{27}=\frac{2^{12}-2^{12}}{27^2}=0,$ dalle **[4]** si evince che $u=v=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$.

Perciò una soluzione è $x_1=y_1+\frac{1}{3}=2u+\frac{1}{3}=2\sqrt[3]{-2q}+\frac{1}{3}=2\sqrt[3]{\frac{64}{27}}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3.$

Le altre due sono uguali; infatti $x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 u+1/3=\varepsilon^2 u+\varepsilon u+1/3=x_3$.

Perciò x_2 (**radice doppia**) = $\frac{1}{3}+u\left(\varepsilon+\varepsilon^2\right)=\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{64}{27}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1.$

L'equazione di 4° grado. Sia data

[14] $x^4+a_3x^3+a_2x_2+a_1x+a_0=0$.

La forma ridotta ($a_3=0$) si ottiene ponendo $x=y -a_3/4$:

[15] $y^4+py^2+qx+r=0$ (p, q, r si ottengono dai coefficienti della [14], eseguendo la sostituzione.

Per risolvere la [15] occorre trovare la cosiddetta risolvente di Ferrari, che risulterà un'equazione di 3° grado.

Posto $y=u+v+w$, elevando al quadrato si ottiene

$y^2=u^2+v^2+w^2 +2(uv+vw+wu)$; spostando a sinistra i quadrati e quadrando ancora, si trova

$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2+ (u^2+v^2+w^2)^2=4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+8uvw(u+v+w)$. E quindi

[16] $y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2-(8uvw)y+[(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)]=0$.

Confrontando la [16] con la [15] si ricava

$-2(u^2+v^2+w^2)=p$, $-8uvw=q$, $p^2/4-4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)=r$. Perciò

$$[17]\begin{cases} u^2+v^2+w^2=\dfrac{-p}{2} \\ u^2v^2w^2=\dfrac{q^2}{64} \\ u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p^2}{4}-r\right)\equiv\dfrac{p^2-4r}{16} \end{cases}.$$

Per il teorema di Viète, u^2, v^2, w^2 sono soluzione dell'equazione di 3° grado (risolvente di Ferrari)

[18] $t^3+\dfrac{p}{2}t^2+\dfrac{p^2-4r}{16}t-\dfrac{q^2}{64}=0$.

Questa, a sua volta, va ridotta e risolta con il metodo di Tartaglia – Cardano, pubblicato per la prima volta da Cardano nella sua "*Ars Magna"* e come illustrato negli esempi precedenti.

Supponendo di aver fatto tutti questi calcoli, dette t_1, t_2, t_3 le soluzioni della [18], avremo $u=\sqrt{t_1}, v=\sqrt{t_2}, w=\sqrt{t_3}$.

Siccome le determinazioni di una radice quadrata sono due (+ e -), essendo $y=u+v+w$, sembrerebbe che l'equazione di 4° grado debba avere otto soluzioni; ma ricordando che $u.v.w =-q/8$, si conclude che, se **$y_1=u+v+w$** è una soluzione *ammissibile* (cioè che $u.v.w =-q/8$), le altre tre sono

$y_2=u-v-w$, $y_3=-u+v-w$, $y_4=-u-v+w$.

(Le soluzioni x della [14] si ottengono poi dalle y sommando a ciascuna $-a_3/4$).

Nota 1. Gli algebristi italiani del '500 avevano vagamente intuito, dall'esperienza delle equazioni di 1°, 2°, 3° e 4° grado che i numeri "*finti*" permettevano di assegnare a un'equazione algebrica tante soluzioni quant'è il suo grado. La formulazione esplicita e, più ancora, la dimostrazione di questa

proposizione, in seguito detta "***Teorema fondamentale dell'algebra***", richiesero una lunga gestazione. I passi graduali furono, più o meno, i seguenti:
1. formulazione del teorema senza alcuna dimostrazione (primi anni del 1600);
2. primi tentativi di dimostrazione da parte di Eulero (1707 - 1783), D'Alembert (1717- 1783), Lagrange (1736-1813);
3. prima dimostrazione sostanzialmente rigorosa, nel 1799, dovuta al ventiduenne Gauss (1777-1855).

Nota 2. Dopo il successo degli algebristi italiani, in tutta Europa si scatenò la gara per risolvere l'equazione ***generale di 5° grado.*** I tentativi, infruttuosi, si susseguirono fino alla metà dell'800.
La strada fu aperta dall'adolescente genio francese Evaristo Galois (1811 – 1832), che trovò condizioni necessarie e sufficienti per risolvere un'equazione algebrica mediante operazioni razionali ed estrazione di radici. Nel corso di queste ricerche trovò relazioni di simmetria tra i coefficienti e le radici di un'equazione, che portarono alla teoria dei ***gruppi,*** teoria che si rivelò uno strumento fondamentale per la geometria e per la fisica moderna, dalla relatività alla meccanica quantistica e alla fisica nucleare.
Il lavoro di Galois ispirò l'opera di un altro giovane genio matematico, il norvegese Niels Abel (1802 – 1829), il quale giunse a una conclusione sorprendente e inaspettata: ***un'equazione algebrica di grado superiore al 4° non ammette, in generale, formule risolutive che utilizzino solo operazioni razionali ed estrazione di radici.***
Questo teorema ***limitativo*** era stato enunciato e dimostrato in precedenza dall'italiano Paolo Ruffini (1765 1822), forse nel 1805; ma la dimostrazione presentava delle lacune. C'erano però delle idee innovative, che anticipavano i gruppi di permutazioni. Perciò il teorema è noto come teorema di Ruffini – Abel.
Questo teorema mise la ***parola fine*** al problema millenario della risolubilità con formule ***chiuse*** delle equazioni algebriche, di cui si occuparono nel corso dei secoli i babilonesi i greci, gli arabi e infine gli europei.
Naturalmente, nessuno oggi risolverebbe un'equazione algebrica di 3° o 4° grado con i mirabili metodi ideati dagli algebristi italiani. Ci sono i metodi numerici, facilmente implementabili su un pc, per calcolare le soluzioni (***approssimate***), reali o complesse, di qualsiasi equazione, algebrica o trascendente[1].
Per questo motivo ho ritenuto di non riportare risoluzioni di equazioni algebriche di 4° grado, affrontando **calcoli lunghi e penosi**.

[1] Si veda, ad esempio, nel mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0* nella sezione *Programmi eseguibili*, per tutte le radici, reali o complesse, di un'equazione algebrica di grado massimo 9 (a coefficienti reali), nella cartella *Algebra* il programma n° 9 in Turbo Basic; invece nella cartella *Programmi in Delphi* si vedano i programmi 16,17 e 18 che calcolano una **sola** radice **reale** alla volta, (se esiste), in prossimità di un valore o in un intervallo, assegnati dall'utente.