Ottavio Serra

Baricentri

Baricentro geometrico di un triangolo. (Alla lettera, baricentro significa *centro del peso*. Vedremo tra poco il perché di questo nome). La dimostrazione seguente risale a Euclide.

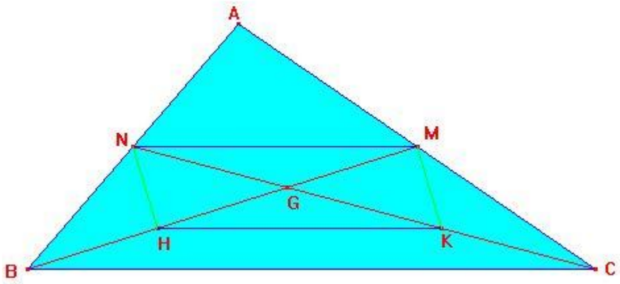

FIG.1

Considero le mediane BM e CN che si intersecano in G (Fig.1). I triangoli ANM e ABC sono simili (2° criterio) e perciò MN è parallela e metà di BC. Presi poi i punti medi H e K dei segmenti GB e GC del triangolo GBC, per lo stesso motivo HK risulta parallela a BC e pari alla sua metà. Perciò il quadrilatero NMKH, avendo due lati opposti uguali e paralleli, è un parallelogrammo e le diagonali HM e KN si bisecano (in G). Si conclude che BH, HG e GM sono uguali e pertanto GM è 1/3 dell'intera mediana BM. Analogamente GN è 1/3 di CN. Segue che la terza mediana (quella che parte da A) deve passare per G. Infatti, detto J il punto in cui la mediana uscente da A interseca BM, dovrà essere MJ =1/3 di MB; ma anche MG=1/3 di MB, dunque J=G.
Inoltre abbiamo il bel risultato che il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, una (quella verso il vertice) doppia dell'altra.
Il baricentro in meccanica. A rigore, si deve parlare di *centro di massa*, ma noi lo chiameremo baricentro. Se un sistema è costituito di N particelle, diremo baricentro (centro di massa) il punto in cui è concentrata tutta la massa del sistema e che ha quantità di moto uguale a quella del sistema. La sua posizione sarà perciò data dal vettore

[1] $\vec{R}_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$**,** con ovvio significato dei simboli.

I vettori avranno componenti (x; y; z) nello spazio, (x; y) nel piano, (x) su una retta.
Casi particolari.
1° Baricentro di due punti materiali: $(m_1+m_2)x_c = m_1x_1+m_2x_2$. Poniamo $x_1=0$, $x_2=d$, $x_c=d_1$, $d-d_1=d_2$.
Verificare che il baricentro delle due particelle divide la loro distanza d in parti inversamente proporzionali alle due masse: $d_1/d_2 = m_2/m_1$. In particolare, se le masse sono uguali, il baricentro è il punto medio della loro congiungente.
Il risultato vale più in generale nel caso seguente: se un sistema S è diviso in due parti S_1 ed S_2 di masse m_1 ed m_2 e baricentri G_1 e G_2, allora il baricentro G di S divide il segmento G_1G_2 in parti inversamente proporzionali alle masse m_1 ed m_2.
2° Baricentro di un segmento omogeneo: è il punto medio del segmento. Immaginare una semplice dimostrazione.

3° Se una figura piana omogenea ha un asse di simmetria, il baricentro sta su tale asse; se ne ha due, il baricentro è la loro intersezione.
4° Se una figura ha un centro di simmetria, questo è il baricentro.
5° Se un solido omogeneo ha un piano di simmetria, il baricentro sta sudi esso, eccetera.
Esercizio. Immaginare un esperimento per determinare il baricentro di un cartoncino omogeneo piatto dal contorno irregolare.
Vediamo ora perché il baricentro del triangolo ABC, pensato come una lamina (omogenea), deve stare sulle mediane e quindi deve coincidere col baricentro geometrico.

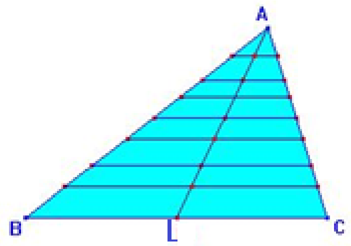

Fig.2

Infatti, se "*affettiamo*" il triangolo ABC in strisce parallele al lato BC, abbastanza strette da assimilarle a segmenti (a "*bastoncini*"), ciascuna di essi avrà il baricentro nel suo punto medio e quindi il triangolo avrà il baricentro sulla medina AL. Affettando il triangolo parallelamente a un altro lato, il baricentro sarà sulla corrispondente mediana e il baricentro G sarà nell'intersezione delle due mediane; siccome, però, il centro del peso è unico, anche la terza mediana deve passare per G. Una dimostrazione geometrica rigorosa è stata data all'inizio.
Che il luogo dei punti medi delle corde parallele al lato BC è la mediana relativa a questo lato si dimostra come segue: Sia HK una corda parallela a BC (Fig.3), T l'intersezione con la mediana AL. I triangoli AHT e ABL sono simili e perciò HT/BL = AH/AB; anche i triangoli AHK e ABC sono simili e AH/AB = HK/BC; segue HT/BL = HK/BC; quindi HT/HK = BL/BC e siccome BL=BC/2, anche HT=HK/2: T è punto medio di HK.

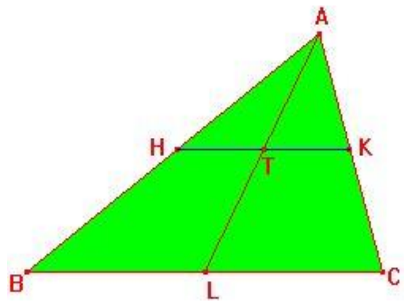

Fig.3

Il baricentro di tre masse uguali poste ai vertici di un triangolo è ancora il baricentro geometrico G. Intatti, il baricentro delle due masse poste in B e in C è il punto medio L. Qui possiamo immaginare concentrata una massa 2m; il baricentro delle tre masse poste in A, B, C coinciderà col punto Z baricentro della massa 2m in L e della massa m in A; AZ e ZL saranno perciò inversamente proporzionali ad m e a 2m, cioè AZ=2ZL, ovvero ZL=AL/3: Z coincide con G. (Vedi Fig.4)

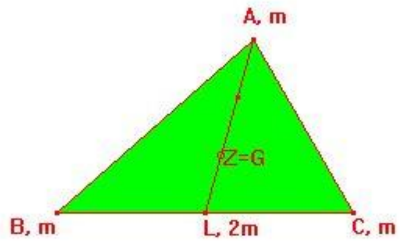

Fig.4

E il baricentro di un filo metallico piegato a forma di triangolo?

E' ancora il baricentro geometrico G, purché ciascun lato sia omogeneo e ognuno abbia massa m.

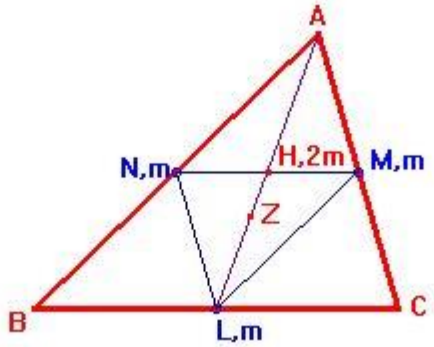

Fig.5

Infatti (vedi Fig.5) i lati AB e AC hanno i rispettivi baricentri nei loro punti medi N ed M e il loro baricentro è H, con massa 2m. Il baricentro del sistema è Z, con LZ=2/3LH=2/3.LA/2=LA/3 e quindi Z cade in G.

Se il filo metallico precedente è omogeneo, le masse dei lati sono proporzionali alle loro lunghezze e, se AB e AC sono disuguali, il baricentro delle loro masse non sta nel punto medio H di NM e quindi non sta sulla mediana AL.

Per i quadrilateri <u>non è più vero</u> che il baricentro di quattro masse uguali poste nei vertici coincida col baricentro della corrispondente lamina omogenea.

Faremo la dimostrazione su un trapezio isoscele di basi 2a e 2b (a>b) e altezza h. Scegliendo un opportuno riferimento cartesiano, il trapezio avrà vertici O(0; 0), A(a-b; h), B(a+b; h), C(2a; 0), (Vedi Fig.6). In O, A, B, C siano poste quattro masse uguali. Il baricentro di A e B starà nel punto medio H di AB, quello di O e C starà nel punto medio K di OC e siccome in H e K sono concentrate masse uguali a 2m, il baricentro delle quattro masse è il punto medio (a; h/2) di HK.

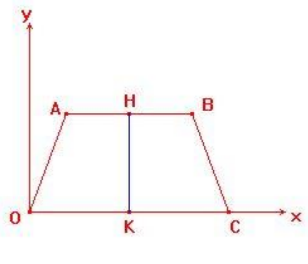

Fig.6

Se invece consideriamo la lamina omogenea OABC, il baricentro starà ancora su HK, che è asse di simmetria, di equazione x=a, ma l'ordinata non sarà in generale h/2. Infatti, possiamo immaginare il trapezio OABC come differenza del triangolo OEC e del triangolo AEB (Vedi Fig.7). L'ordinata y_2 del baricentro G_2 del triangolo OEC è la media pesata di y_1, ordinata del baricentro G_1 del triangolo AEB e di y, ordinata del baricentro G del trapezio. (I pesi statistici sono le masse del triangolo AEB e del trapezio OABC divise per la massa del triangolo OEC. Le masse sono proporzionali alle aree, per l'ipotesi di omogeneità, perciò i pesi statistici sono rapporti di aree).

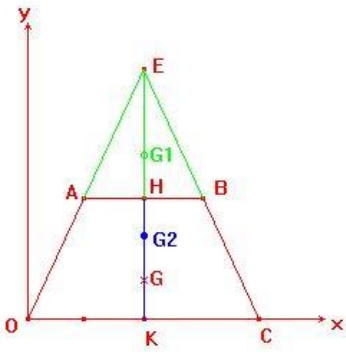

Fig.7

Dette S_1, S_2 ed S le aree dei triangoli e del trapezio, h_1, h_2 ed h le rispettive altezze, risulterà $h_2=(a/b).h_1$, $h=h_2 - h_1$ e quindi

$h_1 = \frac{bh}{a-b}$, $h_2 = \frac{ah}{a-b}$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{b^2}{a^2}$ (le aree sono proporzionali ai quadrati di lati omologhi) ed S_2-S_1=S.

Pertanto avremo $S_1 = \frac{b^2}{a^2-b^2} S$ ed $S_2 = \frac{a^2}{a^2-b^2} S$.

Le ordinate dei baricentri dei triangoli sono

$y_2 = \frac{h_2}{3} = \frac{ah}{3(a-b)}$, $y_1 = h + \frac{h_1}{3} = h + \frac{bh}{3(a-b)} = \frac{3a-2b}{3(a-b)} h$, quindi l'equazione dei baricentri è

Sy=S_2y_2-S_1y_1, ovvero $Sy = \frac{a^2}{a^2-b^2} S.\frac{ah}{3(a-b)} - \frac{b^2}{a^2-b^2} S.\frac{(3a-2b)h}{3(a-b)}$ e infine

$$y = h\frac{a^3}{3(a-b)(a^2-b^2)} - h\frac{b^2(3a-2b)}{3(a-b)(a^2-b^2)} = h\frac{a^3-3ab^2+2b^3}{3(a-b)^2(a+b)} = h\frac{a+2b}{3(a+b)}.$$

Si noti che risulta y≤h/2, valendo il segno "*uguale*" solo se b=a (se il trapezio degenera in un rettangolo) e perciò il baricentro della lamina omogenea è più *basso* del baricentro di quattro masse uguali poste ai vertici del trapezio.

Un modo più semplice di determinare il baricentro del trapezio è il seguente (Vedi Fig.8)

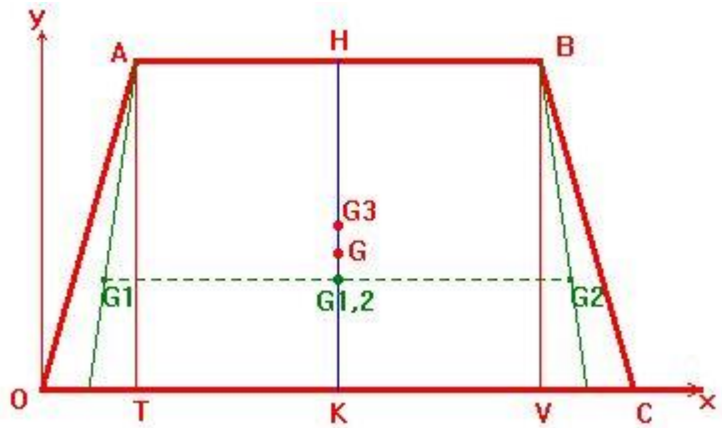

Fig.8

Il baricentro dei triangoli AOT e BVC è il punto $G_{1,2}$ di ascissa a e ordinata $y_{1,2}$=h/3. Il baricentro del rettangolo ABVT è il punto G_3 di ascissa a e ordinata y_3=h/2. Il peso statistico del punto $G_{1,2}$ è il rapporto tra la somma delle aree dei due triangoli e l'area del trapezio: $p_{1,2}$=(a-b)/(a + b). Il peso statistico di G_3 è p_3=2b/(a+ b). Perciò il baricentro G del trapezio ha ascissa a e ordinata $p_{1,2}$.h/3+p_3.h/2 cioè $y_G = \frac{a-b}{a+b}.\frac{h}{3} + \frac{2b}{a+b}.\frac{h}{2} = \frac{2a-2b+6b}{6(a+b)}h = \frac{a+2b}{3(a+b)}h$, come trovato più su.

Figure a contorno curvilineo o con densità variabile.

In tal caso le sommatorie vanno sostituite da integrali e la [1] diventa

[2] $\vec{R}_C = \frac{\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})d\vec{r}}{\int_V \rho(\vec{r})d\vec{r}}$ **;** V è l'estensione della figura, ρ la densità, $\vec{r}$ il raggio vettore del generico elemento di V. L'integrale sarà curvilineo, doppio, triplo a seconda della figura.

Alcuni esempi.

1) Baricentro di una lamina a forma di semicerchio $x^2+y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, ρ costante.
   Per simmetria, $x_C = 0$.
   $$y_C = \frac{\iint_S ydxdy}{\pi r^2/2} = \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} ydy = \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}\frac{1}{2}\left(r^2-x^2\right)dx = \frac{2}{\pi r^2}\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)_0^r = \frac{4r}{3\pi}.$$
2) Baricentro della semicirconferenza $x^2+y^2= r^2$, $y \geq 0$, ρ costante.
   Per simmetria, $x_C = 0$; $y_C = \frac{\int_\gamma y.ds}{\pi r} = \frac{\int_0^\pi rsen\theta.rd\theta}{\pi r} = \frac{r^2.2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}$.
3) Se consideriamo un filo metallico omogeneo piegato a formare una linea chiusa consistente in una semicirconferenza come nell'esempio 2) e nel corrispondente diametro 2r, l'ascissa sarà ancora zero, l'ordinata è la media pesata del baricentro del caso 2) e di quello del diametro che, essendo sull'asse delle ascisse, è zero. Perciò
   $$y_C = \frac{\pi r.\frac{2r}{\pi} + 2r.0}{\pi r + 2r} = \frac{2r}{\pi + 2}.$$
4) Baricentro di mezza ellisse di semiassi a e b, centro O (0;0), $y \geq 0$, $\rho\ costante$.
   L'area S=πab/2; x_C=0; $y_C = \frac{2}{\pi ab}\iint_S ydxdy = \frac{2}{\pi ab}\int_{-a}^{a} dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy$ e quindi
   $$y_C = \frac{2}{\pi ab}\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2a^2}(a^2-x^2)dx = \frac{b}{\pi a^3}2\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{4b}{3\pi}$$ (come nel caso del semicerchio).

5) Baricentro di un segmento parabolico $-\sqrt{b} \leq x \leq \sqrt{b},\ 0 \leq y \leq -x^2 + b,\ b > 0$.
   Per la simmetria, $x_C = 0$. $y_C = \frac{\iint_S ydxdy}{\iint_S dxdy} = \frac{\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} dx \int_0^{b-x^2} ydy}{\frac{4}{3}b\sqrt{b}} = \frac{3}{4b\sqrt{b}}2\int_0^{\sqrt{b}}\frac{1}{2}\left(b^2 - 2bx^2 + x^4\right)dx =$
   $$= \frac{3}{4b\sqrt{b}}\left[b^2x - \frac{2}{3}bx^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{b}} = \frac{3}{4b\sqrt{b}}\left[b^2\sqrt{b} - \frac{2}{3}b^2\sqrt{b} + \frac{1}{5}b^2\sqrt{b}\right] = \frac{3b}{4}\left[\frac{8}{15}\right] = \frac{2b}{5}.$$
   Consideriamo qualche solido.
6) Baricentro di un emisfero di raggio a ed equazione $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, $\rho\ costante$.

Per simmetria, $x_C=y_C=0$. Volume dell'emisfero $V=2\pi a^3/3$. Perciò

$$z_C=\frac{3}{2\pi a^3}\iiint_V zdxdydz=\frac{3}{2\pi a^3}\iint_{D_{x,y}} dxdy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} zdz=\frac{3}{2\pi a^3}\frac{1}{2}\iint_{D_{x,y}}(a^2-x^2-y^2)dxdy$$ e quindi

(passando a coordinate polari r, φ, Jacobiano=r)

$$z_C=\frac{3}{4\pi a^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a(a^2-r^2).rdr=\frac{3}{4\pi a^3}2\pi\left[\frac{a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^a=\frac{3a}{8}.$$

7) Baricentro di un semi ellissoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, z\geq 0$, ρ costante.

Volume del solido (mezzo ellissoide) $V=\frac{2}{3}\pi abc$. Al solito $x_C=y_C=0$.

$$z_C=\frac{3}{2\pi abc}\iiint_V zdxdydz=\frac{3}{2\pi abc}\iint_{D_{x,y}}dxdy\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}zdz=\frac{3}{2\pi abc}\iint_{D_{x,y}}\frac{1}{2}c^2\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]dxdy.$$

Passando a coordinate *ellittiche* x=ra.cosφ, y=rb.senφ, $0\leq r\leq 1, 0\leq \varphi\leq 2\pi$, Jacob.= abr,

$$z_C=\frac{3}{2\pi abc}\frac{c^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(1-r^2)abrdr=\frac{3c}{4\pi ab}2\pi ab\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{3c}{8}$$ (come per un emisfero).

8) Baricentro di un cono (circolare retto) di altezza h e raggio di base a.
Volume $V=\pi a^2h/3$; $x_C=y_C=0$.

$$z_C=\frac{3}{\pi a^2h}\iiint_V zdxdydz=\frac{3}{\pi a^2h}\iint_{D_{x,y}}dxdy\int_0^{z(x,y)}zdz=\frac{3}{\pi a^2h}\iint_{D_{x,y}}\frac{1}{2}\left[z(x,y)\right]^2dxdy.$$

Passo a coordinate *cilindriche* r,φ,z:
$0\leq\varphi\leq 2\pi, 0\leq r\leq a, 0\leq z\leq z(x,y)$. Si ottiene x=r.cosφ, y=r.senφ, z=z, Jacobiano =r e z(x,y)=z(r,φ)= $h(a-r)/a$. Perciò

$$z_C=\frac{3}{2\pi a^2h}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^a\frac{h^2}{a^2}\left(a^2-2ar+r^2\right).rdr=\frac{3}{2\pi a^2h}\frac{2\pi h^2}{a^2}\left[a^2\frac{r^2}{2}-2a\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{4}\right]_0^a=\frac{h}{4}.$$

9) Verificare che se il cono ha base ellittica, la quota del baricentro è ancora 1/4 dell'altezza e che per una piramide retta il baricentro è sempre ad 1/4 dell'altezza, partendo dalla base.

10) Dato un tronco di cono circolare retto di altezza h e raggi di base a e b (a>b), dimostrare che il baricentro sta sull'altezza, a distanza dalla base maggiore $z_C=\frac{(a^2+2ab+3b^2)h}{4(a^2+ab+b^2)}$.

Prima verificare la formula nei casi limite b=0 (cono, $z_C=h/4$) e b=a (cilindro, $z_C=h/2$).
Per la dimostrazione farsi guidare dall'analogia col caso del trapezio, primo metodo, Fig.7.

11) Baricentro di una superfice emisferica omogenea (ρ costante) $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$.

Area $S=2\pi a^2$, $x_C=y_C=0$, $z_C=\frac{1}{2\pi a^2}\iint_S zd\sigma$.

Passando a coordinate sferiche $\vec r(\theta,\varphi)=(asen\theta\cos\varphi, asen\theta sen\varphi, a\cos\theta)$, l'elemento d'area $d\sigma=\left\|\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}\right\|d\theta d\varphi=a^2sen\theta d\theta d\varphi$ e $z_C=\frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}a\cos\theta.a^2sen\theta d\theta=\frac{a}{2}$.