

Ottavio Serra

Effetti quantistici

In questo articolo, dopo aver ricavato dall'equazione temporale di Schrodinger l'equazione stazionaria, tratterò i seguenti argomenti:

- 1) Particella libera su un segmento;
- 2) Particella contro un gradino di potenziale;
- 3) Particella contro una barriera di potenziale (effetto tunnel e applicazioni)

0). L'equazione di Schrodinger, valida per una particella **non relativistica** e **senza spin**, è un'equazione differenziale del secondo ordine nelle variabili spaziali e del primo ordine rispetto al tempo:

$$[1] \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_2 + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t),$$

dove \hbar (**h tagliata**) è la costante ridotta di Planck, cioè $\frac{h}{2\pi}$, m è la massa della particella, Δ_2 è il laplaciano, cioè la somma delle derivate parziali seconde rispetto alle coordinate, U è l'energia potenziale che supponiamo dipendente solo dalle coordinate, $\Psi(\vec{r}, t)$ è la funzione che descrive lo stato del sistema, detta perciò funzione di stato o anche **funzione d'onda** perché in generale ha l'aspetto di un'onda (andamento sinusoidale). Essa non ha un diretto significato fisico, invece il quadrato del suo modulo è interpretato (da Max Born in poi) come **densità di probabilità** (vedi in seguito).

Si noti che l'evoluzione temporale dell'equazione di Schrodinger è **deterministica**, sono i possibili valori delle grandezze osservabili che hanno una distribuzione probabilistica¹.

Nel caso di problemi unidimensionali $\vec{r} = (x, y, z)$ si riduce alla sola coordinata x e il laplaciano alla sola derivata seconda rispetto a x .

La soluzione della [1] è

$$[2] \Psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad A \text{ è un fattore di normalizzazione, } \vec{k} \text{ è il vettore di propagazione dell'onda di modulo } \frac{2\pi}{\lambda} \text{ e } \omega = 2\pi\nu \text{ è la pulsazione (frequenza angolare).}$$

Tenendo presente la legge di Planck $W = h\nu = \hbar\omega$ e quella di de Broglie $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$, la [2] si scrive (nel caso unidimensionale, facilmente generalizzabile):

$$[3] \Psi(x, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Wt)}. \quad \text{Verificare che questa soluzione soddisfa l'equazione [1] di Schrodinger.}$$

Equazione stazionaria. Nottiamo che la [3] si può fattorizzare nel prodotto di una funzione della sola x , $u(x)$, per una funzione della sola t , $f(t)$: $\Psi(x, t) = u(x) \cdot f(t)$. Sostituendo tale funzione nella [1], col laplaciano ridotto alla sola derivata seconda rispetto a x , si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f(t) \frac{d^2}{dx^2} u(x) + U(x) f(t) u(x) = i\hbar u(x) \frac{df(t)}{dt}. \quad \text{Dividendo ambo i membri per } u(x)f(t), \text{ si ricava}$$
$$[4] -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{u(x)} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + U(x) = i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt}.$$

¹ Vedi il mio articolo *Particelle quantistiche* nel sito <http://digilander.libero.it/ottavioserra0> cartella Articoli, sezione Miscellanea N° 53

Siccome il primo membro della [4] dipende solo da x , mentre il secondo dipende solo dal tempo t , il loro **comune valore** deve essere una **costante W** , che si dimostra subito essere l'**energia totale W** della particella.

Infatti, la parte temporale della [4] fornisce

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{i\hbar} W dt \text{ e quindi } f(t) = C.e^{-i\frac{Wt}{\hbar}}. \text{ Siccome l'esponente deve essere un numero puro e il suo denomi-}$$

natore è un'azione, anche **Wt** deve essere un'azione e perciò **W è un'energia.**

Il primo membro della [4], uguagliato a W , fornisce l'equazione **stazionaria** di Schrodinger:

$$[5] \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (W - U(x))u(x) = 0.$$

Nota sugli operatori. In meccanica quantistica ad ogni osservabile è associato un operatore (lineare) nello spazio di Hilbert. Nella rappresentazione di Schrodinger, alla posizione x è associato l'operatore $x^{op}=x$ e analoghe formule per y e z ; all'osservabile impulso p_x (quantità di moto) l'operatore $p_x^{op} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ e analogamente per le altre componenti. Tramite questi si definisce l'operatore hamiltoniano H^{op} (operatore energia totale), per analogia con l'espressione classica dell'energia totale:

$$H^{op} = \frac{(\vec{p}^{op})^2}{2m} + U(\vec{r}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(\vec{r}), \text{ perciò la [5] si può scrivere } H^{op}u(\vec{r}) = W.u(\vec{r}), \text{ che nel}$$

caso unidimensionale si riduce alla seguente [6] ($\vec{r} \rightarrow x$):

[6] $H^{op}u(x) = W.u(x)$. L'equazione stazionaria si presenta, perciò, come un'equazione agli autovalori. I possibili valori dell'energia W sono gli autovalori dell'operatore hamiltoniano. A ogni autovalore W_n corrisponde un'autofunzione (**autostato**) $u_n(x)$. Gli autostati rappresentano una base dello spazio hilbertiano, perciò $u(x)$ si può scrivere come combinazione lineare degli autostati:

$$[7] u(x) = \sum_n c_n u_n(x) \text{ con } \sum_n |c_n|^2 = 1, \text{ perciò } |c_n|^2 \text{ è la probabilità che l'energia } W \text{ abbia il valore } W_n.$$

Nota. L'operatore **hamiltoniano** (come ogni operatore della meccanica quantistica, è hermitiano, perciò i suoi autovalori sono reali, come è necessario che siano i risultati di una misura.

1). Particella di massa m libera (non soggetta a forze) su un segmento $OA=a$.

Il vincolo agli estremi di OA , nel caso di una particella dotata di carica elettrica, si può immaginare realizzato mediante due barriere di potenziale teoricamente infinite nei punti O e A . Siccome la particella è libera, la sua energia W è puramente cinetica, perciò $W = \frac{p^2}{2m} > 0$. (fig.1).

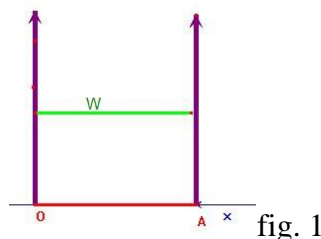


fig. 1

Siccome sul segmento OA la particella ha energia potenziale $U(x)=0$, la [5] diventa

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \left(\frac{2nW}{\hbar^2}\right)u(x) = 0, \text{ ovvero } \frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{p^2}{\hbar^2}u(x) = 0. \text{ Questa è l'equazione dell'oscillatore armonico,}$$

perciò la soluzione generale è $u(x) = Ae^{\frac{ipx}{\hbar}} + Be^{-\frac{ipx}{\hbar}}$. Le condizioni al contorno $u(0)=u(a)=0$, forniscono

$$B=-A \text{ e } A\left(e^{\frac{ipa}{\hbar}} - e^{-\frac{ipa}{\hbar}}\right) = 0, \text{ da cui discende } \text{Sen}\left(\frac{p}{\hbar}a\right) = 0, \text{ quindi } \frac{p}{\hbar}a = n\pi \text{ o anche, per la formula di de}$$

Broglie ($p=h/\lambda$), $\frac{2a}{\lambda} = n$, Questo risultato coincide con quello della teoria classica delle onde: **la lun-**

ghezza di una corda vibrante deve contenere un numero intero di seni-lunghezze d'onda. Si noti la perfetta analogia con le onde acustiche (**stazionarie**) in un tubo chiuso agli estremi o alle onde elastiche (**stazionarie**) su una corda tesa.

Dalla precedente formula $\frac{p}{\hbar}a = n\pi$ segue che l'impulso è **quantizzato**: $p = n\frac{h}{2a}$, per $n=1, 2, 3, \dots$

Per $n=1$ si ha l'impulso **minimo** $h/(2a)$. Dunque, la particella non può mai essere in quiete, a meno che il segmento **a** non diventi infinitamente lungo (è il moto perpetuo degli atomi, immaginato dagli antichi atomisti greci e cantato da Lucrezio).

La **quantizzazione dell'impulso** implica la **quantizzazione dell'energia**: $W = \frac{h^2}{8ma^2}n^2$.

Si noti che le energie crescono come i quadrati dei numeri naturali e la differenza tra W_{n+1} e W_n è uguale a $W_1(2n+1)$ e dunque cresce con n , ma la **differenza relativa** decresce come $1/n$ e diventa trascurabile per grandi *numeri quantici*, tendendo alla continuità del caso classico.

La funzione $u(x) = A\text{Sen}\left(\frac{p}{\hbar}x\right) \equiv A\text{Sen}\left(\frac{\pi}{a}nx\right)$, elevata al quadrato, fornisce la (densità di) probabilità di

trovare la particella nei vari punti del segmento OA. Siccome $\int_0^a P_n(x)dx = 1$, si ricava $A^2=2/a$.

Riporto i grafici per i primi due numeri quantici, $n=1$ ed $n=2$.

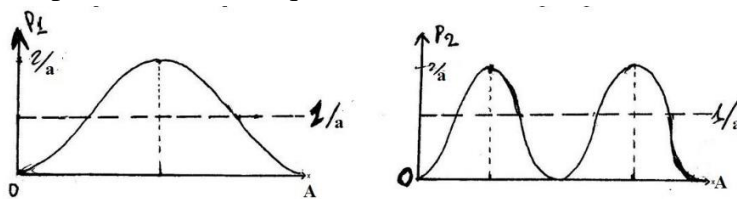


fig. 2

Nel 1° stato quantico ($n=1$) la probabilità di trovare la particella in un dato tratto Δx di OA è massima intorno al punto medio di OA, mentre per $n=2$ ivi è **quasi nulla**, mentre è massima, se si prende Δx ad $a/4$ dal punto medio. In ogni caso, siccome il valor medio del quadrato del seno è un mezzo, il valor medio di $P_n(x)=1/a$. Questa è anche la densità di probabilità nel caso classico, perché classicamente non c'è motivo per aspettarsi di trovare la particella piuttosto in un **punto** (in un intervallino) che in un altro di OA. **Si assume** implicitamente la **distribuzione** di probabilità **uniforme** $P_{\text{class}}(x_0 < x < x_0 + \Delta x) = \Delta x/a$. Il limite classico si ottiene formalmente per n molto grande (tendente all'infinito), perché su ogni tratto Δx del segmento OA cade mediamente un ugual numero di massimi e di zeri di $P_n(x)$ e perciò la posizione di Δx in OA è ininfluenta.

Dimostro, per esercizio, che per n tendente all'infinito, la probabilità quantistica $P(x_0 < x < x_0 + \Delta x)$ tende a $P_{\text{class}}(x_0 < x < x_0 + \Delta x) = \Delta x/a$. Infatti, posto $x_0 + \Delta x = x_1$,

$$P_n(x_0 < x < x_0 + \Delta x) = \int_{x_0}^{x_1} P_n(x) dx = \frac{2}{a} \int_{x_0}^{x_1} \text{Sen}^2\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx = \frac{2}{a} \int_{z_0}^{z_1} \text{Sen}^2(z) \frac{a}{\pi n} dz = \frac{2}{\pi n} \frac{1}{2} \left[z - \frac{1}{2} \text{Sen}(2z) \right]_{z_0}^{z_1} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\pi n}{a} \Delta x - \frac{1}{2} \left(\text{Sen}\left(\frac{2\pi n(x_0 + \Delta x)}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{2\pi n x_0}{a}\right) \right) \right] = \frac{\Delta x}{a} - \frac{\text{Sen}\left(\frac{2\pi n(x_0 + \Delta x)}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{2\pi n x_0}{a}\right)}{2\pi n} \rightarrow \frac{\Delta x}{a},$$

perché il sottraendo tende a 0 al divergere di n.

Due esempi numerici.

Considero dapprima il caso di un protone, $m=1,67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $r=10^{-15}$ m, libero di muoversi su un segmento di lunghezza $a=10^{-10}$ m, e supponiamo che abbia una velocità $v=2000$ m/s, cui corrisponde un'energia (cinetica) $W=3,34 \cdot 10^{-21}$ J.

Secondo la formula più su trovata, i valori permessi dell'energia sono

$$W_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \approx \frac{44 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-20}} n^2 \approx 3,29 \cdot 10^{-21} n^2 \text{ J}.$$

Si conclude che $n=1$, cioè il protone si trova nel più basso livello di energia consentito dalla meccanica quantistica e ciò significa che è, a tutti gli effetti, un oggetto quantistico.

Un'altra osservazione. Il nostro protone va avanti e indietro sul segmento a , perciò la sua **azione** è $2pa=2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 2000 \cdot 10^{-10} = 6,68 \cdot 10^{-34}$ Js, quasi esattamente il quanto elementare d'azione h di Planck. Un'azione comparabile con qualche h è una chiara indicazione della natura quantistica di un sistema.

Considero adesso il caso di un granello di polvere, di massa $m=10^{-8}$ Kg, velocità $v=1$ cm/s= 10^{-2} m/s, vincolato su un segmento di lunghezza $a=10$ cm= 10^{-1} m. La sua energia cinetica è $W=0,5 \cdot 10^{-12}$ J. Volendolo trattare con la meccanica quantistica, si trova

$$W_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \approx \frac{44 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2}} n^2 \approx 5,5 \cdot 10^{-58} n^2 \text{ J}.$$

Uguagliando W_n e W , otteniamo $n^2 = \frac{0,5 \cdot 10^{-12}}{5,5 \cdot 10^{-58}} \approx \frac{1}{11} 10^{46}$ e

perciò il numero quantico è immenso: $n=3 \cdot 10^{22}$. Non si nota affatto la discontinuità dei livelli energetici, la discontinuità quantistica sfuma nella continuità classica.

Vediamo la velocità di questo granello di polvere nel 1° livello energetico:

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_1 = 5,55 \cdot 10^{-58} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{11 \cdot 10^{-58}}{10^{-8}}} \approx 3 \cdot 10^{-25} \text{ m/s},$$

cioè, praticamente è fermo: i corpi macroscopici, abbandonati a se stessi, tendono alla quiete. Quel granello di polvere, di $10 \mu\text{g}$, è **macroscopico!**

Calcoliamo, infine, la sua azione, quando si muove a 1 cm/s: $2p \cdot a = 2 \cdot m \cdot v \cdot a = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-11}$ Js, circa $3 \cdot 10^{22} h$! **Invece nel 1° livello energetico**, quando la particella è **praticamente ferma**, la sua azione è confrontabile con la costante h di Planck, come potete verificare.

2). Gradino di potenziale.

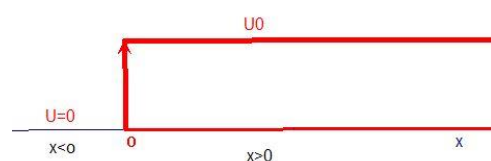


fig. 3

Per $x < 0$ l'equazione stazionaria è $\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mW}{\hbar^2} - U_0\right) u(x) = 0$ e la soluzione è $u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, con

$$k = \sqrt{\frac{2m(W - U_0)}{\hbar^2}}; \text{ per } x > 0 \quad u(x) = Ce^{ik_0 x}, \text{ con } k_0 = \sqrt{\frac{2m(W - U_0)}{\hbar^2}} \quad (\text{Per } x > 0 \text{ non c'è onda riflessa}).$$

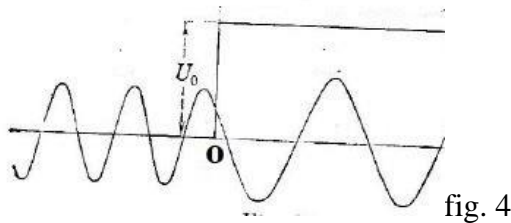
Per $x = 0$ le due soluzioni si devono raccordare in modo continuo e derivabile, perciò si ha

$A + B = C$ e $kA - kB = k_0 C$. (A è l'ampiezza dell'onda incidente, B dell'onda riflessa dal gradino e C l'ampiezza dell'onda per $x > 0$. Risolvendo il sistema, si trova $(k - k_0)A = (k + k_0)B$ e $2kA = (k + k_0)C$).

Conviene distinguere i due casi, $W > U_0$ e $W < U_0$. Nel primo caso k e k_0 sono entrambi reali; la particella supera il gradino, come in meccanica classica, ma la novità è che c'è una probabilità non nulla

che sia riflessa. La probabilità di riflessione è $\rho = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k - k_0}{k + k_0}\right)^2$ e la probabilità di trasmissione è

$$\tau = 1 - \rho = \frac{4k \cdot k_0}{(k + k_0)^2}. \quad (\text{Vedi fig. 4})$$

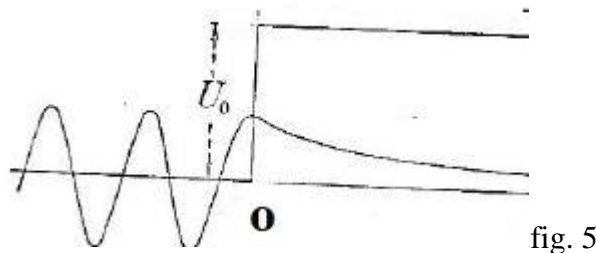


Si noti che per $x > 0$ la lunghezza d'onda è maggiore perché l'energia è minore.

Nel secondo caso, $W < U_0$, k_0 è immaginario. Posto $k_0 = i\gamma$, γ reale, la soluzione per $x > 0$ è $u(x) = Ce^{-\gamma x}$

con andamento esponenziale decrescente. La probabilità di riflessione è $\rho = \frac{|k - i\gamma|^2}{|k + i\gamma|^2} = 1$, ciò significa

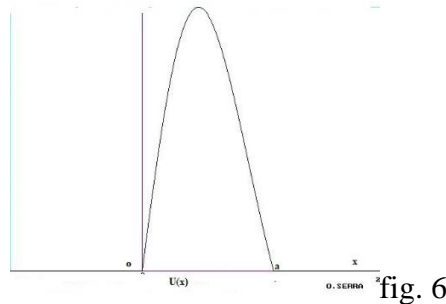
che la particella è certamente riflessa. Tuttavia c'è una probabilità non nulla di trovarla nella regione $x > 0$, perché la funzione di stato $u(x)$ ha ivi una *coda*, anche se decrescente in modo esponenziale. Ciò si spiega col fatto che per effettuare una misura che richiede un tempo Δt e di conseguenza c'è un'indeterminazione ΔW dell'energia che è maggiore di $\hbar/\Delta t$ (per il principio di indeterminazione) (fig. 5)



Questo caso rassomiglia alla riflessione totale in ottica.

3). Barriera di potenziale.

Una barriera di potenziale $U(x)$ (nel caso unidimensionale) è un tratto OA dell'asse x , di lunghezza a , nel quale una particella, proveniente da sinistra acquista un'energia potenziale $U(x)$ a spese della sua energia cinetica (vedi fig.6).



L'asse x è diviso in tre zone: zona I (semiretta $x < 0$), zona II (segmento), zona III (semiretta $x > a$). Nella zona I l'energia potenziale è $U=0$, perciò l'energia W della particella è solo cinetica, nella zona II l'energia cinetica è $W-U(x)$, nella zona III l'energia potenziale è nuovamente zero e l'energia della particella ritorna ad essere W , come nella zona I. Schematizziamo, per semplicità, $U(x)$ nella zona II con un valore costante U_0 .

L'equazione stazionaria nelle tre zone è

$$[8] \frac{\alpha^2}{dx^2} u(x) + \frac{2mW}{\hbar^2} u(x) = 0, \text{ per } x < 0; \text{ soluzione } u(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} = \frac{p}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$[9] \frac{\alpha^2}{dx^2} u(x) + \frac{2m(W-U_0)}{\hbar^2} u(x) = 0, \text{ per } 0 \leq x \leq a; \quad u(x) = C e^{ik_0 x} + D e^{-ik_0 x}; \quad k_0 = \sqrt{\frac{2m(W-U_0)}{\hbar^2}} = \frac{p_0}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$[10] \frac{\alpha^2}{dx^2} u(x) + \frac{2mW}{\hbar^2} u(x) = 0, \text{ per } x > 0. \quad u(x) = F e^{ikx} \text{ (non ci sono particelle provenienti da destra.)}$$

La funzione unione delle tre deve essere continua e derivabile in ogni punto dell'asse x , perciò

$$[11] A+B=C+D \text{ e } kA-kB=k_0C-k_0D \text{ (raccordo per } x=0) \text{ e}$$

$$[12] C e^{ik_0 a} + D e^{-ik_0 a} = F e^{ika} \text{ e } k_0 C e^{ik_0 a} - k_0 D e^{-ik_0 a} = k F e^{ika} \text{ (raccordo per } x=a).$$

Posto $\mu = \frac{k_0}{k} = \sqrt{1 - \frac{U_0}{W}}$, dalle [11] si ricava $A+B=C+D$ e $A-B=\mu(C-D)$, da cui, sommando, si ha

$$2A=(1+\mu)C+(1-\mu)D, \text{ ovvero}$$

$$[13] A = \frac{1+\mu}{2} C + \frac{1-\mu}{2} D.$$

Analogamente, dalle [12] si ottiene $2C e^{ik_0 a} = (1 + \frac{1}{\mu}) F e^{ika}$ e $2D e^{-ik_0 a} = (1 - \frac{1}{\mu}) F e^{ika}$ e quindi, la [13] dà

$$[14] A = \frac{(\mu+1)^2}{4\mu} F e^{i(k-k_0)a} - \frac{(\mu-1)^2}{4\mu} F e^{i(k+k_0)a} \equiv \frac{F}{4\mu} e^{ika} [(\mu+1)^2 e^{-ik_0a} - (\mu-1)^2 e^{ik_0a}]$$

Per definizione la probabilità di trasmissione della particella è $\tau = \frac{|F|^2}{|A|^2} \equiv \frac{F F^*}{A A^*}$, dove “*” indica il complesso coniugato, Per comodità conviene calcolare $1/\tau$. Dalla [14] si ottiene

$$[15] \frac{1}{\tau} = \frac{1}{16|\mu|^2} \cdot 1 \cdot |(\mu+1)^2 e^{-ik_0a} - (\mu-1)^2 e^{ik_0a}|^2. \quad (\mathbf{k \text{ è reale, perciò } |e^{ika}| = 1).$$

Per calcolare il modulo che compare nella [15] conviene studiare separatamente i due casi:

1°: $W > U_0$, k_0 e μ sono reale; **2°: $W < U_0$** , k_0 e μ sono immaginario.

Nel 1° caso $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{16\mu^2} [(\mu+1)^4 + (\mu-1)^4 - (\mu^2-1)^2 (e^{-2ik_0a} + e^{2ik_0a})]$, ovvero, per note formule

$$[16] \frac{1}{\tau} = \frac{1}{16\mu^2} [(\mu+1)^4 + (\mu-1)^4 - 2(\mu^2-1)^2 \cos(2k_0a)].$$

Naturalmente, la probabilità che la barriera respinga la particella, **probabilità di riflessione**, è $1-\tau$.

Questa formula ci dice che la probabilità, per una particella, di attraversare la barriera dipende in modo sinusoidale dallo spessore a della barriera ed è massima per $2k_0a=2\pi n$, ovvero per $2a/\lambda_0=n$, cioè se a contiene un numero intero di semi lunghezze d’onda. In tal caso $\tau=\tau_{\max}=1$. In meccanica classica è sempre $\tau=1$, se, come in questo caso, W è maggiore di U_0 . Ciò è dovuto al fatto che nelle situazioni macroscopiche lo spessore della barriera è immensamente maggiore della lunghezza d’onda associata alla particella e quindi lo spessore a contiene **sempre**, con grande approssimazione, un numero intero (**enorme**) di semi-lunghezze d’onda.

Verificare che se a contiene un numero **dispari** di quarti di lunghezze d’onda, $\tau=\tau_{\min} = \frac{4\mu^2}{(\mu^2+1)^2}$.

Il caso $W > U_0$ è illustrato nella fig. 7.

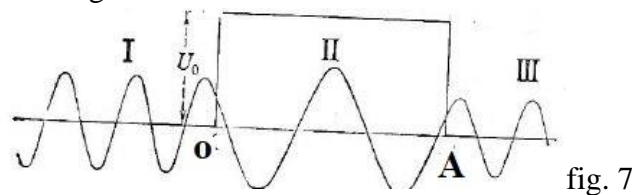


fig. 7

Nel 2° caso $W < U_0$ e k_0 e μ sono immaginari. Nell’interno della barriera la funzione $u(x)$ non è più oscillante, ma esponenzialmente decrescente, come illustrato nella fig. 8:

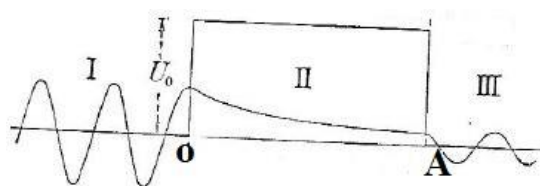


fig. 8

Posto $k_0 = i\chi = i\sqrt{\frac{2m(U_0 - W)}{\hbar^2}}$, $\mu = i\delta = i\sqrt{\frac{U_0}{W} - 1}$, dalla [15] si ottiene

$$\begin{aligned}
 [17] \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{16\delta^2} \cdot \left| (1+i\delta)^2 \cdot e^{\chi a} - (1-i\delta)^2 \cdot e^{-\chi a} \right|^2 = \frac{1}{16\delta^2} \left[(1+i\delta)^2 \cdot e^{\chi a} - (1-i\delta)^2 \cdot e^{-\chi a} \right] \cdot \left[(1-i\delta)^2 \cdot e^{\chi a} - (1+i\delta)^2 \cdot e^{-\chi a} \right] = \\
 &= \frac{1}{16\delta^2} \left[(1+\delta^2)^2 e^{2\chi a^2} + (1+\delta^2)^2 e^{-2\chi a} - (1-i\delta)^4 - (1+i\delta)^4 \right] = \frac{1}{16\delta^2} \left[2(1+\delta^2)^2 \text{Cosh}(2\chi a) - 2 - 2\delta^4 + 12\delta^2 \right] \text{ e infine} \\
 [18] \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{8\delta^2} \left[(1+\delta^2)^2 \text{Cosh}(2\chi a) - 1 - \delta^4 + 6\delta + 2\delta - 2\delta^2 \right] \equiv 1 + \frac{1}{8\delta^2} \left[(1+\delta^2)^2 \cdot (\text{Cosh}(2\chi a) - 1) \right].
 \end{aligned}$$

La probabilità di riflessione è $\rho=1-\tau$. **In meccanica classica** $\rho=1$ e $\tau=0$, perché una barriera macroscopica ha uno spessore enorme rispetto all'inverso di χ , il coseno iperbolico assume valori molto grandi e τ è praticamente zero.

Il fenomeno per cui una particella può trovarsi al di là di una barriera di potenziale maggiore della sua energia si chiama **effetto tunnel**, spiega fenomeni nucleari, come il **decadimento α** e trova importanti applicazioni tecnologiche, come nei **diodi** a effetto tunnel e nel microscopio elettronico a scansione **STM** (Scanning Tunneling Microscope).

Vediamo brevemente alcuni fenomeni, che si spiegano con l'effetto tunnel.

a. Decadimento α . Un nucleo pesante instabile può decadere in uno più leggero emettendo una particella. Con esperimenti alla Rutherford è possibile determinare forma e altezza della barriera di potenziale che circonda il nucleo e l'andamento coulombiano della sua parte più esterna, e l'energia cinetica della particella α emessa. Per esempio, l'isotopo 214 del polonio decade in piombo 210 secondo la reazione $\text{Po}(Z=84, A=210) \rightarrow \text{Pb}(Z=82, A=206) + \alpha$. Le particelle α emesse hanno un'energia di circa 4MeV, mentre la barriera è alta più di 6 MeV, perciò classicamente la particella non potrebbe lasciare il nucleo (fig. 9). T è l'energia cinetica delle particelle α nel nucleo radioattivo. Altri esempi di decadimento α sono $\text{U}(92, 238) \rightarrow \text{Th}(90, 234) + \alpha$ e $\text{Ra}(88, 226) \rightarrow \text{Rn}(86, 222) + \alpha$.

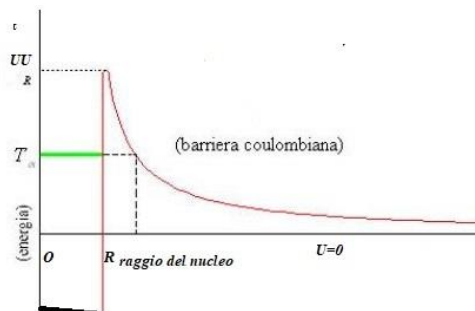


fig. 9

La spiegazione del decadimento α per effetto tunnel fu data da **George Gamow**.

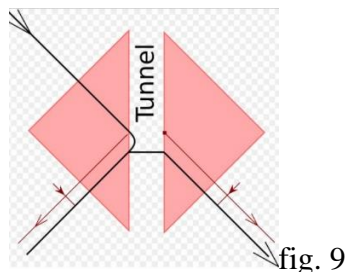
b. Emissione elettronica a freddo. Gli elettroni di conduzione di un metallo non possono uscire dal metallo, perché appena tentano di superare la superficie esterna sono tirati indietro dalla risultante di

due forze: la forza *immagine* che la stessa per tutti i metalli e da una forza caratteristica per ciascun metallo dovuta alla struttura del reticolo cristallino. Il risultato è la formazione di un gradino di potenziale che può essere superato fornendo energia agli elettroni sia riscaldando il metallo (effetto termoionico), sia irradiandolo con luce di frequenza abbastanza alta (effetto fotoelettrico).

C'è però un modo di far uscire elettroni senza fornir loro direttamente l'energia di estrazione, ma applicando un campo elettrostatico, diretto verso il metallo, che trasforma il gradino in una barriera di potenziale (di forma triangolare): **gradino** $U(x) = U_0$ per $x > 0$; **barriera** $U(x) = U_0 - mx$ per $0 < x < a$, $U(x) = 0$ per $x > a$. In ciò consiste l'emissione a freddo, scoperta dal fisico tedesco *Schottky* e perciò, detto anche *effetto Schottky*. Questo effetto è applicato nel **diodo a effetto tunnel** o **diodo Schottky**. Rispetto ai normali diodi a giunzione metallo-semiconduttore (*giunzione p-n*) è caratterizzato da una più bassa tensione di attivazione e da una molto più elevata velocità di commutazione.

c. Effetto tunnel e riflessione totale.

La riflessione totale si verifica quando la luce passa da un mezzo più rifrangente a uno meno rifrangente e l'angolo di incidenza supera l'angolo limite per la rifrazione: per esempio dal vetro all'aria (vedi fi. 9).



Detto n l'indice di rifrazione del vetro rispetto all'aria, $n = 3/2$ e l'angolo limite è $\theta = \text{ArcSen}(2/3) = 42^\circ$. Il raggio di luce incide *sull'ipotenusa* del prisma di sinistra a 45° e si riflette totalmente in basso a sinistra. L'aria a destra del prisma di sinistra si comporta per la luce come un gradino di potenziale maggiore dell'energia dei fotoni e in essa si produce una perturbazione decrescente esponenzialmente. Avvicinando il prisma di destra, si forma uno strato d'aria che si comporta come una barriera di potenziale, e se abbastanza stretto, dell'ordine della lunghezza d'onda della luce incidente, i fotoni hanno una piccola probabilità di superarlo per effetto tunnel (raggio emergente in basso a destra).

L'unica differenza col caso di una particella come l'elettrone è che la riflessione totale si verifica solo se l'angolo di incidenza supera l'angolo limite, mentre secondo la meccanica quantistica la riflessione totale di un fascio di particelle avviene anche per incidenza normale, come nella teoria sviluppata nei paragrafi precedenti.

Secondo me la differenza è dovuta al fatto che la meccanica quantistica che ho adoperato è quella non relativistica e va bene per particelle aventi velocità piccole rispetto alla velocità della luce, mentre i fotoni sono, ovviamente, particelle relativistiche.

Riferimenti bibliografici.

Oltre ai riferimenti indicati nell'articolo citato in nota¹ di pag. 1, sono stati consultati i testi

1. Enrico Persico. "Gli atomi e la loro energia", Zanichelli;
2. Enrico Persico: "Fondamenti della meccanica atomica", Zanichelli (a cura del C.N.R.);
3. Landau e Lifscic: "Meccanica quantistica", Boringhieri.