**Ottavio Serra**

# Dalle leggi di Keplero alla legge di gravitazione universale di Newton.

**Premessa.** Tutti sanno che Newton giunse alla legge di gravitazione universale derivandola matematicamente dalle tre leggi ottenute induttivamente da Keplero sulla base delle poche osservazioni dell'astronomo danese Ticho Brahe. E' impensabile però che Newton abbia eseguito la deduzione per la via geometrica, così come è presentata nel suo capolavoro: "*Filosophiae naturalis principia mathematica*", quando già da diversi anni aveva messo a punto i nuovi metodi dell'analisi infinitesimale sotto il nome di teoria delle flussioni. Probabilmente Newton non voleva allontanarsi troppo dalla matematica di tipo greco familiare agli scienziati suoi contemporanei. Secondo il fisico tedesco Max Born, premio Nobel per la sua interpretazione probabilistica della meccanica quantistica, Newton avrebbe usato l'analisi infinitesimale e poi avrebbe presentato dimostrazioni e risultati in veste geometrica.[1] Siccome Newton non lasciò alcuna traccia delle sue elaborazioni, Born tenta una ricostruzione in chiave moderna del modo con cui il grande scienziato giunse alla gravitazione universale partendo dalle leggi empiriche di Keplero. Viceversa, la legge di Newton consente, ovviamente, di ricavare le leggi di Keplero, ma fa molto di più: unifica i fenomeni celesti e terrestri, (legge universale), permette di calcolare le masse dei corpi celesti, spiega le maree, fa capire che le leggi di Keplero sono solo approssimate.[2] Siccome la derivazione delle orbite planetarie a partire dalla legge di Newton è presentata in tutti i trattati di meccanica (vedi per esempio nota 2), darò alla fine solo un cenno sulla validità approssimata delle leggi di Keplero e in particolare della terza legge. Per altri particolari, si può consultare il mio articolo "Moti piani", pubblicato sul Numero 22 dell'Annuario del Liceo scientifico Scorza, anno scolastico 2009-2010, che si trova anche nel mio sito[3].

Ora, seguendo Born, esporrò come Newton avrebbe potuto giungere alla legge di gravitazione.

**Da Keplero a Newton.** Ricordo le tre leggi di Keplero:

1ª I pianeti descrivono intorno al Sole orbite piane chiuse. Precisamente ellissi, di cui il Sole occupa un fuoco.

2ª Il raggio vettore che unisce il Sole a un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

3ª Il rapporto tra il quadrato del tempo di rivoluzione (periodo orbitale) e il cubo del semiasse maggiore è lo steso per tutti i pianeti. Siccome le ellissi sono quasi circolari, il semiasse maggiore può essere sostituito con la distanza media del pianeta dal Sole.

Per la 1ª legge, è possibile descrivere il moto di un pianeta introducendo un sistema di assi x, y nel piano con l'origine nel Sole; usando coordinate polari r, θ, avremo:

$$[1]\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r sen\theta \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo ricaviamo le componenti della velocità:

$$[2]\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta} sen\theta \\ \dot{y} = \dot{r} sen\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Un'ulteriore derivazione temporale ci dà le componenti dell'accelerazione:

---

[1] Max Born, "Filosofia naturale della causalità e del caso", Boringhieri 1962.

[2] Landau e Lifsic, "Meccanica", Boringhieri 1965; Goldstein, "Meccanica classica", Zanichelli 1971.

[3] *digilander.libero.it/ottavioserra0*, cartella articoli, liceo scientifico scorza.

[3] $\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}sen\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}sen\theta \\ \ddot{y} = \ddot{r}sen\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2 sen\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta \end{cases}$

Ponendo

[4] $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (accelerazione radiale) e

[5] $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (accelerazione trasversa), le [3] si possono scrivere:

[6] $\begin{cases} \ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta sen\theta \\ \ddot{y} = a_r sen\theta + a_\theta\cos\theta \end{cases}$ (vedi fig.1)

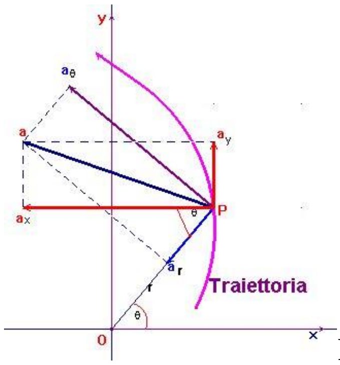

Fig.1

Considero ora $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, (elemento d'area). Per la 2ª legge di Keplero

[7] $\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{c}{2}$ (La velocità areale è costante; c è detta costante delle aree ed è il doppio della velocità areale).

Per semplificare i calcoli successivi conviene porre u=1/r. Pertanto $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2} = cu^2$ da cui segue

[8] $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(cu^2)}{d\theta}\dot{\theta} = 2cu\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = 2cu.cu^2\frac{du}{d\theta} = 2c^2u^3\frac{du}{d\theta}$;

[9] $\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -c\frac{du}{d\theta}$;

$a_\theta = 2(-c)\frac{du}{d\theta}.cu^2 + \frac{1}{u}2c^2u^3\frac{du}{d\theta} \equiv 0.$ Dunque l'accelerazione trasversa è identicamente nulla; **l'accelerazione del pianeta è tutta radiale.**

Sfruttiamo ora la seconda parte della 1ª legge di Keplero e scriviamo l'equazione dell'ellisse in coordinate polari con il polo in un fuoco (quello occupato dal Sole):

$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{p}$. ("e" è l'eccentricità, p il parametro dell'ellisse, cioè la semi corda passante per il fuoco e perpendicolare all'asse focale). Per θ=0 si ha il perielio, per θ=π l'afelio. Perciò il semiasse maggiore (focale) a dell'ellisse sarà $a = \frac{1}{2}(\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}) = \frac{p}{1-e^2}$. La distanza focale c=ea=$\frac{ep}{1-e^2}$.

Infine, per il semi asse minore b si trova

$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2) = \left(\frac{p}{1-e^2}\right)^2(1-e^2) = \frac{p^2}{1-e^2} \equiv pa.$

Veniamo ora al calcolo dell'accelerazione radiale $a_r$ (vedi formula [4]). Occorre calcolare $\dot{r}$ ed $\ddot{r}$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}cu^2 = -c\frac{du}{d\theta}$$ , quindi

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d}{d\theta}(-c\frac{du}{d\theta})\dot{\theta} = -c\frac{d^2u}{d\theta^2}cu^2 = -c^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$ .

(Si tenga presente la 2ª legge di Keplero: $r^2\dot{\theta} = c \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{c}{r^2} = cu^2$). Pertanto

$$a_r = -c^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}c^2u^4 = -c^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - c^2u^3$$ ; ed infine

[10] $a_r = -c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$.

Utilizzando ora l'equazione polare dell'ellisse: $u = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$ ,

si ricava $\frac{du}{d\theta} = -\frac{e.sen\theta}{p}, \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e.\cos\theta}{p}$ e perciò

[11] $a_r = -c^2u^2\frac{1}{p} = \frac{-c^2}{p}\frac{1}{r^2}$.

L'accelerazione di un pianeta è dunque diretta verso il Sole (segno "-") ed inversamente proporzionale al quadrato del raggio vettore (della distanza del pianeta dal Sole).
La costante di proporzionalità $c^2/p$ , per quel che ne sappiamo fino a questo momento, potrebbe essere diversa da pianeta a pianeta, ma la 3ª legge di Keplero ci fa capire che è la stesa per tutti i pianeti. Sappiamo che $a^3/T^2$ =K, costante per tutti i pianeti. Integrando la [7] si ha l'area dell'ellisse: A=(c/2)T e quindi c=2A/T.
Sapendo che A=πab e ricordando che $p=b^2/a$ (vedi i precedenti calcoli sull'ellisse), si ottiene
$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = 4\pi^2K$ , lo stesso per tutti i pianeti. Posto $4\pi^2K=Q$, l'accelerazione centrale dei pianti si può scrivere

[12] $a_r = -\frac{Q}{r^2}$.

La costante Q, essendo la stessa per tutti i pianeti del sistema solare, non può che dipendere dall'unico altro corpo implicato, cioè il Sole, ed è detta *carica gravitazionale* del Sole. L'accelerazione centrale dei pianeti è *causata dal Sole, è dovuta a una **forza** attrattiva esercitata dal Sole.*

**Esercizio.**
Chi non conosce o non vuole usare l'equazione polare dell'ellisse, trovi Q considerando le orbite dei pianeti circolari (il ché tra parentesi è quasi esatto) e applichi la 3ª legge di Keplero sostituendo a, semiasse focale dell'ellisse, col raggio dell'orbita circolare.

**Dal cielo alla terra.**
Il grande ulteriore passo avanti di Newton è stato realizzato elaborando la geniale intuizione che i fenomeni terrestri e celesti sono della stessa natura (l'aneddoto della mela). Pensò che la Luna è in orbita attorno alla Terra attratta dalla stessa forza che fa cadere i sassi (e le mele). Se ciò è vero, pensò Newton, l'accelerazione di gravità g sulla Terra si deve poter ricavare dai dati orbitali della

Luna. L'essenza della teoria newtoniana era già delineata verso il 1665-66, quando Newton aveva 23-24 anni; ma siccome non aveva dati accurati sul raggio della Terra e sulla distanza della Luna, otteneva per g valori molto diversi da quelli ottenuti col pendolo; rinviò pertanto la pubblicazione dei *Principia* fino al 1687, quando poté disporre di nuovi e più accurati dati geodetici e astronomici e ottenne per g un valore in buon accordo con le misurazioni terrestri. Vediamo come fece.
Egli applica la [12] al moto della Luna, dove ora Q è la carica gravitazionale della Terra e $a_r$ è l'accelerazione centripeta della Luna:

$a_r = a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, da cui segue $Q_{(Terra)} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$ (r è la distanza Terra Luna, a rigore è il semiasse maggiore dell'orbita lunare; T il periodo siderale della Luna). D'altra parte l'accelerazione di gravità g sulla Terra è in modulo $g=Q/R^2$, essendo R il raggio della Terra, perciò

$$g = \frac{4\pi^2 r^3}{R^2 T^2}.$$

Inserendo i valori numerici r=384000 Km= $3{,}84.10^8$ m, T= $27^g 7^h 43^m\ 11^s$= $2{,}36.10^6$ s , R=$6{,}4.10^6$ m, si ottiene $g = 4\pi^2 \frac{3{,}84^3.10^{24}}{6{,}4^2.10^{12}.2{,}36^2.10^{12}} = 9{,}798 \cong 9{,}8ms^{-2}$ .

Questo risultato spettacolare consacrò Newton come il massimo scienziato dell'epoca e guidò la ricerca scientifica nei due secoli successivi.

**La forza di gravitazione universale.**

Newton poi va oltre e sfruttando la 3ª legge della dinamica, *il principio di azione e reazione*, stabilisce che due corpi (puntiformi o sferici) interagiscono reciprocamente con una forza il cui modulo è $F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Tenendo conto che la forza è una grandezza vettoriale ed è attrattiva, la formula va scritta come segue:

[13] $\vec{F} = -\frac{Q_1 Q_2}{r^3}\vec{r}$ .

Spesso la [13] viene presentata nella forma

[13 bis] $\vec{F} = -G\frac{\mu_1 \mu_2}{r^3}\vec{r}$ , in cui G è detta costante di Newton, μ massa gravitazionale. Il motivo di questa denominazione (massa) risale allo stesso Newton, che considerò la forza con cui la Terra attrae un corpo, la forza peso P, come prodotto dell'accelerazione di gravità per la massa (inerziale) m del corpo, in base alla sua 2ª legge della dinamica. Detta $\mu_T$ la massa gravitazionale della Terra, μ quella del corpo, otteniamo (R è il raggio della Terra supposta sferica):

$G\frac{\mu_T \mu}{R^2} = mg$. Ricordo ora che il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice è $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{lR^2}{G\mu_T}\frac{m}{\mu}}$ .

Newton fece una serie di esperimenti con un pendolo costituito da una sfera cava che riempì successivamente delle più svariate sostanze, differenti per massa e composizione chimica; ferma restando la lunghezza l del filo di sospensione, egli trovò in ogni caso lo stesso periodo. Concluse pertanto che la massa gravitazionale di un corpo è proporzionale alla massa (inerziale): μ=αm, dove α è una costante universale. Prendendo come unità di massa gravitazionale quella dell'unità di massa inerziale, cioè del chilogrammo, α assume il valore 1. E' questo il motivo per cui si dice cha la forza di attrazione gravitazionale è proporzionale al prodotto delle masse e la [13 bis] si scrive

[14] $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$.

La determinazione del valore numerico di G è solo un problema tecnico che fu risolto da Cavendish (1731-1810) con la bilancia di torsione nel 1798.
(Vedi fig. 2 che rappresenta schematicamente la bilancia di torsione).

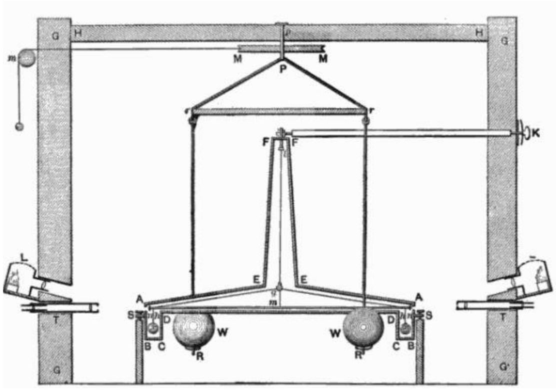

fig. 2

Il valore attualmente accettato è G=6,671.10$^{-11}$ Nm$^2$/Kg$^2$. Noto G, fu possibile calcolare la massa della Terra dall'accelerazione di gravità, del Sole dai dati dell'orbita terrestre e le masse dei pianeti dotati di satelliti dalle orbite dei satelliti. Si trovò che tutti i pianeti hanno masse molto piccole rispetto a quella del Sole. Giove, che è il pianeta più massiccio, 318 volte la Terra, ha una massa che è meno di 1/1000 di quella del Sole. Più difficile fu determinare la massa di corpi celesti privi di satelliti; per esempio, la massa della Luna fu determinata sfruttando la parallasse mensile, cioè il piccolo spostamento mensile apparente delle stelle dovuto al rinculo provocato dalla Luna sulla Terra. Ora anche la Luna è dotata di satelliti (artificiali) e la sua massa è calcolata con grane accuratezza. ($m_{\text{Luna}} \approx \frac{1}{81} m_{\text{Terra}}$).

Ma la legge di Newton consente molto di più. Integrando le equazioni del moto è possibile determinarne l'orbita di un pianeta, calcolare le perturbazioni che un pianeta subisce da tutti gli altri, scoprire nuovi pianeti. E' cosi che il francese Urbain Le Verrier (1811 –1877) previde col la sola forza dei calcoli l'esistenza di Nettuno per spiegare le discrepanze osservate sull'orbita di Urano. Nettuno fi osservato per la prima volta dall'astronomo tedesco Galle nel 1846 sulla scorta dei calcoli effettuati da Le Verrier. La legge di Newton permette inoltre di capire che le leggi di Keplero sono solo approssimate, introducendo il concetto di *massa ridotta*.

**Massa ridotta.**

Il moto di un pianeta intorno al Sole è in realtà un problema a due corpi, dato che il Sole non è fisso: essi orbitano entrambi intorno al comune centro di massa. Diciamo in generale $P_1$ e $P_2$ due particelle interagenti di massa $m_1$ ed $m_2$, $r_1$ ed $r_2$ le loro distanze da un punto O (eventualmente il centro di massa). Introdotti i vettori $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, e scelta l'origine O nel centro di massa $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$, risulta $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0}$. Da questa equazione e dalla $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, si ricava

[15] $\vec{r}_1 = \frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}, \vec{r}_2 = -\frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}$. Derivandole entrambe due volte, abbiamo le accelerazioni:

$\vec{a}_1 = \frac{m_2 \vec{a}}{m_1 + m_2}, \vec{a}_2 = -\frac{m_1 \vec{a}}{m_1 + m_2}$.

Moltiplicando la prima per $m_1$ e la seconda per $m_2$ si hanno le forze:

$m_1 \vec{a}_1 = \frac{m_1 m_2 \vec{a}}{m_1 + m_2}$: è la forza esercitata dalla seconda particella sulla prima, $m_2 \vec{a}_2 = -\frac{m_2 m_1 \vec{a}}{m_1 + m_2}$ quella di reazione della prima sulla seconda; come si vede, esse sono opposte (uguali in modulo e direzione e di verso contrario), come vuole8t) la terza legge della dinamica.

La quantità $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ si chiama ***massa ridotta*** *del sistema.*

Se $m_2$=M è la massa del Sole, $m_1$=m quella di un pianeta, r il vettore distanza che va dal Sole al pianeta, la legge della gravitazione di Newton si scrive $G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} = -m\vec{a}_1 = -\frac{Mm}{M+m}\vec{a}$ e quindi l'accelerazione del pianeta risulta essere $\vec{a} = -G\frac{M+m}{r^3}\vec{r}$. Per quanto concerne la 3ª legge di Keplero, otteniamo, approssimando l'orbita con un cerchio, .

[16] $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}$.

Come si vede, il rapporto tra il cubo del raggio dell'orbita (a rigore del semiasse maggiore) e il quadrato del periodo di rivoluzione non dipende soltanto dalla massa del Sole, ma anche dalla massa del pianeta. Siccome però, come abbiamo notato, i pianeti hanno masse trascurabili rispetto a quella del Sole, la 3ª legge di Keplero è valida con buona approssimazione.

Nel caso del nostro satellite la nassa m è 1/81 della massa M della terra, non proprio trascurabile, perciò, una volta nota la massa della Terra, la [16] permette di ricavare la massa della Luna.

Ottenuto il raggio vettore relativo **r**(t) in funzione del tempo, le [15] permettono di determinare le orbite $\mathbf{r}_1$(t) ed $\mathbf{r}_2$(t) dei due corpi (per esempio il Sole e un pianeta) rispetto al loro centro di massa. Queste due orbite sono a loro volta ellissi col fuoco nel centro di massa.

In realtà le orbite non sono esattamente ellissi per la reciproca perturbazione dei pianeti, addirittura non sono neanche orbite chiuse; il loro perielio si sposta al passare del tempo (precessione del perielio) e tale *precessione* può essere quasi completamente calcolata con la legge di Newton, salvo un piccolissimo residuo che è massimo per il pianeta Mercurio, in quanto è il più vicino al Sole: 43 secondi d'arco per secolo. Questo spostamento residuo è stato spiegato dalla teoria della Relatività generale di Einstein (1916), ma questa è un'altra storia.[4]

**Esercizio**.

Determinare la distanza d del centro di massa del sistema Terra – Luna dal centro della Terra, conoscendo la distanza Terra – Luna r=384 mila chilometri e sapendo che la massa della Terra è 81 volte quella della Luna. Confrontare d col raggio della Terra R=6371 chilometri.

Eseguire un calcolo analogo per il sistema Sole – Terra.

(r=150 milioni di Km, $M_{Sole}$=330 mila $m_{Terrra}$ e Raggio R del Sole=670000 Km).

[4] Einstein: "Sulla teoria speciale e generale della relatività" (volgarizzazione), Zanichelli 1921; Kopff: "I fondamenti della relatività einsteiniana, Hoepli 1923; Levi Civita: "Fondamenti di meccanica relativistica", Zanichelli 1928; Pantaleo (a cura di): "Cinquanta anni di relatività", Giunti-Sansoni 1955; Fabbri: "Per un insegnamento moderno della relatività", A.I.F. sezione di Lucca-Pisa 1985; Serra: "Relatività", Annuario del Liceo Scientifico Scorza 2005 (vedi anche sul sito di nota 3)

**Appendice matematica: equazione polare dell'ellisse.**

Assumiamo l'origine delle coordinate polari (r; θ) nel fuoco $F_1$ (vedi fig. 3).

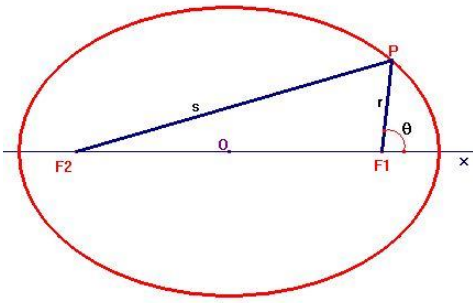


fig. 3

Dalla definizione dell'ellisse: $PF_2+PF_1 = 2a$ segue $s=2a-r$. Posto $F_2F_1 =2c$, notiamo che $c<a$.

Calcoliamo s col teorema del coseno (o immaginiamo un procedimento alternativo proiettando P sull'asse polare x): $s^2 = (2c)^2 + r^2 - 4cr\cos(\pi - \theta) = 4c^2 + r^2 + 4cr\cos\theta$. Quindi

$4c^2 + r^2 + 4cr\cos\theta = (2a - r)^2 \Rightarrow 4c^2 + 4cr\cos\theta = 4a^2 - 4ar$ e infine $r = \dfrac{a^2 - c^2}{a + c.\cos\theta} = \dfrac{b^2}{a(1 + \frac{c}{a}\cos\theta)} = \dfrac{p}{1 + e.\cos\theta}$.

Giustificate la seguente affermazione: l'equazione precedente $r = \dfrac{p}{1 + e.\cos\theta}$ vale anche per l'iperbole (ovviamente, in tal caso l'eccentricità e risulta >1. Il parametro p ha lo stesso significato che per l'ellisse).