Ottavio Serra

Determinazione della durata del dì e della notte.

La ripartizione del giorno tra il dì e la notte dipende notoriamente dalla latitudine e dalla data. Ma l'uso della variabile temporale introduce complicazioni nei calcoli e disimmetria tra le quattro stagioni, che hanno durata diversa. È preferibile perciò sostituire il tempo con la declinazione solare, rispetto alla quale le quattro stagioni hanno uguale ampiezza, precisamente circa 23°, 5.
Definisco, ora, il *dì* come l'intervallo di tempo durante il quale il sole si trova al di sopra dell'orizzonte di un dato osservatore, la notte come l'intervallo di tempo in cui si trova al di sotto. Ricordo inoltre, che la declinazione solare, che indicherò con δ, è la distanza angolare tra il sole e l'equatore.
La primavera va dall'equinozio di primavera, quando il sole si trova nel nodo ascendente o punto gamma e perciò la sua declinazione **è** 0°**,** al solstizio d'estate, quando il Sole attraversa il tropico del cancro e la sua declinazione è circa 23°, 5 (esattamente 23° e 27').
L'estate va del solstizio d'estate all'equinozio d'autunno, quando il sole si trova nel nodo discendente o punto Ω, nel quale la declinazione del Sole è 0°.
L'autunno va dall'equinozio d'autunno al solstizio d'inverno, in cui il Sole ha declinazione – 23°, 5.
Infine l'inverno va dal solstizio d'inverno all'equinozio di primavera (vedi Fig.1).

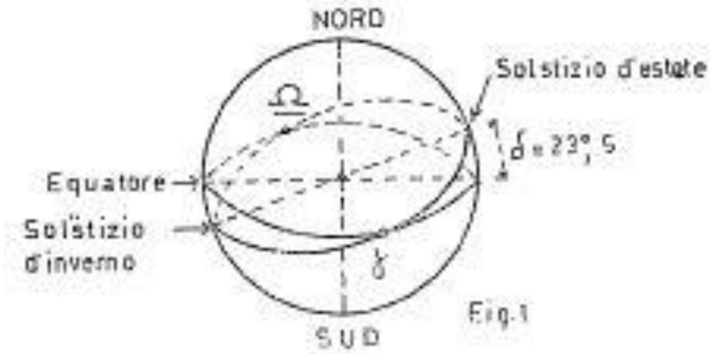

Fig.1

Dato l'andamento simmetrico delle quattro stagioni rispetto alla variabile δ, mi limito a studiare la variazione del dì e della notte in primavera e nell'emisfero boreale, osservando che l'estate è simmetrica della primavera rispetto al solstizio d'estate e che per l'autunno e l'inverno basterà scambiare le parole dì e notte; inoltre, per l'emisfero australe, a parità di data, occorre lo stesso scambio tra dì e notte. Per esempio, nel periodo che va dal 23 dicembre al 21 marzo per noi è inverno e la notte è più lunga del dì, ma nell'emisfero australe è estate, perciò il dì è più lungo della notte. Segue che nella formula [1] che stabilirò più avanti x rappresenta il rapporto tra il dì e il giorno nell'emisfero boreale, il rapporto tra la notte e il giorno nell'emisfero australe.
Considero ora un parallelo AMBN di latitudine λ, (v. fig. 2).

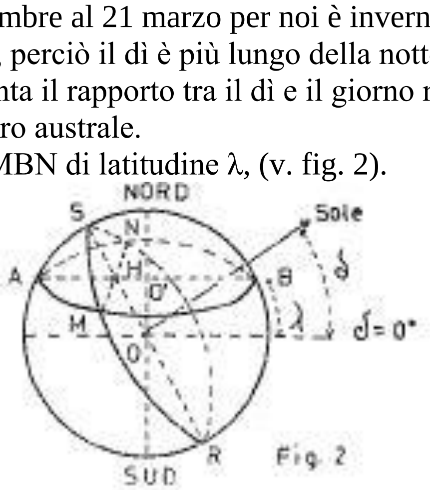

Fig.2

Il circolo di illuminazione SMRN, formante con l'asse polare un angolo pari alla declinazione δ del Sole, taglierà il parallelo considerato in due punti, M ed N, che lo dividono in due archi: quello diurno, MBN, e quello notturno, NAM. Il rapporto tra la notte e il giorno (giorno totale, somma del

dì e della notte) è pertanto uguale al rapporto tra la lunghezza dell'arco NAM e la lunghezza del parallelo AMBN.
Risulta l(AMBN) = 2π.O'A.
Detto R il raggio terrestre, avremo O'A = R$\cos\lambda$; perciò: l(AMBN) = 2 πR$\cos\lambda$.

O'H = 00'tgδ = Rsenλ.tgδ.
l(NAM) = 20'A.φ = 2R$\cos\lambda$.φ
(Ho chiamato φ l'angolo NO'A in radianti, compreso, ovviamente, tra 0 e $\pi/2$).
Il rapporto x tra la notte e il giorno, sarà:
$x = \frac{2R\cos\lambda.\varphi}{2\pi R\cos\lambda} = \frac{1}{\pi}\varphi.$ Siccome $\cos\varphi = \frac{O'H}{O'N} = \frac{Rsen\lambda\tan\delta}{R\cos\lambda} = \tan\lambda.\tan\delta,$ segue:

[1] $x = \frac{1}{\pi}ArcCos(\tan\lambda.\tan\delta),$ con le limitazioni: λ tra 0° e 90°, δ tra 0° e 23°27'.
La stessa formula vale nell'estate boreale.
Casi particolari.

a) Per λ= 0, si ha, qualunque sia δ: $x = \frac{1}{\pi}ArcCos0 = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$
Si deduce il fatto ben noto che all'equatore la notte e il dì sono uguali in ogni epoca dell'anno.
b) Per δ=0, qualunque sia λ, si ha ancora x = ½, cioè, negli equinozi, in ogni punto della terra il dì e la notte sono uguali.
c) Per δ=23° 27' e λ=90° - 23° 27' = 66° 33', $x = \frac{1}{\pi}ArcCos1 = 0,$ cioè nel solstizio d'estate sul circolo polare artico la notte si annulla e il dì dura 24 ore.
d) Per latitudini λ^* maggiori di 66° 33' (e minori di 90°), esiste un valore di δ, dico δ^*, complementare di λ^*, per cui x=0. Per $\delta>\delta^*$, risulta $\tan\lambda^*\cdot\tan\delta > 1$ e la formula [1] perde significato. Ciò si verifica per tutto il tempo necessario affinché δ dal volare δ^* assunto prima del solstizio estivo torni al valore δ^*dopo il solstizio. Per tutto questo tempo la notte si annulla. Perciò il dì va via via crescendo al crescere di λ, oltre 66° 33', fin quando, per λ = 90° il dì dura 6 mesi, dall'equinozio di primavera a quello d'autunno: infatti, se λ=90°, il valore di δ complementare di λ è 0.
Ciò risulta evidente, del resto, guardando la figura 2.

Nota.

Il valore di δ si determina con grande precisione mediante osservazione del passaggio del Sole al meridiano. Ma volendo calcolarlo, in modo approssimato, in funzione del tempo, si può procedere come segue.
Premetto che, a seconda dell'anno, la primavera boreale inizia il 20 o il 21 marzo (equinozio di primavera), l'estate boreale il 20 o il 21 **g**iugno (solstizio d'estate), l'autunno boreale il 22 o il 23 settembre (equinozio d'autunno) e l'inverno boreale il 21 o il 22 dicembre (solstizio d'inverno).
Volendo essere più precisi, mi riferisco ai dati relativi all'anno 2014.

Anno 2014	Giorno
Equinozio di primavera	20 Marzo 2014
Solstizio d'estate	21 Giugno 2014
Equinozio d'autunno	23 Settembre 2014
Solstizio d'inverno	21 Dicembre 2014

La primavera va dal 20 marzo al 20 giugno inclusi e perciò conta 93 giorni. D'altra parte la sua ampiezza angolare è di 23° 27'=23,45° = $0{,}40928^{Rad}$, perciò un giorno corrisponde a $0{,}0044^{Rad}$ in termini di declinazione solare. Assunto come primo giorno quello equinoziale, δ si trova moltiplicando il numero dei giorni per $\mathbf{0{,}00440^{Rad}}$.

L'estate va dal 21 giugno al 22 settembre (inclusi) e conta 94 giorni; perciò un giorno corrisponde a $0{,}40928^{Rad}/94= 0{,}00434^{Rad}$. Assunto come primo giorno il solstizio d'estate, δ è uguale al numero dei giorni per $\mathbf{0{,}00434^{Rad}}$.

L'autunno va dal 23 settembre al 20 dicembre e conta 89 giorni; un giorno corrisponde a $0{,}0046^{Rsd}$.

L'inverno va dal 21 dicembre al 19 marzo e conta 88 giorni (89 se l'anno è bisestile); perciò un giorno corrisponde a $\mathbf{0{,}00465^{Rad}}$ ($\mathbf{0{,}00460^{Rad}}$, se l'anno è bisestile).

(Versione migliorata e corretta di un articolo pubblicato la prima volta su: *Quaderni della Mathesis* di Cosenza, Anno III N. 2 del 31-5-1975).