Ottavio Serra

Proprietà elementari delle coniche

1. Generalità.

Le coniche furono studiate con i metodi della geometria sintetica di Euclide da Apollonio di Perga (262 a.C. Perga – 190 a.C. Alessandria). Il nome è un aggettivo sostantivato e deriva dal titolo "Sezioni coniche" dell'opera di Apollonio, che studiò tali curve come sezioni di un cono completo (doppio cono) con un piano secante.

Io userò il metodo cartesiano delle coordinate nel piano. In tal modo non si vede la parentela dei tre tipi di curve: parabola, ellissi, iperbole, se non indirettamente perché tutte risultano rappresentate da equazioni in x y di 2° grado (curve del 2° ordine). Il vantaggio è che la trattazione risulta molto più semplice.

2. Parabola.

Si definisce parabola il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto F detto fuoco e da una retta d detta direttrice. Conduco da F la perpendicolare alla direttrice e sia G l'intersezione. Il punto medio O di FG appartiene alla parabola. Inoltre, se P sta sulla parabola, il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta FG sta sulla parabola, dunque la retta FG è asse di simmetria per la parabola. Il punto O si chiama vertice e spesso è indicato con V. La parabola è chiaramente una curva aperta e illimitata.

Introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, per ottenere una equazione la più semplice possibile (*equazione canonica*) scelgo come fuoco il punto F(0; c) e come direttrice d la retta di equazione y=-c. Questa scelta mostra subito che l'equazione della parabola sarà invariante sostituendo x con -x (curva simmetrica rispetto all'asse y). Imponendo la condizione PF=Pd, si trova l'equazione $y=x^2/(4c)$, che si può scrivere $y=ax^2$, e l'ordinata del fuoco risulterà c=1/(4a), l'equazione della direttrice y=-1/(4a). Si nota che l'origine O(0; 0) sta sulla parabola e ivi la tangente alla parabola è l'asse x (y=0). Si ricordi che la tangente a una curva è la retta che interseca la curva in (***almeno***) **due punti coincidenti**. Siccome l'equazione è di 2° grado, nel nostro caso le intersezioni non possono essere più di due; ciò significa che la parabola sta tutta in uno dei due semipiani determinati da una qualsiasi retta tangente. Si chiama vertice della parabola il punto in cui la tangente è perpendicolare all'asse di simmetria. Nel nostro caso il vertice V è l'origine O.

Il fatto che la parabola è rappresentata da un'equazione di 2° grado implica che una retta passante per un suo punto P la interseca al più in due punti, esattamente in due punti se non è parallela all'asse di simmetria. Se perciò una retta r come PK (vedi fig.1) ha in comune il solo punto P, vuol dire che l'altro punto di intersezione coincide con P; perciò PK è tangente in P alla parabola.

Questa osservazione vale per tutte le curve del 2° ordine, come l'ellisse e l'iperbole, in particolare per il cerchio. Per questo motivo Euclide, nei suoi "***Elementi***", dice che la tangente al cerchio è una retta che ha in comune con esso un solo punto.

Costruisco ora la parabola con Cabri.

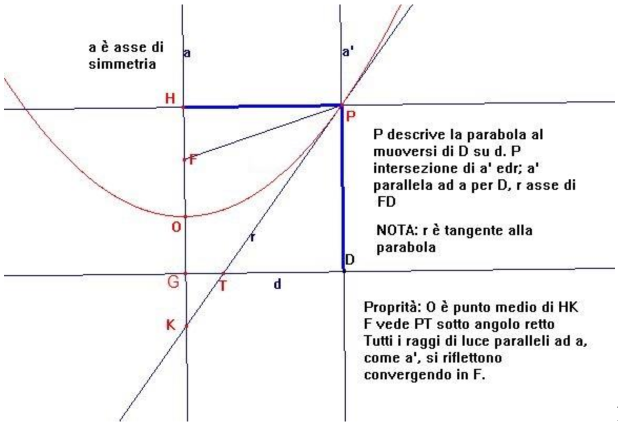


fig.1

Chiaramente, se a<0, la concavità è verso il basso. Ruotando gli assi di 90° in senso orario, e ciò è equivale a scambiare i nomi degli assi cartesiani, si ottiene l'equazione $x=ay^2$, con la concavità rivolta verso destra se a>0, verso sinistra se a<0. Le coordinate del fuoco si invertono: F(c,0) e l'equazione della direttrice diventa x=-c.

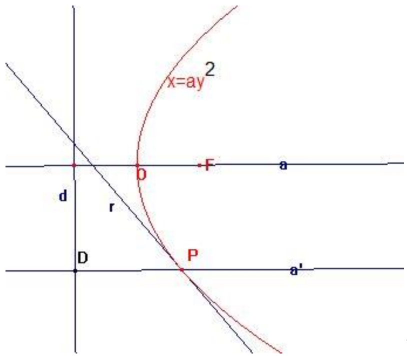


fig.2

Dimostro ora le proprietà indicate nella fig1, che la costruzione con Cabri rende plausibili.

O è punto medio di HK. Si osservi che H è la proiezione ortogonale di P sull'asse di simmetria, che in questo caso è l'asse y delle ordinate, perciò, se $P=(x_0;\ ax_0^2)$, $H=(0;\ ax_0^2)$. K è l'intersezione della tangente in P con l'asse y (di equazione x=0) e l'ordinata di K si calcola sostituendo x=0 nell'equazione della tangente, che è $y-ax_0^2=2ax_0(x-x_0)$, ottenendo $y_k=-ax_0^2$. Si conclude che $K(0;\ -ax_0^2)$ e si vede che K è simmetrico di H rispetto a O.

Due osservazioni.

(a) La proprietà dimostrata è utile per tracciare la tangente a una parabola in un suo punto P:si proietta P in H sull'asse di simmetria e lo si congiunge col simmetrico di H rispetto al vertice. Chiaramente, occorre avere, oltre P, l'asse e il vertice.

(b) Chi ci dice che il coefficiente angolare della tangente è $2ax_0$?

Si potrebbe usare il metodo del discriminante, che tutti conoscono ma applicabile alle equazioni di cui si sappia calcolare il discriminante (equazioni di 2°, 3° e 4° grado), in pratica solo quelle di 2° grado (chi conosce il discriminante delle equazioni di 3° e 4° grado?), o il metodo di Ruffini (SI!) valido per tutte le curve algebriche, ma contentiamoci di quelle polinomiali, ***oppure il metodo rapidissimo*** che qui riporto. Ricordo che la tangente a una curva (se esiste!) ha due punti comuni coincidenti. Si parte da una secante s P_0P il cui coefficiente angolare è $m_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$.Nel nostro caso $m_s=\frac{ax^2-ax2_0}{x-x_0}=a(x+x_0)$ e perciò il coefficiente angolare della tangente è $m=2ax_0$.

ESERCIZIO ***Trovare*** la tangente alla curva dii equazione $y=x^3$ nel punto di ascissa 2 e nel punto di ascissa 0. Quante intersezioni coincidenti con la curva ha la prima tangente? Quante la seconda? Quale differenza grafica notate tra i due casi?
Idem, tangente alla curva di equazione $y=x^5-4x$ nel punto di ascissa 1.

F vede PT sotto angolo retto. Si tratta di dimostrare che il prodotto dei coefficienti angolari di FP e di FT vale -1. Risulta $m = m_{FP} = \dfrac{ax_0^2 - \dfrac{1}{4a}}{x_0 - 0} = \dfrac{4a^2x_0^2 - 1}{4ax_0}$. Per trovare m_{FT} occorre determinare T dal sistema $y=-1/(4a)$ e $y=2ax_0(x-x_0)+ax_0^2$.

Si trova $x_T = \dfrac{4a^2x_0^2 - 1}{8a^2x_0}$, perciò $m_{FT} = \dfrac{-\dfrac{1}{2a}}{\dfrac{4a^2x_0^2 - 1}{8a^2x_0 - 0}} = -\dfrac{4ax_0}{4a^2x_0^2 - 1}$, segue che il prodotto dei coefficienti angolari è -1.

Il raggio di luce a', riflettendosi in P, converge nel fuoco F.
Per la dimostrazione mi riferirò alla figz.3. Gli angoli marcati con un arco sono uguali: quelli di vertice P formati dal raggio incidente à e da quello riflesso PZ, per la legge della riflessione, il primo e l'angolo PKZ (di vertice K) perché corrispondenti di rette parallele.

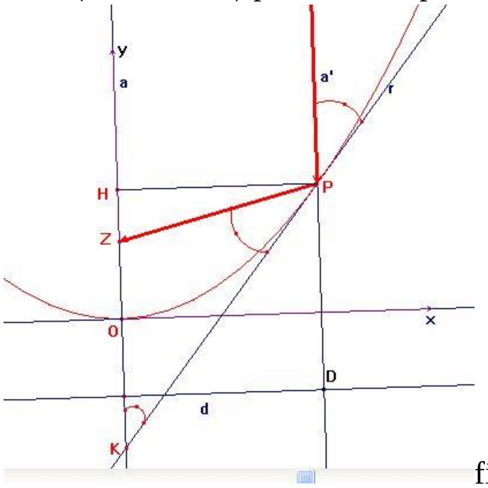


fig.3

Segue che il triangolo PZK è isoscele e ZP=ZK. Posto Z=(0,z), si ottiene $(0-x_0)^2+(z-ax_0^2)^2 = (z+ax_0^2)^2$, e quindi z=1/(4). **Z è, dunque, il fuoco F della parabola.**
Questa proprietà è utilizzata negli specchi parabolici dei telescopi, sia ottici sia radio, in modo da concentrare la luce (in generale la radiazione elettromagnetica) in un punto, ottenendo immagini nitide e luminose. (nel caso di lenti e specchi sferici la convergenza di raggi paralleli in un punto è solo approssimata, è buona solo per specchi di piccola apertura, ma per vedere sorgenti molto deboli o molto lontane occorre raccogliere molta luce e quindi necessitano specchi di grande apertura). Raccogliendo la luce solare con specchi parabolici di grande aperura, nel fuoco si possono raggiungere temperature molto elevate e si riesce a fondere il platino (1572 °C); da qui il nome di fuoco che, come si vede, è ben appropriato. Per lo stesso motivo i proiettori e i fari delle automobili sono paraboloidi di rotazione.

3. Ellisse

L'ellisse è definita come il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti, detti fuochi, è costante. La curva si può disegnare fissando su un foglio due puntine da disegno (i fuochi) e legando ad esse un filo più lungo della loro distanza. Tendendo il filo con una matita, questa, scorrendo sul foglio descrive l'ellisse. Se i due fuochi coincidono, la matita descrive un cerchio; si vede così che l'ellisse è una generalizzazione del cerchio: in questo i fuochi coincidono nel centro. La definizione evidenzia che l'ellisse è simmetrica rispetto alla retta dei fuochi (asse focale) e alla retta perpendicolare alla precedente nel punto medio **O** dei fuochi, che dirò asse di simmetria secondario. Il punto O risulta perciò centro di simmetria. Dalla fig.4 risulta che sull'ellisse ci sono due punti, A e A', allineati con i fuochi ed esterni al loro segmento (**perché?**) e altri due punti, non segnati in fig.4, sull'asse di simmetria secondario, simmetrici rispetto al centro O, più vicini ad O di A ed A'(**perché più vicini**?).

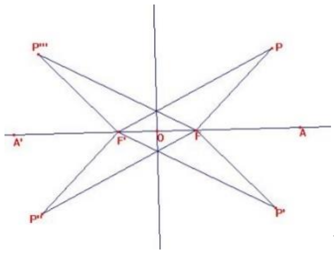


fig.4

Per avere l'equazione più semplice (equazione canonica), scelgo i fuochi sull'asse x simmetrici rispetto ad O: F(c; 0) ed F'(-c; 0). Se chiamo 2a la costante, ho PF+PF'=2a. Dette x, y le coordinate di P, ottengo $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$. Isolando una delle due radici quadrate ed elevando al quadrato, isolando la rimanete radice quadrata ed elevando ancora al quadrato, tenendo conto che c<a (***perché***?), si ottiene l'equazione canonica dell'ellisse:
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$ Il numero positivo $b=\sqrt{a^2-c^2}$ è detto semiasse minore dell'ellisse, a è il semiasse maggiore o focale. L'equazione canonica si scrive perciò $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Si nota la simmetria rispetto agli assi cartesiani e all'origine O. L'ellisse si riduce al cerchio di raggio a, se b=a, ovvero se i fuochi coincidono nel centro.
Costruzione dell'ellisse con Cabri:

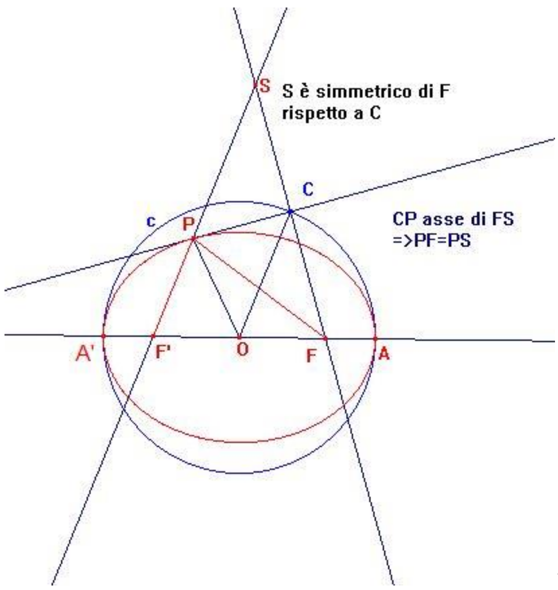


fig.5

Si noti che l'ellisse, come del resto la parabola, giace tutta da una parte rispetto alla retta PC (è una curva convessa), altrimenti dovrebbe secare la retta in qualche punto diverso da P e ciò è impossibile, perché è una curva del 2° ordine e non può avere più di due intersezioni (distinti o coincidenti) con una retta. Ciò fa presumere che PC è tangente.
La retta PC è tangente all'ellisse e vale una proprietà focale analoga a quella della parabola: i raggi vettori PF e PF' formano angoli uguali con la tangente.

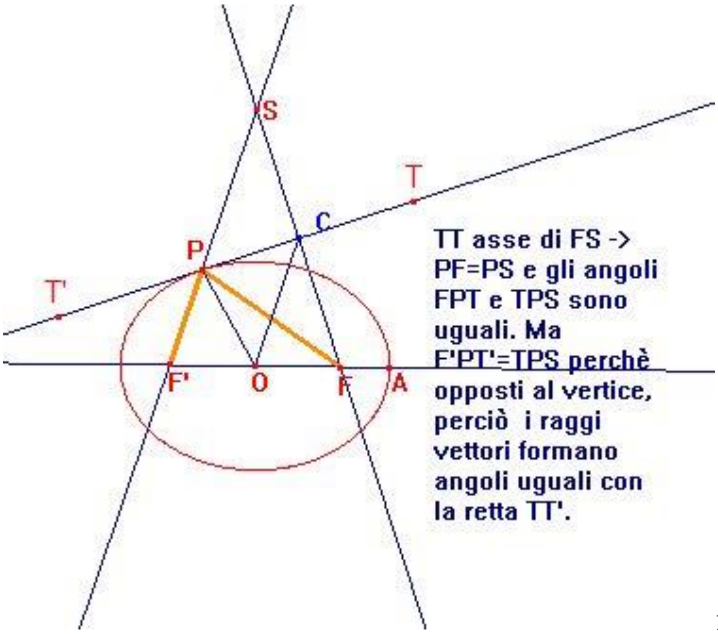


fig.6

Nela fig.6 è riportato il ragionamento che giustifica questa affermazione

Ciò implica che la luce (o il suono) di una sorgente posta in un fuoco, riflettendosi sull'interno dell'ellisse, convergono nell'altro fuoco.
(Pare che gli antichi sacerdoti egizi conoscessero questa proprietà).
Come calcolare l'equazione della tangente in un punto dell'ellisse? Supponendo che il punto abbia ordinata positiva, altrimenti si procede per simmetria, sia $P_0\left(x_0;\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}\right)$ il punto considerato, $P\left(x;\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$ un altro punto. La retta P_0P è una secante s e il suo coefficiente angolare è

$$m_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-x_0^2}}{x-x_0}=\frac{b}{a}\cdot\frac{-\left(x^2-x_0^2\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-x_0^2}\right)}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{x+x_0}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-x_0^2}}.$$

Per ottenere il coefficiente angolare m della tangente impongo che P coincida con P_0 e quindi x con x_0. Ottengo $m=-\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}$.

Osservazione. Se b=a, l'ellisse diventa il cerchio di raggio a, i fuochi coincidono nel centro O e i raggi focali coincidono col raggio PO. L'angolo F'PF si annulla e gli angoli T'PO e TPO diventano adiacenti; ma ho dimostrato che sono uguali e quindi diventano retti. Si ottiene perciò la nota proprietà del cerchio che la tangente (TT') è perpendicolare al raggio nel punto di contatto.

Si può utilizzare questa proprietà per determinare l’equazione della tangente al cerchio in un suo punto con una tecnica diversa da quella generale utilizzata prima; segue anche che una tangente ha distanza dal centro uguale al raggio del cerchio.

4. Iperbole

L’iperbole, come l’ellisse, è una conica a centro. La sua definizione è molto simile a quella dell’ellisse: è il luogo dei punti (del pano) tali che la differenza delle distanze da due punti fissi, i fuochi, in valore assoluto è una costante 2a. Questa volta, però, la distanza 2c dei fuochi è maggiore di 2a (**perché?**). L’iperbole, come l’ellisse, è simmetrica rispetto alla retta dei due fuochi, (**asse focale o trasverso**), e rispetto alla perpendicolare ad essa nel punto medio O tra i due fuochi (asse **non trasverso**). Perciò O è centro di simmetria (vedi Fig.7). L’asse focale interseca l’iperbole nei punti A e A’ (simmetrici rispetto ad O), ma ora, a differenza del caso dell’ellisse, i punti A e A’ sono più vicini al centro O dei fuochi, precisamente OA=a. Infatti, 2a=F’A-FA=F’O+OA-(FO-OA) = FO+OA-FO+OA=2OA, quindi OA=a. Per questo motivo l’asse focale è detto trasverso. Invece l’asse non trasverso non interseca l’iperbole (i punti di quest’asse sono equidistanti dai fuochi, perciò la differenza delle distanze dai fuochi è zero, non 2a); da qui il suo nome.

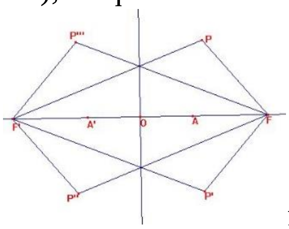


fig.7

L’iperbole è una curva aperta e illimitata, perché le distanze di un suo punto dai fuochi possono essere arbitrariamente grandi, basta che la differenza si mantenga costante (2a.) (L’ellisse è invece **chiusa** e **limitata,** perché è la somma delle distanze ad essere fissata).

Costruzione dell'iperbole con Cabri.

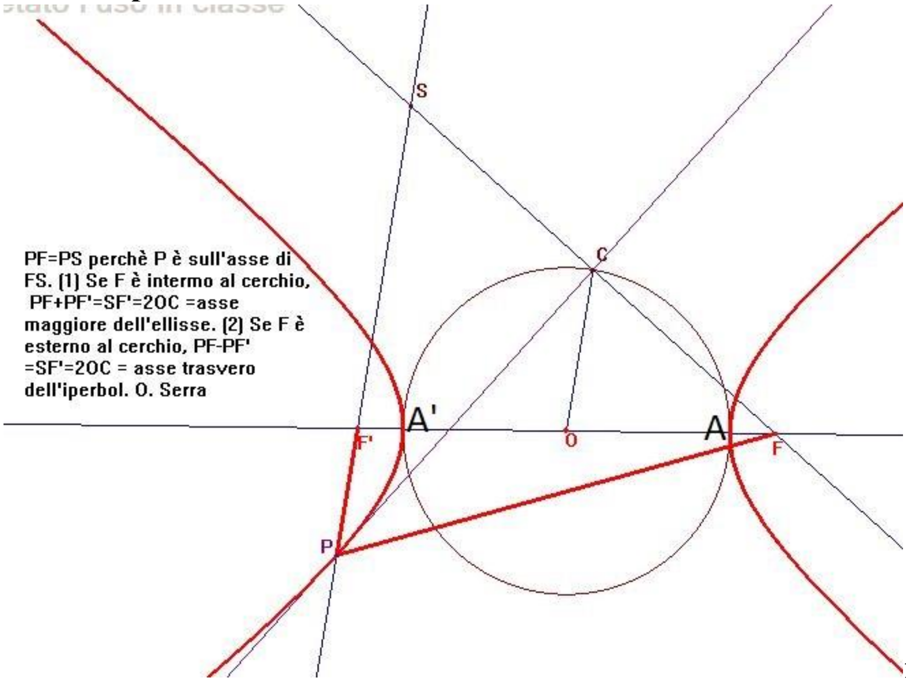


fig.8

La costruzione è la stessa di quella utilizzata per l'ellisse: basta trascinare F a destra di A (o A a sinistra di F). Come per l'ellisse, CP è tangente in P all'iperbole

L'equazione canonica. Scelti l'asse trasverso F'F come asse x, l'asse non trasverso come asse y, posto F(c; 0) P(x; y), dalla definizione $\left|\sqrt{(x-c))^2+y^2}-\sqrt{(x+c))^2+y^2}\right|=2a$, si ottiene $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b^2=c^2-a^2$. Si vede che la striscia di piano compresa tra le rette x=-a e x=a separa i due rami dell'iperbole. Risolvendo rispetto a y, si ottiene $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Se x è molto grande rispetto ad a, a^2 è trascurabile rispetto a x^2 e i rami dell'iperbole si avvicinano, senza mai toccarle, alle rette $y=\pm\frac{b}{a}x$, dette asintoti dell'iperbole (*senza contatto*).

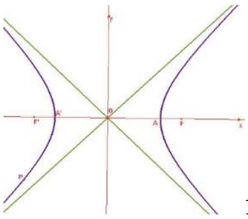


fig.9

L'iperbole gode di una proprietà focale analoga a quella dell'ellisse: i raggi sonori o luminosi uscenti da un fuoco si riflettono **divergendo** in modo che **i loro prolungamenti** passini per l'altro fuoco. A differenza della parabola o dell'ellisse che concentrano effettivamente l'energia sonora (o luminosa) in un punto, uno specchio iperbolico concentra i raggi riflessi in modo virtuale (fig.10).

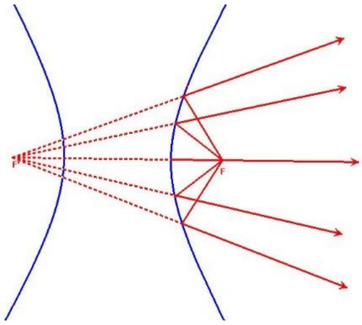


fig.10

Iperbole equilatera. Si dice equilatera se i due semiassi a e b, *trasverso e non trasverso,* sono uguali. In tal caso l'equazione diventa $x^2-y^2=a^2$ e gli asintoti, y=x e y= -x, sono perpendicolari e si possono assumere come assi cartesiani ortogonali, eseguendo una rotazione di 45°. Non volendo usare le formule trigonometriche per eseguire la rotazione, si può procedere calcolando le distanze (**con segno**) di un punto P(x; y) dell'iperbole dagli asintoti e assumerle come nuove coordinate X, Y.

Distanza di P dal 1° asintoto: $X=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$, distanza di P dal 2° asintoto $Y=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Moltiplicando, $XY=\frac{x^2-y^2}{2}=\frac{a^2}{2}\equiv K.$ La scelta del verso per i nuovi assi X, Y ha condotto a una costante K positiva e i due rami dell'iperbole equilatera stanno nel 1° e 3° quadrante (fig.11).

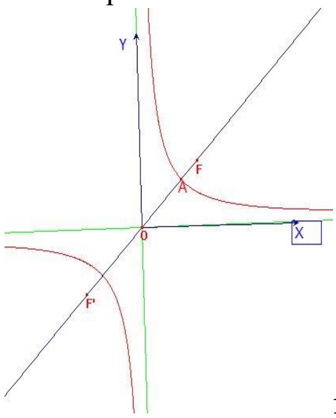


fig.11

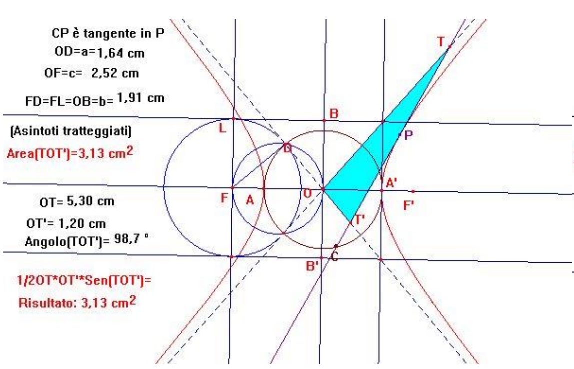
Dimostra che OA (fig.11) vale a (una rotazione è una isometria e perciò conserva le distanze).

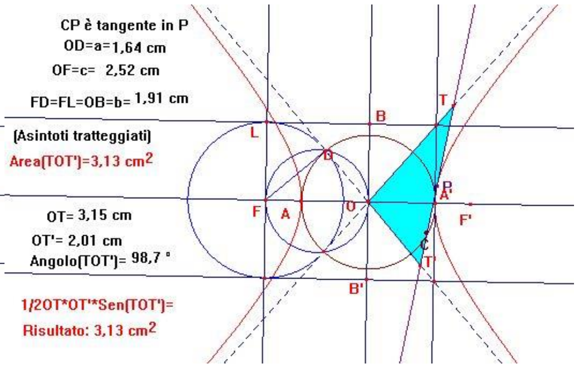
Una notevole proprietà dell'iperbole è la seguente: Le tangenti a un'iperbole formano con gli asintoti triangoli equivalenti. La proprietà vale per tutte le iperboli, ma io la dimostrerò, per semplicità, solo per le iperboli equilatere, y=k/x. Il coefficiente angolare della tangente in $P_0(x_0;\ k/x_0)$ è $m=-k/x_0^2$ (calcolarlo!) e l'equazione della tangente è $y-\frac{k}{x_0}=\frac{-k}{x_0^2}(x-x_0)$.

L'intersezione T con l'asse x (y=0) ha la $x=2kx_0$, quella T'con l'asse y (x=0) ha $y=2k/x_0$. L'area del triangolo TOT' è perciò $\frac{1}{2}$. OT.OT' = $4k=2a^2$, indipendente dalla tangente[1].

Riporto due "istantanee" della stessa iperbole con la tangente in punti diversi:

[1] Vedi la mia costruzione con Cabri "Asintoti e tangente".





5. Parametro. Fuochi e direttrici. Eccentricità.

Si chiama **parametro di una conica** la metà della corda perpendicolare all'asse focale e passante per il fuoco (uno dei fuochi, per le coniche a centro). Il parametro è una grandezza che consente di scrivere un'unica equazione, in forma polare, per i tre tipi di coniche, come vedremo più avanti. Il calcolo è immediato e dà p=2c per la parabola, $p=b^2/a$ per le coniche a centro.

Il concetto di eccentricità (simbolo ***e***) è sorto dallo studio dell'ellisse per quantificare il grado di schiacciamento rispetto al cerchio (di quanto i fuochi sono distanti dal centro) ed è stata definita e=c/a per le coniche a centro. Si è visto poi che rappresenta il rapporto costane tra le distanze di un generico punto della conica da un **fuoco** e da una retta detta ***direttrice*** relativa a quel fuoco, per analogia con la direttrice della parabola. Per la parabola **e=1** (si pensi alla definizione: luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice). Le coniche a centro, avendo due fuochi, avranno due direttrici.
Per le coniche a centro si trova che le direttrici, perpendicolari all'asse focale, dista dal centro **a/e** (semiasse focale **a** diviso l'eccentricità **e**).
Lo verifico in casi particolari, perché il caso generale è laborioso da trattare**.** Sia P un punto sulla conica, *F* un fuoco, *d* la corrispondente direttrice (vedi fg.12 per l'ellisse).

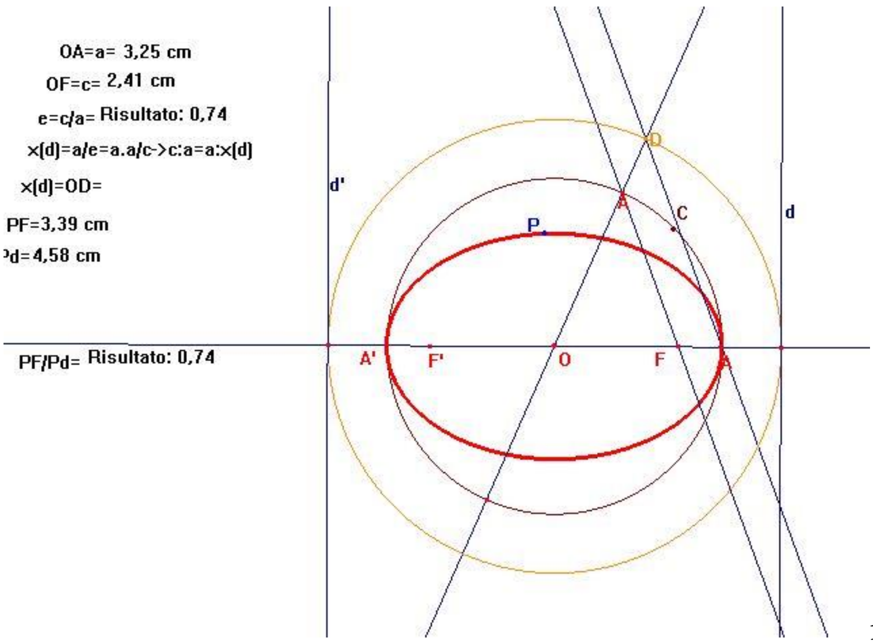


fig.12

Nel caso che P coincida con A, PF=AF==OA-OF=a-c=a-ae; Pd=Ad=Od-OA=x(d)-a. Dalla relazione PF/Pd=e segue AF/Ad=e; quindi a-ae=e(x(d)-a), da cui a=e.x(d) e **x(d)=a/e.**

Se P coincide con A', si ottiene A'F=a+c=a+ae, A'd=a+x(d). Da A'F=e.Ad segue a+ae=e(a+x(d)), e quindi **x(d)=a/e**. Infine, se P è sul semiasse non focale (è *quasi* il caso della fig.12), $PF=\sqrt{b^2+c^2}=a$ Pd=Od =x(d), quindi dalla relazione PF/Pd=e segue a/x(d)=e, cioè **x(d)=a/e**, come nei primi due casi.

Si badi che né i tre casi particolari studiati, né la costruzione con Cabri garantiscono la proprietà generale, la rendono solo ***plausibile*.** Chi crede di dimostrare una proprietà matematica sulla base di poche (o molte) conferme particolari rischia di fare la fine del *Tacchino di Russell*.[2]

Per l'analoga proprietà dell'iperbole si guardi la fig.13 e si verifichino i primi due casi (P coincidente con gli estremi dell'asse focale, trasverso, A e A').

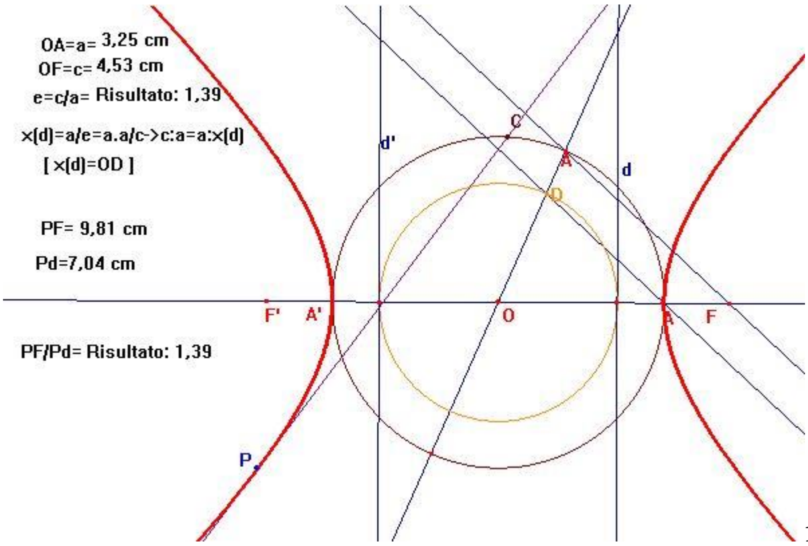


fig.13

6. Equazione polare delle coniche.

I concetti di parametro e di eccentricità consentono di scrivere in modo unitario un'equazione in coordinate polari valida per tutti i tipi di coniche. Vedo dapprima il caso della parabola.

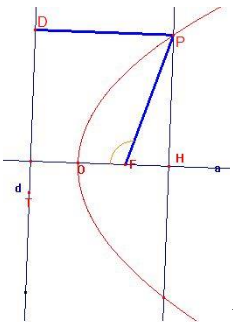


fig.14

Dalla fig.14, posto FP=ρ, l'angolo OFP=φ, segue PD=Hd=Fd+HF=2c+ρ.cos(π-φ) =p- ρ.cosφ e siccome FP=PD perché l'eccentricità **e=1,** ρ(1+cosφ) = p. Ottengo perciò

$\rho=\dfrac{p}{1+\cos\phi}$, che si può anche scrivere, essendo e=1, $\rho=\dfrac{p}{1+e.\cos\phi}$.

[2] Vedi nel mio sito: *digilander.libero.it/ottavioserra0* la cartella **Lezioni allo Scorza**, Probabilità 2016, lezione "***Il tacchino di Russell e altre storie***".

Si noti che per φ=0, ρ=p/2 =c (P va nel vertice O della parabola); per φ= π, ρ→+∞ (P va all'infinito sul ramo "superiore" della parabola); per φ= -π, ρ→+∞ (P va all'infinito sul ramo "inferiore" della parabola. (Si noti che φ va da -π a π).

Per l'ellisse si guardi la fig.15.

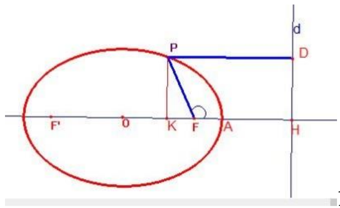


fig.15

Assunto, al solito, l'asse focale come asse polare, il fuoco F come polo, posto l'angolo AFP=φ (argomento), FP=ρ (raggio vettore), risulterà PD=KH=OH-OF+KF=x(d)-c- FPcosφ, ovvero

PD=a/e-a.e- ρ.cosφ. Siccome FP/PD=e, ottengo ρ=a-a.e^2-e.ρ.cosφ. Infine

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi} = \frac{a(1-\frac{c^2}{a^2})}{1+e\cos\varphi} = \frac{b^2/a}{1+e\cos\varphi} = \frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Per l'iperbole (fig.16) si procede come per l'ellisse. Si ottiene ancora $\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$,(con e>1).

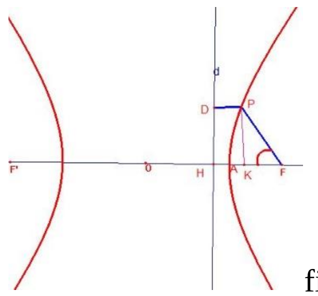


fig.16

L'equazione polare unifica le coniche dal punto divista analitico, come le sezioni di un cono le unificava dal puto di vista sintetico: per e=0, si ha il cerchio (ellisse particolare), per 0<e<1 si hanno le ellissi, per e=1 la parabola, per e>1 le iperboli.

Nel moto dei corpi celesti intorno a una stella (un pianeta intorno al Sole, … eccetera) con la legge di Newton si dimostra che l'orbita è una **ellisse** se l'**energia** totale, (cinetica più potenziale), è negativa; una **parabola** se l'**energia** totale è **esattamente zero;** un ramo di **iperbole** se è **positiva.** Siccome i valori **esatti** "*non sono di questo mondo*" (e=0, e=1, orbita esattamente circolare, orbita esattamente parabolica), in un campo gravitazione centrale una particella, non perturbata da altre particelle, descrive o una ellisse (***sistema legato***) o un ramo di iperbole (alcune comete).

Ma allora, perché un proiettile sparato obliquamente (e trascurando la resistenza dell'aria), **descrive un arco di parabola**?

Dire perché una carica positiva, nel campo elettrostatico generato da un'altra carica positiva, può descrivere solo un ramo di iperbole. (Si pensi al **famoso esperimento di Rutherford, Geiger e Marsden** delle particelle α emesse da una sorgente di polonio e dirette contro un bersaglio costituito da una sottile lamina d'oro, che condusse, nel 1909, al concetto di **nucleo atomico**).

7. Traslazioni.

Se una conica non è centrata sugli assi cartesiani, o equivalentemente, se è vista da un altro sistema di riferimento cartesiano, la sua equazione sarà più complicata. Mi limiterò a trattare il caso di una traslazione degli assi cartesiani nel caso della parabola. Sia $Y=aX^2$ l'equazione della parabola nel riferimento XY di origine V, vertice della parabola. Ci chiediamo quale sarà l'equazione della stessa parabola nel riferimento xOy nel quale V ha coordinate x_0, y_0. Le equazioni della traslazione che porta O in V sono

$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$. Sostituendo nell'equazione canonica $Y=aX^2$, ho $y-y_0=a(x-x_0)^2$ e svolgendo i calcoli, ho $y=ax^2-2ax_0x+ax_0^2+y_0$. Questa è un'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$; confrontando i coefficienti, si trova $-2ax_0=b$, da cui $x_0 =-b/(2a)$, ascissa del vertice V e $ax_0^2+y_0=c$, da cui $y_0=c-a.b^2/(4a^2)$, ovvero $y_0=(4ac-b^2)(4a)=-\Delta/(4a)$, ordinata del vertice V. E se uno non se le ricorda queste formule? Niente paura. Una retta orizzontale $y=s$ taglia la parabola in punti simmetrici rispetto all'asse di simmetria, ma la somma delle x di questi punti è $-b/a$, perciò l'asse di simmetria (e l'ascissa del vertice) risulta $x=-b/(2a)$. Sostituendo nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata del vertice $y=-\Delta/(4a)$.

E il fuoco? L'ascissa è la stessa del vertice, l'ordinata è *al <u>disopra</u> (o al <u>disotto</u>)* del vertice di $1/(4a)$, perciò $F\left(\frac{-b}{4a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$. La direttrice è al disotto (o al disopra) del vertice di $-1/(4a)$, perciò l'equazione della direttrice è $y=\frac{-1-\Delta}{4a}$.

Esercizi.

1) L'equazione $x=ay^2+by+c$ rappresenta una parabola con asse "orizzontale". Determinare le coordinate del vertice e del fuoco e l'equazione della direttrice.

2) Nell'equazione canonica dell'ellisse **a** rappresenta il semiasse focale, se $a>b$; che succede se $a<b$? Dove stanno i fuochi e quali sono le loro coordinate?

3) Che cosa rappresenta l'equazione $x^2/a^2 -y^2/b^2=-1$? Se è un'iperbole, trovare le coordinate dei fuochi e gli asintoti.

4) L'equazione $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$ rappresenta una conica traslata. Determinare l'equazione canonica, i fuochi, le direttrici e gli asintoti.

NOTA.

1) Mio software con Cabri per la realizzazione delle figure riportate nel testo e per esercitazioni interattive può essere fornito dal sottoscritto su richiesta.
(<u>Parabola</u>, <u>Coniche a centro</u>, <u>Asintoti e tangente</u>, <u>Direttrici coniche a centro</u> *e altro*).
2) Mi piace segnalare un classico della matematica, *Geometria intuitiva*, di David Hilbert, uno dei massimi matematici tedeschi (1852 – 1943), che ha influenzato la ricerca matematica per tutto il secolo XX°. In particolare, la parte iniziale del 1° capitolo è dedicato alle coniche, trattate alla maniera dei greci col metodo sintetico.