

Ottavio Serra

CONICHE.

Introduzione.

In questo articolo, nella prima parte, dopo una rapida rassegna delle proprietà proiettive e affini delle coniche, mi rivolgerò alla determinazione delle loro proprietà metriche e della riduzione a forma canonica col metodo degli “invarianti”; nella seconda parte mi occuperò di alcune proprietà metriche, con particolare riguardo a fuochi e direttrici.

Parte prima

Premessa sul piano proiettivo.

Il piano proiettivo è l'insieme delle terne ordinate di numeri (reali o complessi) (x_1, x_2, x_3) non tutti nulli, detti punti. Due terne siffatte, (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) rappresentano lo stesso punto se $y_i = kx_i$ per $i=1,2,3$ ($k \neq 0$). Una retta del piano proiettivo è un'equazione lineare

$$[1] \quad \sum_{i=1}^3 u_i x_i = 0.$$

I tre numeri della terna (u_i) si chiamano coordinate pluckeriane di retta.

Valgono le proprietà: a) due punti distinti individuano una e una sola retta, e b) due rette distinte individuano uno e un sol punto: non esistono rette parallele.

Se dal piano proiettivo si elimina una retta, e sia $x_3 = 0$: (Retta impropria), le rette che prima si intersecavano su tale retta ora non hanno punti in comune: sono parallele. Si ottiene così il piano affine.

Le coniche nel piano proiettivo.

L'equazione di una conica C nel piano proiettivo è

$$[2] \quad a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0. \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

L'equazione di una conica C nel piano affine è invece

$$[3] \quad a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0. \quad (x = x_1/x_3 \text{ e } y = x_2/x_3, \text{ per } x_3 \neq 0).$$

Alla conica C si possono associare tre invarianti: la matrice completa A , la matrice della forma quadratica A_{33} e la *traccia* T di A_{33} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad T = a_{11} + a_{22}.$$

Il loro annullarsi ha un significato intrinseco. $A=0$ significa che la conica è degenera, e precisamente, se $\text{Rango}(A)=2$ C si spezza in due rette distinte, se $\text{Rango}(A)=1$ C si spezza in due rette coincidenti. (Queste sono proprietà proiettive).

$A_{33}=0$ significa che C è una parabola. (Questa è una proprietà affine).

$T=0$ significa che C è un'iperbole equilatera. (Questa è una proprietà metrica).

Nel seguito indicheremo con gli stessi simboli A e A_{33} il loro determinante.

La distinzione *affine* tra ellisse, iperbole e parabola si ottiene nel modo più rapido intersecando C con la retta impropria $x_3=0$. (Le coordinate affini x e y sono $x=x_1/x_3$ e $y=x_2/x_3$, per $x_3 \neq 0$). Si ricavano così i punti impropri di C , risolvendo il sistema:

$\{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, x_3 = 0\}$. Siccome l'ellisse è una curva limitata, non ha punti impropri reali, perciò il suo discriminante $-A_{33} < 0$ e quindi $A_{33} > 0$. L'iperbole ha due punti impropri reali (le direzioni degli asintoti) e perciò $A_{33} < 0$. La parabola è tangente alla retta impropria e perciò $A_{33} = 0$. (Il punto di tangenza è la direzione dei diametri).

Esempi di coniche che si spezzano in coppie di rette.

(a) Conica di equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

Matrice $A = \begin{pmatrix} 1, 2, -1 \\ 2, 4, -2 \\ -1, -2, 1 \end{pmatrix}$, $\text{Rango}(A) = 1$ e perciò, necessariamente, $A_{33} = 0$. La conica si spezza in una

retta contata due volte (ovviamente è di tipo parabolico) e precisamente in $(x + 2y - 1)^2 = 0$.

(b) Conica $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$.

Matrice $A = \begin{pmatrix} 1, 1, 2 \\ 1, 1, 2 \\ 2, 2, 3 \end{pmatrix}$, $\text{Rango}(A) = 2$, $A_{33} = 0$. Si tratta di una parabola degenera in una coppia di rette

parallele distinte. Esse sono del tipo $x + y + a = 0$, $x + y + b = 0$. Moltiplicandole e confrontando con i coefficienti della conica data, si trova $a = 1$, $b = 3$.

(c) Conica $x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = 0$.

Matrice $A = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, -2, 1 \\ \frac{1}{2}, 1, 0 \end{pmatrix}$. $A = 0$ con $\text{rango} = 2$, la conica è degenera in due rette; siccome $A_{33} = -9/4 < 0$,

la conica è di tipo iperbole (rette reali e distinte). Riducendo A in forma triangolare, si trova che il centro della conica (intersezione delle due rette) è $(x = -2/3, y = 1/3)$, perciò la conica si scrive $(x + 2/3)^2 + (x + 2/3)(y - 1/3) - 2(y - 1/3)^2 = 0$. Si ricordi che la traslazione fa sparire i termini di 1° grado, cioè l'equazione della conica assume la forma $\alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta = 0$. Risolvendo nell'incognita $z = \frac{x + 2/3}{y - 1/3}$, si ottiene l'equazione $z^2 + z - 2 = 0$, che dà $z = -2$, $z = 1$, perciò le due rette sono

$$x + 2y = 0 \text{ e } x - y - 1 = 0.$$

(d) Conica $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$.

Matrice $A = \begin{pmatrix} 1, 0, 2 \\ 0, 1, -1 \\ 2, -1, 5 \end{pmatrix}$. $\text{Rango}(A) = 2$ e siccome $A_{33} = 1 > 0$, la conica si spezza in due rette

immaginarie (conica di tipo ellittico). Le coordinate del centro sono $x = -2$ (1ª riga della matrice A) e $y = 1$ (2ª riga di A). Eseguendo la traslazione che porta l'origine degli assi nel centro, l'equazione si scrive $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Risolvendo nell'incognita $z = \frac{x + 2}{y - 1}$, si ottiene l'equazione $z^2 + 1 = 0$, da

cui $z = i$, $z = -i$. L'ellisse si spezza nelle rette $\frac{x + 2}{y - 1} = i$, $\frac{x + 2}{y - 1} = -i$, ovvero

$$x - iy + 2 + i = 0, \quad x + iy + 2 - i = 0.$$

Polarità rispetto a una conica.

Poniamo $F_1(x)=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$, $F_2(x)=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3$, $F_3(x)=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3$.

L'equazione della conica si scrive $F_1(x)x_1+F_2(x)x_2+F_3(x)x_3=0$.

Si chiama polare di un punto $P(y_1,y_2,y_3)$ rispetto alla conica la retta

$$[4] F_1(y)x_1+F_2(y)x_2+F_3(y)x_3=0.$$

Si noti che se P appartiene alla conica, la sua polare passa per P .

Il concetto di polarità permette di ridurre l'equazione di una conica a una notevole forma canonica proiettiva. Si assuma come punto $O_3(0,0,1)$ un punto qualsiasi del piano, purché non appartenente alla conica e la polare di O_3 come retta $x_3=0$; la [4] si riduce a $F_3(x)=0$, cioè $a_{31}x_1+a_{32}x_2=0$ (perché $x_3=0$) e siccome ciò deve valere per tutti gli x_1, x_2 , deve essere $a_{31}=a_{32}=0$.

Scelto poi su $x_3=0$ un punto qualsiasi, purché non appartenente alla conica, come punto $O_2(0,1,0)$, la sua polare sarà $a_{21}x_1+a_{22}x_2=0$ che passa per O_3 e perciò la possiamo assumere come retta $x_2=0$, pertanto $a_{21}=0$. Assumiamo infine come punto $O_1(1,0,0)$ l'intersezione di $x_3=0$ e $x_2=0$. La polare di O_1 è $a_{11}x_1=0$ e si vede che passa per O_3 e O_2 . Si è ottenuto un triangolo di riferimento "auto polare" in cui ogni lato è polare del vertice opposto. L'equazione della conica assume la forma canonica

$$[5] a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0. \text{ Nel riferimento auto polare la polare di } P(y_1,y_2,y_3) \text{ si scrive}$$

$$[6] a_{11}x_1y_1+a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3=0. \text{ La simmetria della [6] rispetto allo scambio delle } x \text{ con le } y \text{ esprime il cosiddetto teorema di reciprocità: se la polare di } P \text{ passa per } P', \text{ allora la polare di } P' \text{ passa per } P.$$

Punti interni e punti esterni a una conica non degenera. Rette tangenti.

Un punto non appartenente a una conica si dice interno se ogni retta per esso interseca la conica, esterno se non tutte le rette per esso intersecano la conica. Sia $P(y_1,y_2,y_3)$ un punto esterno, p la sua polare, $P'(x_1,x_2,x_3)$ un punto di p . Un punto generico Q della retta PP' ha coordinate

$$(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3).$$

Q apparterrà alla conica se λ/μ è tale che $a_{11}(\lambda x_1 + \mu y_1)^2 + a_{22}(\lambda x_2 + \mu y_2)^2 + a_{33}(\lambda x_3 + \mu y_3)^2 = 0$, ossia se

$$[7] \lambda^2(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2) + \mu^2(a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2) = 0. \text{ (perché } a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 = 0).$$

Quindi la retta PP' intersecherà la conica in due punti U e V , in corrispondenza dei due valori opposti di λ/μ . In particolare, se P' appartiene alla conica, $a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 = 0$ e quindi $\lambda^2 = 0$; i punti U e V coincidono in P' : la retta PP' è tangente alla conica. Siccome per il teorema di reciprocità la polare di P' passa per P , tale tangente è la polare di P' .

Si noti che la tangenza è una proprietà proiettiva.

Un esempio di calcolo di tangente.

Sia data la conica $x^2 + xy + y^2 + x - y - 6 = 0$. Si vuole la tangente in $P(1,2)$.

Siccome P sta sulla conica, la tangente richiesta è la polare di P :

$$(1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2})x + (\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 2 - \frac{1}{2})y + (\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 - 6) = 0, \text{ ossia } 5x + 4y - 13 = 0.$$

Un secondo esempio.

Sia data la conica $x^2 - 2xy + y^2 - 4x = 0$; si chiedono le tangenti da $P(0,1)$.

La polare p di P è $(-1-2)x + (0+1)y + (0) = 0$, cioè $y = 3x$. Le intersezioni con la conica sono $O(0,0)$ e $B(1,3)$ e le tangenti per P alla conica sono le rette PO e PB , rispettivamente $x=0$ e $y=2x+1$. Si noti che PO è la polare di O e PB è la polare di B , come deve essere. Che la retta $x=0$ (asse y) sia tangente alla conica in O si vede in modo immediato dall'equazione alla conica: come?

Proprietà affini: centro e diametri delle coniche non degeneri.

In tutto il seguito supporremo che i coefficienti a_{ik} siano reali.

Il centro di una conica è il polo della retta impropria $x_3=0$. Se la conica è una parabola, la retta impropria è tangente e il polo è il punto di contatto: il centro è improprio; per le ellissi e le iperboli il centro è un punto proprio (coniche a centro). Diametri sono le rette per il centro (nel caso delle parabole i diametri sono paralleli). Per il teorema di reciprocità, siccome un diametro passa per il polo della retta impropria, il suo polo sta sulla retta impropria.

Il centro si determina facendo sistema tra le equazioni delle polari di due (qualsiasi) punti impropri, per esempio (1,0,0) e (0,1,0).

Centro $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$. Nel caso di una parabola questo sistema è incompatibile, perché il

centro è improprio; siccome la parte quadratica della parabola si scrive $(\alpha x + \beta y)^2$, il centro è il punto $(\alpha, \beta, 0)$.

Per una conica a centro il centro è centro di simmetria, ogni diametro taglia la conica in punti simmetrici rispetto al centro.

Due diametri di una conica a centro si dicono **coniugati**, se ciascuno passa per il polo dell'altro. Sia (1,m,0) il punto improprio di un diametro; la sua polare è $(a_{11} + a_{12}m)x + (a_{12} + a_{22}m)y + (a_{13} + a_{23}m) = 0$ e

il suo punto improprio è (1,m',0) con $m' = -\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{12} + a_{22}m}$, ovvero

[8] $a_{22}mm' + a_{12}(m+m') + a_{11} = 0$. (Relazione tra le direzioni di due diametri coniugati).

Risulta che un diametro biseca le corde della conica parallele al diametro coniugato

PROPRIETA' METRICHE.

Le coniche a centro si possono ridurre all'equazione canonica $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $\varepsilon = 1$ o -1 secondo

che si tratti di ellissi o iperbole. Distanza focale (distanza di un fuoco dal centro) $c = \sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}$, eccentricità $e = c/a$. Le direttrici sono le polari dei fuochi. Sia $F(c,0) = (ea,0)$ un fuoco; l'equazione della sua direttrice è $x = a/e$. Verificare che per ogni punto P della conica (a centro) il rapporto tra la distanza di P da F e dalla direttrice è uguale all'eccentricità e. Assi sono la coppia dei diametri coniugati ortogonali. Essi sono assi di simmetria ortogonale. Le direzioni degli assi si ottengono dalla [8] ponendo $m' = -1/m$. Si ricava

[9] $a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$.

Vertici sono le intersezioni degli assi con l'ellisse o l'iperbole (per l'iperbole un solo asse è trasverso).

Per la parabola l'equazione canonica è $y^2 = 2px$; il parametro p è la distanza fuoco direttrice. Fuoco $(p/2,0)$ direttrice: $x = -p/2$. Il parametro p è anche la semicorda che la parabola intercetta sulla perpendicolare per il fuoco all'asse di simmetria ($y=0$). L'asse della parabola è il diametro di simmetria ortogonale e si determina come polare della direzione (punto improprio) ortogonale alla direzione dei diametri. La sua intersezione con la parabola si chiama vertice; in tale punto la tangente è perpendicolare all'asse.

I parametri a e b delle coniche a centro, p della parabola, si possono trovare facilmente col metodo degli "invarianti".

Le quantità A, A_{33} e T non cambiano se si assoggetta la conica a una isometria, eventualmente seguita da una simmetria assiale (isometria indiretta):

$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + \alpha \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + \beta \end{cases}$. I coefficienti a_{ik} si mutano in a'_{ik} dipendenti linearmente dai primi e

risulta $A' = A$, $A'_{33} = A_{33}$, $T' = T$, sono perciò **invarianti**. Se però moltiplichiamo tutti i coefficienti a'_{ik} per un fattore k (diverso da zero), A' viene moltiplicato per k^3 , A'_{33} per k^2 e T' per k. In questo

senso sono invarianti relativi. Sono invece **invarianti assoluti** $\frac{A}{T^3} = \frac{A'}{T'^2}$ e $\frac{A_{33}}{T^2} = \frac{A'_{33}}{T'^2}$, che non

variano affatto passando da un'equazione della conica a un'equazione equivalente.

Supponiamo ora che l'equazione trasformata sia una delle forme canoniche,

$a'_{11}=1/a^2$, $a'_{22}=\varepsilon/b^2$ e $a'_{33}=-1$ nel caso di conica a centro, $a'_{22}=1$, $a'_{13}=-p$ nel caso della parabola, essendo nulli tutti gli altri coefficienti a'_{ik} .

Nel caso delle coniche a centro, posto per comodità $1/a^2=u$, $\varepsilon/b^2=v$, sarà $A'=-uv$, $A'_{33}=uv$, $T'=u+v$.

Perciò $\frac{A}{T^3} = \frac{-uv}{(u+v)^3}$, $\frac{A_{33}}{T^2} = \frac{uv}{(u+v)^2}$ e infine $u+v = \frac{-TA_{33}}{A}$, $uv = \frac{A_{33}^3}{A^2}$. I coefficienti u e v sono

pertanto soluzioni dell'equazione

$$[10] \quad A^2 z^2 + TA \cdot A_{33} z + A_{33}^3 = 0.$$

Nel caso della parabola si ha $A'=-p^2$, $A'_{33}=0$, $T'=1$, perciò $p^2 = -A/T^3$ da cui $p = \sqrt{\frac{-A}{T^3}}$.

Esempi.

(1) Conica $3x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$. $A = \begin{pmatrix} 3, -1, -1 \\ -1, 1, 0 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix} = -1$, $A_{33} = 2$, $T = 4$, per cui $z^2 - 8z + 8 = 0$. Segue

$u = 4 + 2\sqrt{2}$, $v = 4 - 2\sqrt{2}$ e i semiassi $a = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$. Si tratta di un'ellisse ($A_{33} > 0$).

Trovare l'eccentricità, il centro e la direzione degli assi nel riferimento originale.

(Centro $(1/2, 1/2)$, coefficienti angolari degli assi Vedi la [9] $m = 1 \pm \sqrt{2}$).

(2) Conica $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 4y = 0$. Si tratta di una parabola ($A_{33} = 0$), $A = -3$, $T = 6$.

$$p = \sqrt{\frac{3}{6^3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Trovare per esercizio l'asse e il vertice nel riferimento originale.

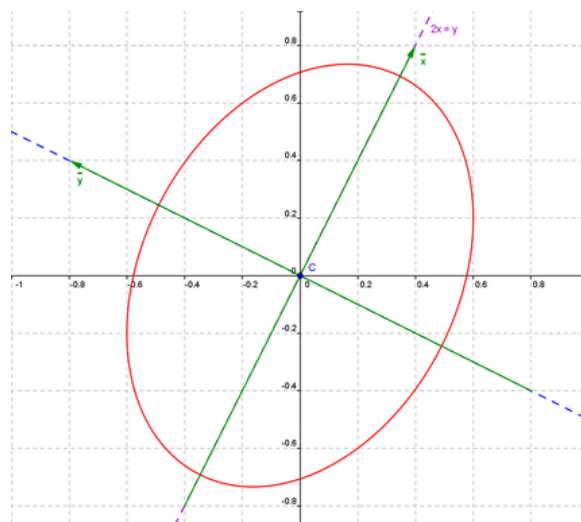
(asse: $y = x + 1/2$, vertice $V(-5/8, -1/8)$).

(3) Conica $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 3 = 0$. E' una ellisse; risulta $A = -150$, $A_{33} = 50$, $T = 16$. La [10] fornisce

$z^2 - 6z + 50/9 = 0$ le cui soluzioni sono $5/3$ e $10/3$. I semiassi sono perciò $a = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $b = \sqrt{\frac{3}{10}}$. Si noti

che il centro è l'origine O . Detta c la distanza focale Centro-Fuoco si trovi c e l'eccentricità e . Si determini infine la direzione degli assi nel sistema di riferimento originale.

($c = b = \sqrt{\frac{3}{10}}$, $e = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Gli assi sono $y = 2x$, $y = -\frac{1}{2}x$).

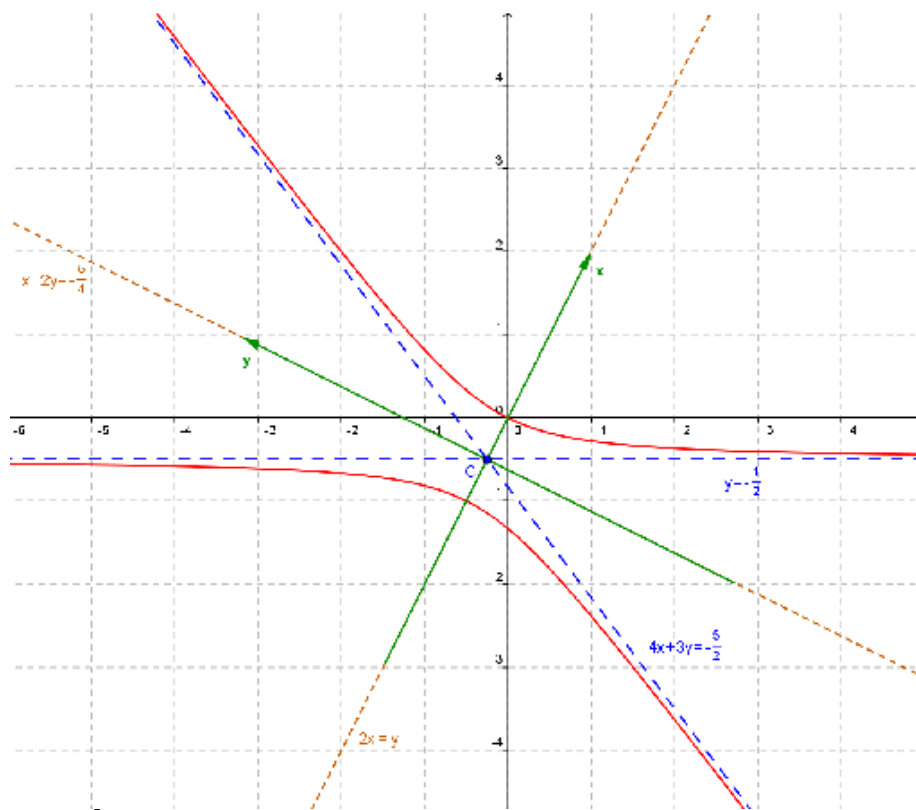


(4) Conica $4xy+3y^2+2x+4y=0$. Si tratta di un'iperbole. $A=5$, $A_{33}=-4$, $T=3$. L'equazione canonica è

$$\frac{x^2}{5/16} - \frac{y^2}{5/4} = 1.$$

La distanza focale è $5/4$, l'eccentricità è $\sqrt{5}$. L'equazione [9] ci dà la direzione degli assi nel sistema di riferimento originale: $2m^2-3m-2=0$, da cui $m=2$, $m=-1/2$. Il centro è $(-1/4, -1/2)$.

L'asse trasverso è $y=2x$ e i vertici sono $(0,0)$ e $(-1/2, -1)$. Le direzioni degli asintoti si ottengono fattorizzando il complesso dei termini quadratici $4xy+3y^2=0$, da cui $(1,0,0)$ e $(3,-4,0)$.

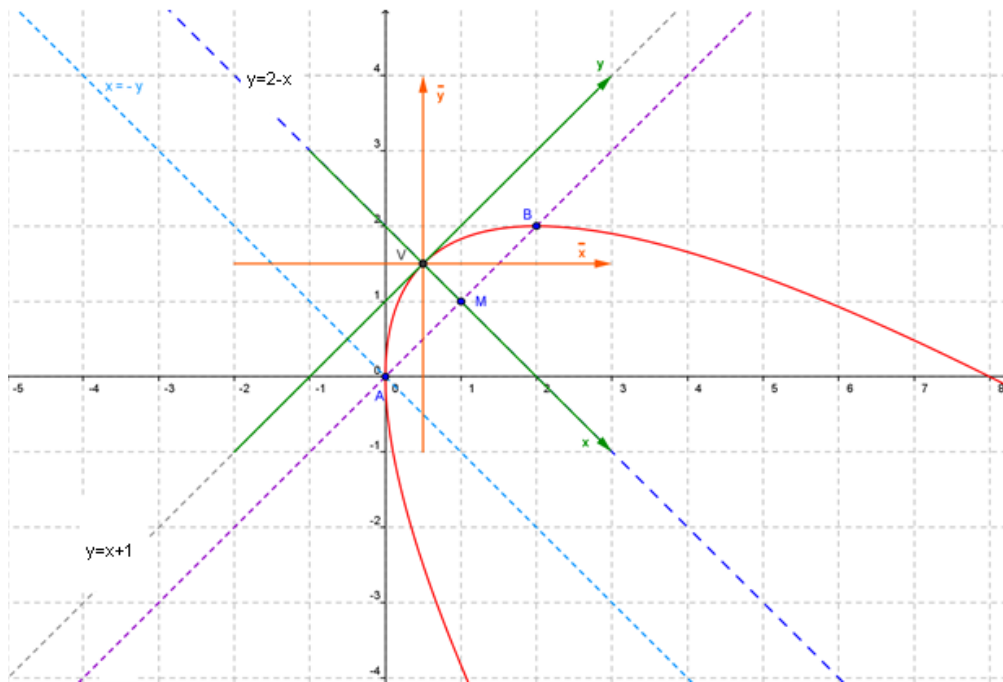


(5) Conica $x^2+2xy+y^2-8x=0$. Si tratta di una parabola ($A_{33}=0$).

$$A = \begin{pmatrix} 1, 1, -4 \\ 1, 1, 0 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix} = -16, T=2. \text{ Il parametro } p = \sqrt{\frac{-A}{T^3}} = \sqrt{\frac{16}{8}} = \sqrt{2}.$$

Il punto improprio dei diametri è $(1,-1,0)$, l'asse è la polare del punto improprio ortogonale $(1,1,0)$: $(1+1)x+(1+1)y+(-4)=0$, ovvero $x+y-2=0$.

Il disegno della parabola è nella pagina seguente.



Altri esercizi.

(I) Per ognuna delle coniche seguenti, dire se sono degeneri o non degeneri e stabilire il tipo di conica (iperbole, ellisse, parabola):

1) $-2x^2 + y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$; (iperbole non degenera).

2) $3x^2 - 5xy - 2y^2 - x + 9y - 4 = 0$;

(due rette incidenti di equazioni $3x + y - 4 = 0$ e $x - 2y + 1 = 0$).

3) $x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x + 6 = 0$; (ellisse immaginaria non degenera).

4) $2x^2 + 2xy - 5x - 3y + 3 = 0$; (due rette incidenti $2x - 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$).

5) $2x^2 - 2y^2 + 3x + 4y + 7 = 0$; (iperbole non degenera).

(II) Trovare il centro delle coniche a centro dell'esercizio precedente.

1) $C(3/4, 2)$; 2) $C(1, 1)$; 3) $C(20/11, 6/11)$; 4) $C(3/2, -1/2)$; 5) $C(-3/4, 1)$.

(III) Utilizzando gli invarianti, determinare la forma canonica delle coniche reali non degeneri dell'esercizio **(I)**

1) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, con $a^2 = 15/8$, $b^2 = 15/16$.

5) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, con $a^2 = b^2 = 63/16$.

(IV) Trovare i punti impropri delle coniche dell'esercizio **(I)**. Nel caso in cui si abbiano iperboli, determinarne anche gli asintoti.

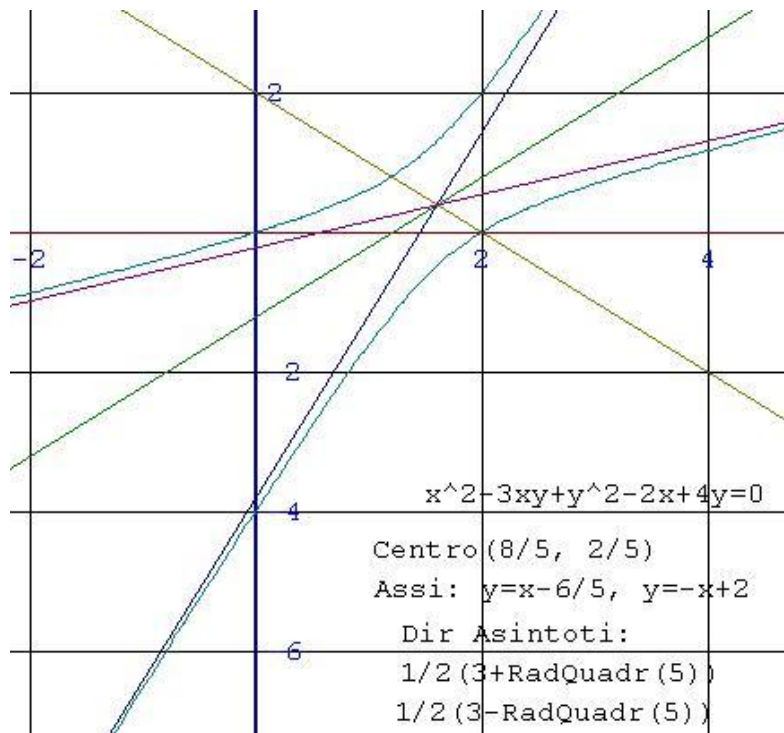
(V) Studiare la conica $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 12\sqrt{2}x + 60\sqrt{2}y + 72 = 0$.

Equazione canonica: $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Assi: $x - y - 2\sqrt{2} = 0$, $x + y + 3\sqrt{2} = 0$.

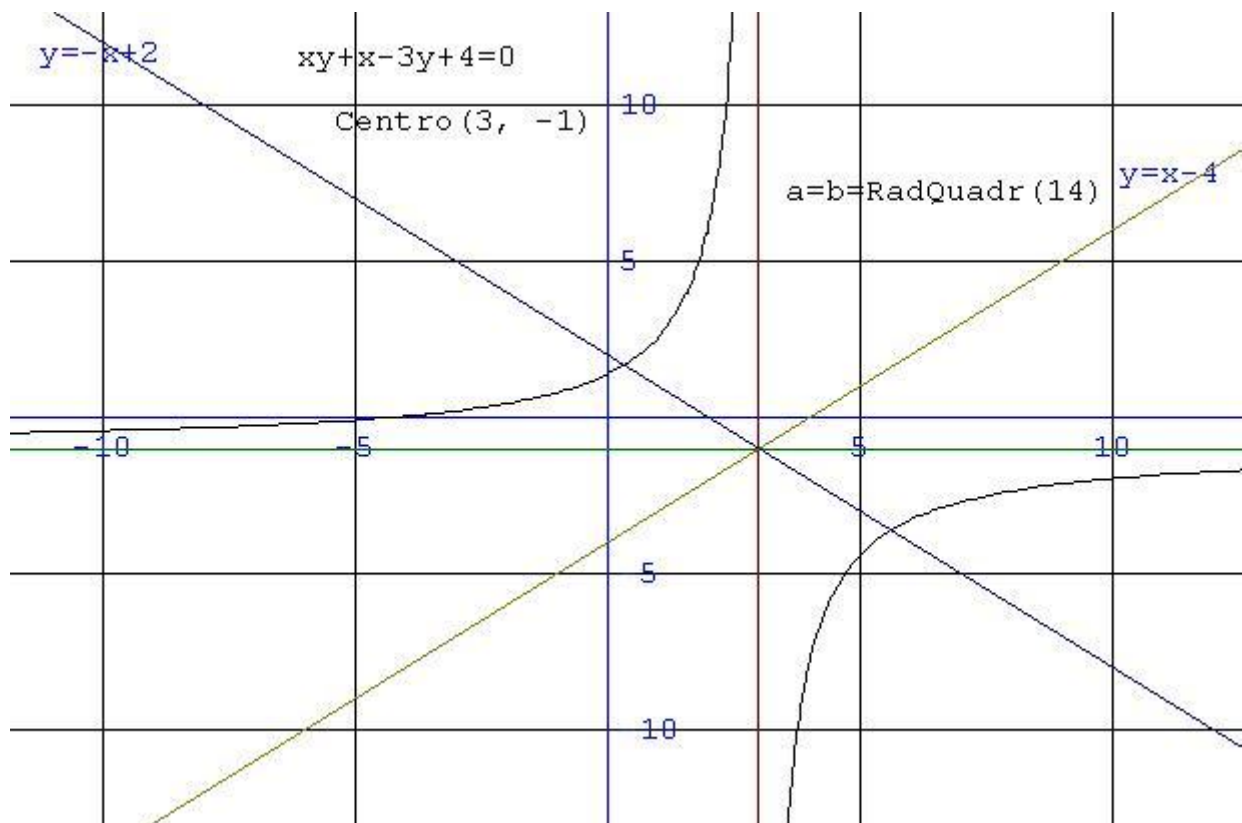
(VI) Conica $x^2 - 3xy + y^2 - 2x + 4y = 0$.

Equazione canonica $(25/8)x^2 - (5/8)y^2 = 1$.

Tutti i dati sono riportati nel disegno sottostante.



(VII) Conica $xy + x - 3y + 4 = 0$. Iperbole equilatera $x^2/14 - y^2/14 = 0$. (Vedi disegno sottostante).



Parte seconda

Alcune proprietà metriche delle coniche

a) Ellisse.

Ricordo che due diametri di una conica a centro si dicono coniugati se ciascuno ha per polo il punto improprio dell'altro (Vedi l'articolo "coniche"). Le direzioni m ed m' di due diametri coniugati soddisfano l'equazione $a_{22}mm' + a_{12}(m+m') + a_{11} = 0$. Nel caso dell'ellisse, scritta in forma canonica: $b^2x^2 + a^2y^2 - b^2a^2 = 0$, la precedente relazione si scrive: $a^2mm' + b^2 = 0$. Considero ora un punto P dell'ellisse di coordinate $(acost, bsent)$ e il diametro OP di coefficiente angolare $m = bsent/acost$; il

diametro coniugato ha coefficiente angolare $m' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{acost}{bsent} = -\frac{bcost}{asent}$ e interseca la conica in due

punti dei quali scegliamo $Q(-asent, bcost)$. OP e OQ sono due semidiametri *coniugati* che godono della seguente proprietà:

$$[1] \quad OP^2 + OQ^2 = a^2 + b^2,$$

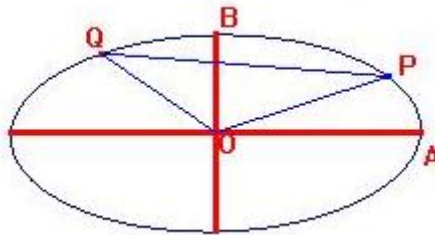
cioè la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati è costante ed uguaglia la somma dei quadrati dei semiassi (che sono una coppia particolare: la coppia dei diametri coniugati ortogonali).

La [1] va sotto il nome di primo teorema di Apollonio.

Una seconda proprietà dell'ellisse riguarda l'area del triangolo OPQ . Risulta

$$[2] \quad S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0, 0, 1 \\ acost, bsent, 1 \\ -asent, bcost, 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (abc \cos^2 t + absen^2 t) = \frac{ab}{2} : \text{due semidiametri coniugati individuano un}$$

triangolo di area costante e uguale all'area del triangolo rettangolo determinato dai semiassi. La [2] va sotto il nome di secondo teorema di Apollonio.



b) Iperbole.

Per l'iperbole non valgono teoremi analoghi, perché di due diametri coniugati uno è trasverso e l'altro non trasverso. Vale però un teorema di invarianza rispetto a una tangente.

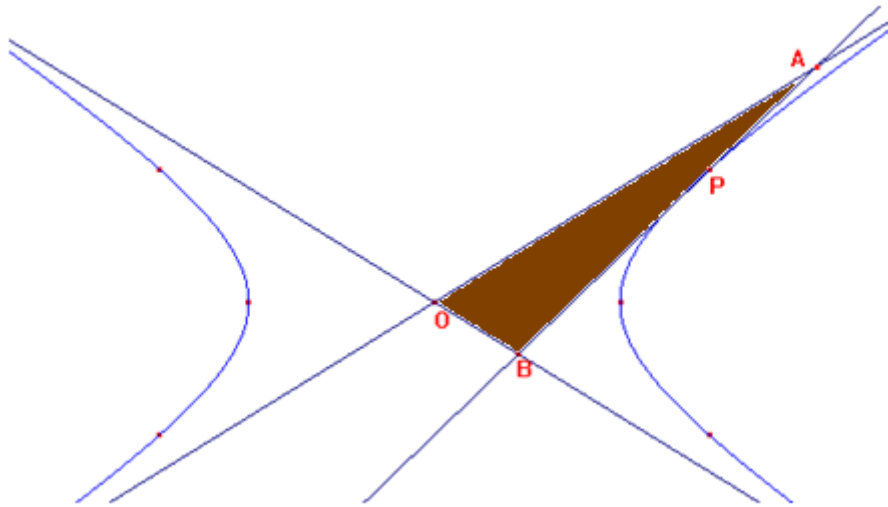
Si consideri un'iperbole in forma canonica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, un suo punto $P(x_0, y_0)$ e la tangente t in P : $xx_0/a^2 - yy_0/b^2 = 1$ (ricordo che la tangente in un punto di una conica è la polare del punto).

Determino ora le intersezioni A e B di t con gli asintoti $y = bx/a$ e $y = -bx/a$. Si trova

$$A \left(\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \right), \quad B \left(\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}, \frac{-ab^2}{bx_0 + ay_0} \right). \text{ Considero ora l'area } S \text{ del triangolo } OAB:$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0,0,1 \\ \frac{a^2b}{bx_0+ay_0}, \frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}, 1 \\ \frac{a^2b}{bx_0-ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}, 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^3b^3}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} + \frac{a^3b^3}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \right) = \frac{a^3b^3}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \text{ e infine}$$

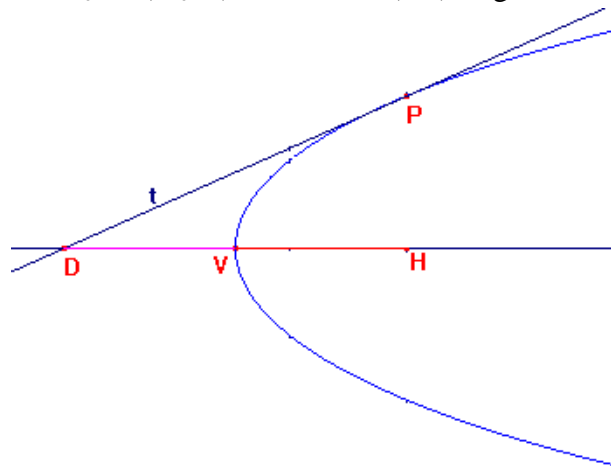
[3] $S = \frac{a^3b^3}{a^2b^2} = ab$, perché (x_0, y_0) è un punto dell'iperbole. La [3] ci dice che al variare della tangente l'area del triangolo limitato dalla tangente e dagli asintoti resta costante ed uguale al prodotto dei semiassi, trasverso e non trasverso.



c) Parabola.

Per la parabola vale la proprietà: Sia P un punto, t la tangente in P, D l'intersezione di t con l'asse della parabola, H la proiezione ortogonale di P sullo stesso asse; il segmento HD ha il vertice V come punto medio.

Sia $y^2=2px$ l'equazione della parabola la tangente nel suo punto $P(x_0, y_0)$ è $2y_0 \cdot y = p(x+x_0)$, $H(x_0, 0)$ e D (di ordinata 0) ha ascissa $-x_0$: $D(-x_0, 0)$. Siccome $V(0,0)$, segue la tesi.



Fuochi e direttrici.

Se dai punti *ciclici* $C_1(1, i, 0)$ e $C_2(1, -i, 0)$ si conducono le tangenti a una conica, queste si intersecano in quattro punti, due reali e due complessi coniugati, detti **fuochi**.

Siccome le tangenti condotte da un punto a una conica sono rette doppie nell'involuzione delle rette per quel punto coniugate rispetto alla conica e siccome nel caso presente queste tangenti partono dai punti ciclici, i fuochi sono i punti del piano tali che le coppie di rette per essi coniugate rispetto alla conica sono ortogonali.

Nel caso del cerchio, che passa per i punti ciclici, e della parabola, che è tangente alla retta impropria (che contiene i punti ciclici), il fuoco (reale) è uno solo e nel caso del cerchio coincide col centro.

Vediamo questi casi particolari

Parabola $y^2=2px$. Trovo la tangente t_1 per $C_1(1, i, 0)$.

Le rette per C_1 sono $y=ix+q$, da cui facendo sistema, $(ix+q)^2=2px$; $-x^2+2qix+q^2=2px$ e ho: $x^2+2(p-iq)x-q^2=0$. Annullando il discriminante, $(p-iq)^2+q^2=0 \rightarrow p^2-2ipq=0 \rightarrow q=-pi/2$.

L'equazione di t_1 è $y=ix-ip/2$.

Analogamente la tangente t_2 per C_2 è $y=-ix+ip/2$ e l'intersezione è $F(p/2, 0)$, come è noto per via elementare.

Verifico per esercizio che due rette per F , coniugate rispetto alla parabola, sono ortogonali. Siano $r: y=m(x-p/2)$ ed $r': y=m'(x-p/2)$ due rette per F . Esse sono coniugate se una contiene il polo dell'altra. Sia $R(h, k)$ il polo di r ; ciò significa che la polare di R è $r: -px+ky-ph=0 \rightarrow y=(p/k)x+ph/k$ e quindi $p/k=m$, $ph/k=-mp/2$, da cui $k=p/m$ e $h=-(p/m) \cdot (m/2) = -p/2$. Dunque $R(-p/2, p/m)$; imponendo che R stia su r' , ho: $p/m = m'(-p/2-p/2) = -pm' \rightarrow m \cdot m' = -1$, cdv.

Cerchio $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Siccome i cerchi passano per i punti ciclici, le tangenti per essi sono le polari. Polare di $C_1(1, i, 0)$. $x+iy+(a/2+bi/2)=0$. $t_1: y=ix-(1/2)(b-ia)$.

Polare di $C_2(1, -i, 0)$. $x-iy+(a/2-ib/2)=0$. $t_2: y=-ix-(1/2)(b+ia)$. Sottraendo membro a membro ho: $2ix+ia=0 \rightarrow x=-a/2$ poi $y=-b/2$: $F(-a/2, -b/2)$ coincidente col centro del cerchio.

Verifico che, come deve essere in generale, rette per il fuoco (per il centro del cerchio), coniugate rispetto al cerchio, sono ortogonali. Uso l'equazione canonica $x^2+y^2=r^2$. Sia $y=mx$ una retta r per il centro. La polare del suo punto improprio $(1, m, 0)$ è $1 \cdot x + m \cdot y = 0$, dunque la coniugata di r è r' di equazione $y=-(1/m)x$ ortogonale ad r , cdv.

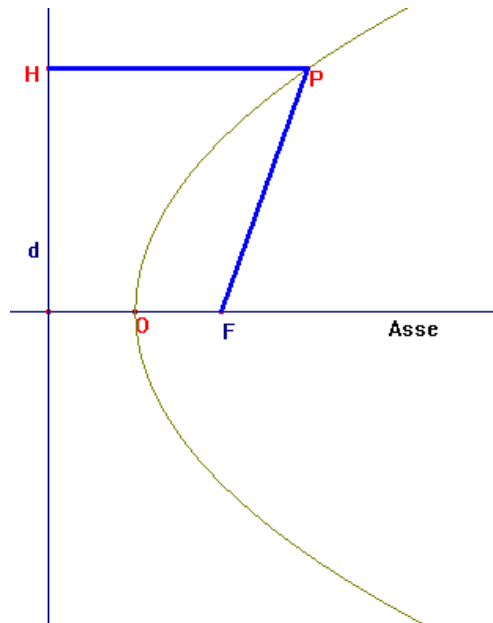
Coniche a centro. Per esse assumiamo l'esistenza dei fuochi dalla teoria elementare, che consente

di ricavare le equazioni canoniche $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\varepsilon=1$ per l'ellissi, $\varepsilon=-1$ per l'iperbole, a semiasse

focale, b semiasse (minore per l'ellissi, non trasverso per l'iperbole). $b = \sqrt{\varepsilon(a^2 - c^2)}$, essendo $(c, 0)$, $(-c, 0)$ i due fuochi.

Direttrici. Sono le polari dei fuochi. Le coniche a centro ne hanno due (reali), la parabola una. La direttrice del cerchio è chiaramente la retta impropria.

Direttrice della parabola. Scritta questa in forma canonica $y^2=2px$, la polare del fuoco $F(p/2, 0)$ è $-px+0y-p \cdot p/2=0 \rightarrow x=-p/2$ (direttrice). Si verifichi che per ogni punto P della parabola, $PF=PH$. (Le distanze di P dal fuoco e dalla direttrice sono uguali). (Vedi figura seguente).



Direttrici delle coniche a centro.

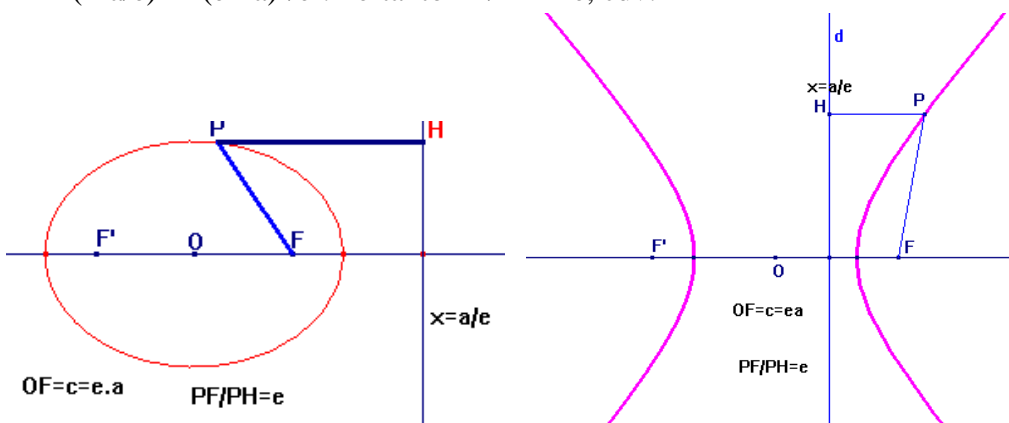
Tratto insieme ellisse e iperbole: $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$. Posto $e=c/a$ (**eccentricità** della conica), l'equazione

della conica si può scrivere: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \Leftrightarrow y^2 = (1-e^2)(a^2 - x^2)$.

Considero il fuoco $F(c, 0) = (ea, 0)$: la sua direttrice (la sua polare) è $(1-e^2)eax - (1-e^2)a^2 = 0 \rightarrow x=a/e$.
L'equazione della direttrice relativa al fuoco $(ea, 0)$ è dunque $x=a/e$.

Verifico ora che il rapporto delle distanze di un punto generico $P(x,y)$ di una conica a centro da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante ed uguale all'eccentricità e .

$PF^2 = (x-ea)^2 + y^2 = (x-ea)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2) = x^2 - 2eax + e^2a^2 + a^2 - x^2 - e^2a^2 + e^2x^2 = (ex-a)^2$; analogamente
 $PH^2 = (x-a/e)^2 = (ex-a)^2/e^2$. Pertanto $PF/PH = e$, cdv.

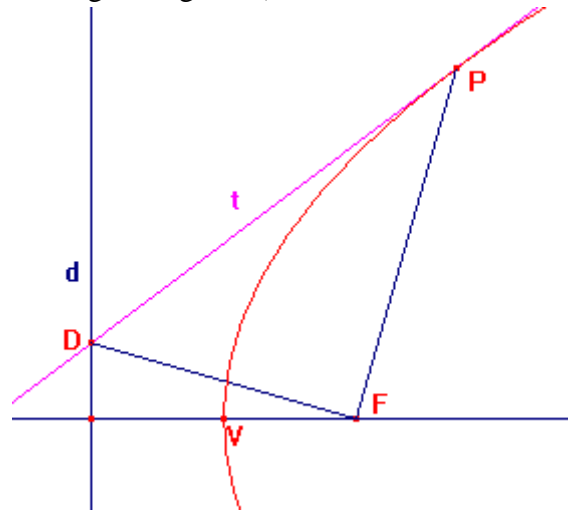


Proprietà focali.

Parabola. Il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto P e l'intersezione D con la direttrice è visto dal fuoco F sotto angolo retto.

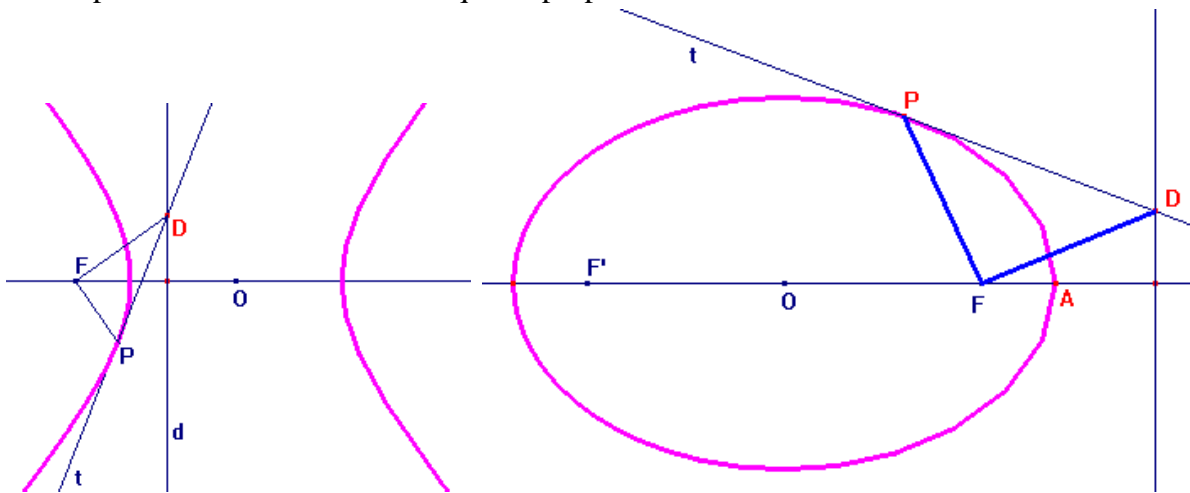
Sia $y^2=2px$ l'equazione della parabola $F(p/2, 0)$ il fuoco, $P(x_0, y_0)$ un suo punto. La tangente in P ha equazione $y_0y=p(x_0+x)$. Il punto D ha ascissa $x = -p/2$, perciò la sua ordinata è $y = p(x_0-p/2)/y_0$, per

cui si ha: $m = m_{FD} = p(x_0 - p/2)/y_0 / (-p/2 - p/2) = -(x_0 - p/2)/y_0$, mentre $m' = m_{FP} = y_0 / (x_0 - p/2) = -1/m$, come dovevasi verificare. (Vedi figura seguente).



Coniche a centro.

Anche per le coniche a centro vale questa proprietà: $\mathbf{PFD=90^\circ}$.



L'equazione della conica è $(1-e^2)x^2 + y^2 = (1-e^2)a^2$, $F(ea, 0)$, direttrice: $x=a/e$.

La tangente t in $P(x_0, y_0)$ è $(1-e^2)x_0x + y_0y = (1-e^2)a^2$, per cui D ha coordinate

$$x = \frac{a}{e}, y = \frac{a(1-e^2)(ea-x_0)}{ey_0}. \quad \text{Segue che } m = m_{FP} = \frac{y_0}{x_0 - ea}, m' = m_{FD} = \frac{\frac{a(1-e^2)(ea-x_0)}{ey_0}}{\frac{a}{e} - ea} \quad e$$

$$\text{semplificando: } m' = \frac{\frac{a(1-e^2)(ea-x_0)}{ey_0}}{\frac{a}{e} - ea} = \frac{a(1-e^2)(ea-x_0)}{ey_0} \frac{e}{a(1-e^2)} = \frac{ea-x_0}{y_0} = -\frac{1}{m}, \text{ cdv.}$$

Per le coniche a centro vale questa ulteriore proprietà: si consideri la tangente nel punto generico $P(x_0, y_0)$ della conica, la tangente t in P e le intersezioni S e T di t con le tangenti alla conica nei vertici dell'asse focale; il segmento ST è visto da ciascun fuoco sotto angolo retto. Infatti, le tangenti nei vertici *principali* A e A' sono $x=a$, $x=-a$; la tangente t in P :

$(1-e^2)x_0x+y_0y=(1-e^2)a^2$ interseca la tangente $x=a$ in $S = \left(a, \frac{a(1-e^2)(a-x_0)}{y_0} \right)$ e la tangente $x=-a$ in

$$T = \left(-a, \frac{a(1-e^2)(a+x_0)}{y_0} \right).$$

I coefficienti angolari m ed m' di FS ed FT sono:

$$m = \frac{a(1-e^2)(a-x_0)}{y_0(a-ea)} = \frac{(1+e)(a-x_0)}{y_0} \text{ ed } m' = \frac{(1-e)(a+x_0)}{-y_0} \text{ e il loro prodotto}$$

$$mm' = \frac{(1-e^2)(a^2-x_0^2)}{-y_0^2} = -1, \text{ (perché...), come affermato (vedi figure seguenti).}$$

