

## Ottavio Serra

### Distribuzioni di probabilità

- 1) Distribuzione binomiale o di Bernoulli:  $P(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ ,  $q=1-p$ .

Per n "grande" possiamo introdurre una funzione densità, perché il calcolo dei coefficienti binomiali è disagiata.

- 2) Funzione densità normale di Gauss:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $m=E(X)$ ,  $\sigma^2=Var(X)$ .

- 3) Funzione di ripartizione normale (Probabilità che la variabile aleatoria X abbia valore  $\leq x$ ).

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = P(-\infty < X \leq x).$$

- 4) Funzione di ripartizione normale standard: ponendo  $(t-m)/\sigma = z$ , risulterà

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = P(-\infty < \frac{X-m}{\sigma} \leq x)$$

Ciò significa che si misura lo scarto in termini di  $(x-m)/\sigma$ .

N.B. Dato che la densità (curva a campana) è una funzione pari, si tabula  $F(x)$  solo per valori positivi di  $x$ , perché  $F(-x)=1-F(x)$ ; perciò  $P(-x < \frac{X-m}{\sigma} \leq x) = 2F(x) - 1$ .

- 5) Distribuzione di Poisson:  $P_k(\lambda, \Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}$ , probabilità di osservare  $k$  processi

nell'intervallo di tempo  $\Delta t = (t_0 + \Delta t) - t_0$  (indipendente da  $t_0$ : processi stazionari). Il parametro  $\lambda$  è il valore medio di  $k$  nell'unità di tempo (per  $\Delta t=1$ ), come si può dimostrare

$$\text{formalmente: } \bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Anche la varianza di  $k$  nell'unità di tempo è  $\lambda$ .

Se infatti  $\Delta t=1$ ,  $\lambda$  si può considerare il numero medio di particelle in una cella, avendo  $n$  particelle (batteri) e  $g$  celle (gocce della coltura batterica): valor medio di particelle per cella:  $\lambda=n/g$ , per  $g$  ed  $n$  tendenti all'infinito, ma  $\lambda$  determinato. Allora la probabilità per una particella di stare in una data cella è  $1/g$ , infinitesima per  $g \rightarrow \infty$  (**eventi rari**). Anche la varianza risulterà uguale a  $\lambda$ ; infatti

$$\sigma^2 = n.p.q=n.p.(1-p)=n.1/g.(1-1/g)=\lambda(1-1/g)=\lambda, \text{ (perché } g \text{ tendente all'infinito).}$$

Per dimostrare la legge di Poisson, con  $\Delta t=1$ , si parte dalla distribuzione binomiale di

$$\text{Bernoulli } P(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{g}\right)^k \left(1-\frac{1}{g}\right)^{n-k} \text{ e quindi}$$

$$P(n, k) = \frac{1}{k!} \frac{n}{g} \left(\frac{n}{g} - \frac{1}{g}\right) \dots \left(\frac{n}{g} - \frac{k-1}{g}\right) \left(1-\frac{1}{g}\right)^{g\lambda} \left(1-\frac{1}{g}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\left(\frac{n}{g} = \lambda, \frac{1}{g} \rightarrow 0, \text{ per } g \rightarrow \infty\right).$$

**Nota:** Si badi che, nel caso non compaia  $\Delta t$  ( $\Delta t=1$ ), ma si conosca la probabilità  $p$  di un evento e la grandezza  $n$  del campione, il valor medio  $\lambda$  è dato da  $np$ . Si vedano, per chiarire, l'esercizio 3 e i successivi.

**Esercizio 1.** Su un tratto secondario di strada transitano in media due auto ogni 20 minuti. Calcola la probabilità che in un intervallo di 20 minuti transitino

- a) Zero auto
- b) Una sola auto
- c) Due auto
- d) Tre auto
- e) Almeno tre auto.

Stesse domande se il periodo di osservazione è di un'ora (Siccome l'unità di tempo è 20 minuti, 1 ora= 3 unità di tempo).

**Esercizio 2.** Calcolare la probabilità a) dell'esercizio 1 utilizzando direttamente la distribuzione binomiale di Bernouilli. Dovete scegliere un  $n$  e un  $g$  (non troppo grandi) tali che  $np=n/g=\lambda$ , poi provare con  $n$  e  $g$  più grandi (ma sempre tali che  $n/g=\lambda$ ) e vedere se si nota la tendenza verso il valore calcolato con la legge di Poisson.

**Esercizio 3.** Una fabbrica di un certo tipo di oggetti produce in media il 3% di pezzi difettosi. Si calcoli la probabilità di trovare due pezzi difettosi in un campione di 100 pezzi,

- a) Con la legge di Poisson;
- b) Con la legge di Bernouilli.

**Esercizio 4.** Si ripeta l'esercizio 3, ma una volta per un campione di 50 pezzi, un'altra per un campione di 200 pezzi. Confrontando i risultati ottenuti con la legge di Poisson e con la legge di Bernouilli, che cosa si nota?

**Esercizio 5.** Supponiamo adesso che la probabilità che la fabbrica produca un pezzo difettoso è molto piccola,  $p=10^{-4}$ . Su un campione di  $n=10^5$  pezzi il valore medio dei pezzi difettosi risulta essere  $\lambda=np=10$ . Calcolare la probabilità che in quel campione il numero dei pezzi difettosi sia minore di 6. Qualcuno sarebbe capace di risolvere questo esercizio con la formula "esatta" di Bernouilli?

## **BIBLIOGRAFIA**

**Giovanni Prodi:** "Metodi matematici e statistici, McGraw-Hill, Milano 1992;

**Ottavio Serra:** "Probabilità nel continuo e statistica inferenziale", *Lezioni allo Scorza* in "10 in matematica", anno 2010, nel sito [digilander.libero.it/ottavioserra0](http://digilander.libero.it/ottavioserra0).