Ottavio Serra

Campo elettrico di un anello e di un disco

In questo articolo mi propongo di calcolare il potenziale e il campo generati da un anello e poi da un disco elettrizzati in modo uniforme nel generico punto P(x,y,z) dello spazio.

L'analogo problema per un filo finito si trova risolto in un articolo pubblicato nel sito della facoltà di ingegneria dell'università di Salerno.[1]

Considero dapprima un anello, giacente nel piano x,y, di raggio r e centro O, origine di un riferimento cartesiano x,y,z (Vedi fig.1).

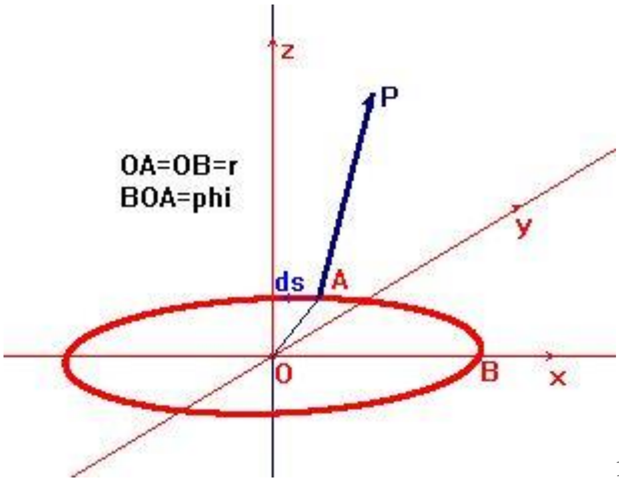


fig.1

Detta λ (C/m) la densità lineare di carica elettrica dell'anello, la carica del tratto infinitesimo ds dell'anello nell'intorno di A è dq = λds. Detto φ l'angolo che OA forma col semiasse positive delle x, le coordinate di A saranno (rcosφ, rsenφ, 0). Sia P(x,y,z) un generico punto dello spazio, la carica dq posta in A genera in P un potenziale

[1] $$dV(P) = k\frac{dq}{AP} = k\frac{\lambda ds}{AP} = k\frac{\lambda r d\varphi}{\sqrt{(x - r\cos\phi)^2 + (y - rsen\phi)^2 + z^2}}.$$

(k è la costante di Coulomb, uguale a $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$). Il potenziale, al solito, è assunto uguale a zero all'infinito.

Integrando su tutto l'anello, avrò il potenziale generato dall'anello in P:

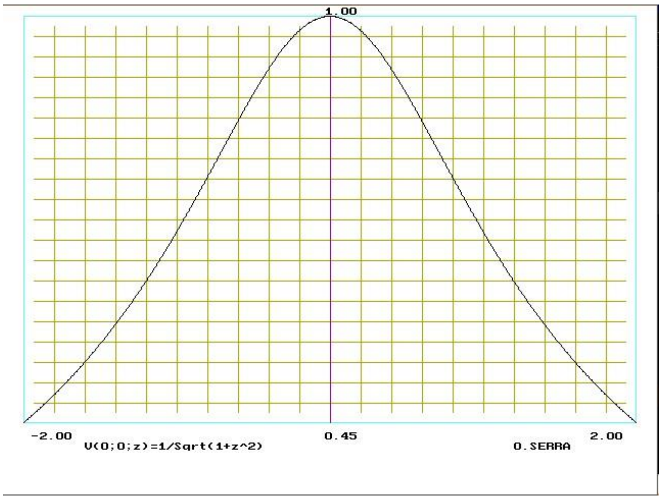
[2] $$V(P) = k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(x - r\cos\phi)^2 + (y - rsen\phi)^2 + z^2}}.$$

Si tratta di un integrale ellittico, che non si può integrare con funzioni elementari, se non in casi particolari. Per esempio, se P sta sull'asse z, P (0,0, z), la [2] si riduce a

[1] Cercare sul web: *Fili, finiti e infinti. - Università degli Studi di Salerno*

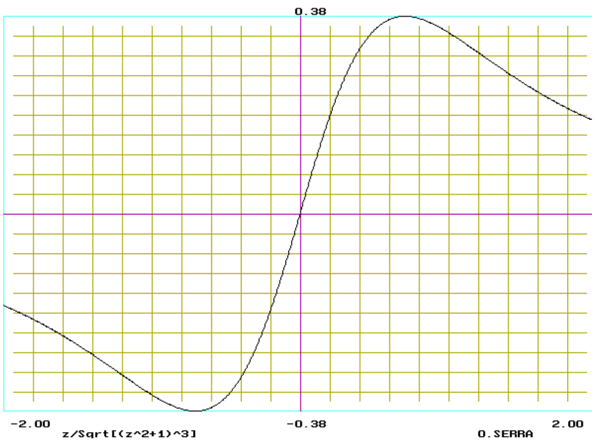
$$[3]\quad V(P)=k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(r\cos\phi)^2+(rsen\phi)^2+z^2}}=k\lambda r\frac{2\pi}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda r}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Il grafico di V(0;0;z) è il seguente (Ho assumendo $\lambda/2\varepsilon_0=1$, r=1):



Siccome in questo caso V non dipende da x e da y, le componenti del campo elettrico, $E_x=-\frac{\partial V}{\partial x},E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}$ sono nulle, come era prevedibile per motivi di simmetria, mentre $E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{\lambda r}{2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{\lambda r}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. (Questo risultato si può ottenere in modo diretto).

Grafico di $E_z(0;0;z)$:



Si noti che, se z è grande rispetto ad r, l'anello è visto da P come una carica puntiforme e si trova

$E_z=\frac{\lambda r}{2\varepsilon_0 z^2}=\frac{2\pi r\lambda}{2\pi 2\varepsilon_0 z^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}$, come vuole la legge elementare di Coulomb.

Riprendo il discorso generale; derivando la [2] rispetto ad x, y, z, si ottengono le componenti del campo elettrico. (Derivazione sotto il segno di integrale). La[2] si può scrivere:

$$V(P)=k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi}}$$. Da qui ricavo

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-k\lambda r\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}(2x-2rx)\right]d\varphi$$. Segue

[4] $$E_x=k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{(x-r\cos\varphi)d\varphi}{\left(x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$. Analogamente

[5] $$E_y=k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{(\mathrm{y}-r\,\mathrm{sen}\,\varphi)d\varphi}{\left(x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$ e

[6] $$E_z=k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{zd\varphi}{\left(x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$.

Considero ora il caso particolare in cui il punto P sta sul piano dell'anello. Non si perde di generalità se lo si prende sull'asse delle x: P(x,0,0). Risulta

$$V(x,0,0)=k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{x^2+r^2-2rx\cos\varphi}}.$$

$$E_x(x,0,0)=k\lambda r\int_0^{2\pi}\frac{(x-r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{(x^2+r^2-2rx\cos\varphi)}$$. Invece $E_y(x,0,0)=E_z(x,0,0)=0$.

Come si vede, e come era intuitivo per motivi di simmetria, il campo agisce lungo l'asse x, cioè lungo la retta che congiunge il punto P col centro dell'anello.

Si noti che anche in questo caso particolare gli integrali sono di tipo ellittico.

Si può calcolare per punti E_x(x,0,0). Assumendo r=1, kλ=1, col mio programma *Integral* ho ottenuto:

x	±0	±0,1	±0,5	±0,7	±0,8	±0,9	±1	±2	± …
E_x(x;0;0)	∓0	∓0,318	∓2,167	∓4,643	∓7,751	∓17,27	∞	∓1,957	∓ ⋯

Poi, per x→± ∞, il campo tende a 0.

Si verifichi che, per x grande rispetto ad r, E_x(x;0;0) tende a $k\lambda r\frac{2\pi}{x^2}=k\frac{q}{x^2}$, come per il campo generato da una carica puntiforme.

L'andamento di Ex(x;0;0) è all'incirca il seguente (fig.2):

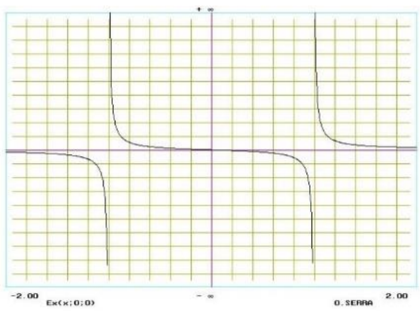


fig.2

Grafico di controllo con Mathematica:

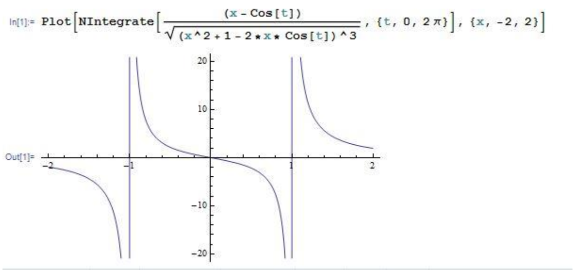


Fig.2 bis

Riporto ora il grafico del potenziale (sempre per r=1) V(x;0;0):

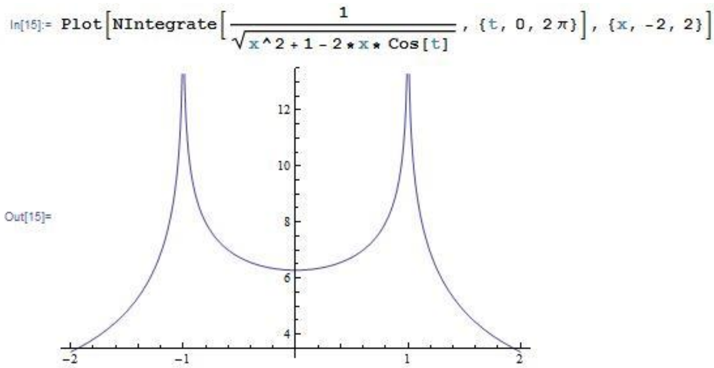


fig.3

Com’era prevedibile, il grafico di V è pari e ha due cuspidi per x=1 e per x=-1.

(La funzione $E_x(x;0;0)$ è invece dispari, come si evince dal grafico).

Caso di un disco di raggio R con densità superficiale uniforme σ (C/m^2).

Assumo il disco di raggio R e centro in O, giacente nel piano x, y. Si σ la densità superficiale di carica (C/m^2). Vedi fig.4

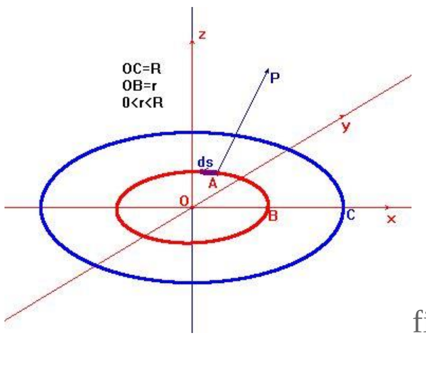


fig.4

La corona circolare di raggio OB=r e spessore dr si può considerare un anello con densità lineare di carica λ=σdr. Il potenziale del disco nel punto P(x;y;z) si ottiene applicando la [2] alla corona e integrando poi rispetto ad r da 0 ad R. Si noti che dq=σdr.ds= σdr.rdφ.

$$V(P)=k\sigma\int_0^R dr.r\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(x-r\cos\phi)^2+(y-rsen\phi)^2+z^2}}$$. Ovvero

[7] $$V(P)=k\sigma\int_0^R dr.r\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi}}$$ (Integrale ellittico).

(Verificare che per OP molto maggiore di R la [7] si riduce al potenziale generato da una carica puntiforme $Q=\pi R^2\sigma$ posta in O).

Dalla [7] si ricavano le componenti del campo elettrico in P(x;y;z):

[8] $$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=k\sigma\int_0^R r.dr\int_0^{2\pi}\frac{(x-r\cos\varphi)d\varphi}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi\right)^3}}$$

[9] $$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=k\sigma\int_0^R r.dr\int_0^{2\pi}\frac{(\mathrm{y}-r\,\mathrm{sen}\,\varphi)d\varphi}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi\right)^3}}$$

[10] $$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=k\sigma\int_0^R r.dr\int_0^{2\pi}\frac{zd\varphi}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2+r^2-2rx\cos\varphi-2rysen\varphi\right)^3}}.$$

Verificare che, se $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ è molto grande rispetto al raggio R del disco, questo si comporta come una carica puntiforme e risulta

$$E_x=k(\pi R^2\sigma)\frac{x}{OP^3},E_y=k(\pi R^2\sigma)\frac{y}{OP^3},E_z=k(\pi R^2\sigma)\frac{z}{OP^3},\vec{\mathrm{E}}=k(\pi R^2\sigma)\frac{\vec{OP}}{OP^3}.$$

Punto P in posizioni particolari.

1) Considero ora il caso in cui P è sull'asse z: P(0;0;z). Risulta

$$V(0;0;\mathrm{z}=\mathrm{k}\,\sigma\int_0^R\frac{2\pi rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+R^2}-|z|).$$

$E_x(0;0;z)=Ey(0;0;0)=0$,

$$E_z(0;0;z)=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right),\vec{\mathrm{E}}(0;0;\mathrm{z})=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{\mathrm{z}}.$$

Posto $\sigma/2\varepsilon_0=1$, R=1, il grafico del potenziale è quello di fig.5, del campo E_z è quello di fig.6:

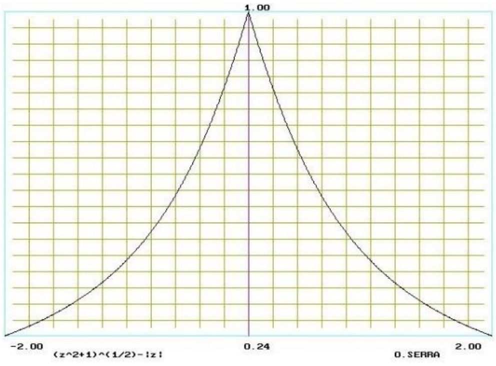


fig.5

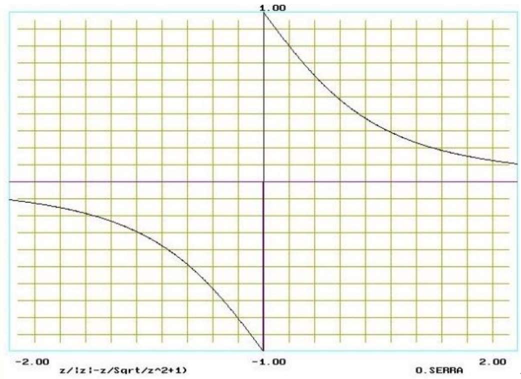


fig.6

Verificare che, per z→0 (oppure per R→+∞), E_z tende (in modulo) a $\sigma/2\varepsilon_0$, come si trova col teorema di Gauss per un piano indefinito, mentre per z grande rispetto ad R il campo tende a quello generato da una carica puntiforme $Q=\pi R^2\sigma$ posta in O.

2) Immagino ora P posto sul piano x,y del disco. Per la simmetria circolare, posso pensare P sull'asse x: P(x;0;0), senza perdere di generalità. Risulta dalle [7], [8], [9] e [10]:

[11] $$V(x;0;0) = k\sigma \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2rx\cos\varphi}}$$

[12] $E_y=E_z=0$ e $$E_x(x;0;0) = -\frac{\partial V}{\partial x} = k\sigma \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \frac{(x - r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(x^2 + r^2 - 2rx\cos\varphi)^3}}.$$

Si tratta di integrali ellittici, non calcolabili in modo elementare.

Posto $k\sigma=1$, $R=1$, trovo con un mio programma per calcolare integrali doppi:

x	0	±0,5	±1	±2	±3	±5	±9
V(x;0;0)	6,28	5,7	3,8	1,6	1,06	0,63	0,35
Ex(x;0;0)	0	±2	±5	±0,87	±0,36	±0,13	±0,04

(V è una funzione pari, E_x una funzione dispari).

Verificare che, per x molto grande rispetto ad R, il potenziale e il campo si riducono al caso di una carica puntiforme $Q=\pi R^2\sigma$ posta nel centro O del disco.

Verificare che nel centro del disco il campo è nullo e il potenziale è $\sigma R/2\varepsilon_0$.