Ottavio Serra
Appunti di Analisi Infinitesimale
(per il Liceo)
Prima parte: Limiti

0. Avvertenza importante.

Dei teoremi che saranno riportati non è **essenziale**, a livello liceale, saper **ripetere** la dimostrazione di tutti, **veramente importante** è capirne il **significato** e saperli applicare.

Segnerò con un **asterisco** quelli che, a mio giudizio, sono più significativi, anche per far cogliere agli studenti, almeno in alcuni casi, il senso di ***necessità*** che la dimostrazione conferisce ai teoremi e abituarli a gustare la simmetria, l'eleganza, la bellezza del ragionamento matematico.

1. L'asse reale $\mathbb{R}$.

L'insieme dei numeri reali, ordinato nel modo usuale ($a \leq b$ se $b-a \geq 0$) si chiama asse reale, perché rappresenta l'immagine astratta della retta euclidea ai cui punti vengono fatti corrispondere in modo biunivoco i numeri reali (le ascisse). Diremo allora che un punto A *precede* (o *è alla sinistra di*) un punto B, se l'ascissa di A è minore dell'ascissa di B. Per questo motivo i numeri reali vengono spesso chiamati punti.

Estremo superiore. Un insieme E di numeri reali (di *punti*) si dice superiormente limitato, se esiste un numero b tale che, per ogni $x \in E$ risulti $x \leq b$. (In simboli: $\exists b / \forall x, x \in E \rightarrow x \leq b$). Il numero b si chiama maggiorante di E. Chiaramente, se b è unmaggiorante, ogni numero maggiore di b è un maggiorante.

In tal caso si chiama ***Estremo superiore di E, Sup(E), il numero reale tale che***

1° $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, x \leq$ ***Sup(E); (a parole: Sup(E) è uno dei maggiorantidi E);***

2° $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}\ \exists\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}\ |\boldsymbol{x} > \boldsymbol{Sup}(\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{\varepsilon}.$ (Intuitivamente, l'estremo superiore è il più piccolo maggiorante).

Se E non è superiormente limitato, si diche che **Sup(E)=+∞.**

Sup(E) può appartenere o non appartenere ad E; se gli appartiene, si chiama massimo di E: **Max(E)**.

Estremo inferiore. Un insieme E di numeri reali (di punti) si dice inferiormente limitato, se esiste un numero a tale che, per ogni $x \in E$ risulti $x \geq a$. (In simboli: $\exists a / \forall x, x \in E \rightarrow x \geq a$). Il numero a si chiama minorante di E. Chiaramente, se a è un minorante, ogni numero minore di a è un minorante.

In tal caso si chiama ***Estremo inferiore di E, Inf(E) il numero reale tale che***

1° $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, x \geq$ ***Inf(E); (a parole: Inf(E) è uno dei minoranti di E);***

2° $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}\ \exists\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}\ |\boldsymbol{x} < \boldsymbol{Inf}(\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\varepsilon}.$ (Intuitivamente, l'estremo inferiore è il più grande minorante).

Se E non è inferiormente limitato, si diche che **Inf(E)= -∞.**

Inf(E) può appartenere o non appartenere ad E; se gli appartiene, si chiama minimo di E: **Min(E)**.

Esempio. Determinare Inf, Sup ed eventualmente Min e Max di E= $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1-2^t\}$, t reale.

Soluzione. (Procedi con considerazioni intuitive, aiutandoti magari con un grafico). 2^t è crescente perciò x è decrescente e Sup(E)=1 (***verso l'estrema sinistra***; non è Max perché l'esponenziale non si annulla per nessun valore di t. Inf(E)=- ∞ (***verso l'estrema destra*****)**, che ovviamente non è Min**.**

Esercizio 1. Studiare come sopra l'insieme A delle $y=1/(x^2+1)$, al variare di x sull'asse reale.

N.B. Procedere *intuitivamente*, senza tanto rigore; spesso, però, per determinare Innf e Sup occorrono concetti e tecniche che incontreremo più avanti.
Esercizio 2. Sia B l'insieme dei **numeri reali** x tali che x>0 e $x^2<2$. Trovare Inf(B) e Sup(B).
Come cambierebbe **il risultato** se B fosse definito nel campo ***Q*** dei numeri razionali?
Solo nel campo dei numeri reali per un insieme l'essere superiormente limitato è condizione **sufficiente** perché sia dotato di **estremo superiore** (finito). Questa proprietà è un teorema o un assioma a seconda di come si introducono i numeri reali. Nella teoria assiomatica dei numeri reali, dovuta al matematico tedesco Dedekind (1831-1916) la proprietà è assunta come **postulato** (ed è detta assioma di **completezza** o di **continuità**) e consente di fondare in modo rigoroso la corrispondenza **biunivoca** tra numeri reali e punti di una retta, per la quale già i greci avevano introdotto una proprietà di continuità, perché volevano la retta **liscia** e **senza buchi.**

Esercizio: si dimostra che Sup(E) è unico. *Sapreste escogitare una dimostrazione?*

Intervalli. Chiameremo intervallo (limitato) aperto di estremi a e b l'insieme dei punti x tali che a<x<b. Useremo la notazione:]a; b[.
Intervallo chiuso è un intervallo aperto al quale si aggiungono gli estremi: [a; b]. Ci sono anche intervalli chiusi da una sola parte, come [a; b[(chiuso a sinistra) e]a; b] (chiuso a destra).

In generale, un **Aperto** è l'unione di una famiglia di intervalli aperti, un **Chiuso** è il complementare di un Aperto, cioè, se A è un aperto, ***R***-A è un chiuso.
Si noti che ϕ (l'insieme vuoto) è un Aperto, perché per ogni numero reale a, ϕ =]a; a[.
Segue che ***R***, complementare di ϕ, è un Chiuso.
Analogamente, ***R*** è un aperto perché, per tutti i numeri reali a, b $\boldsymbol{R} = \bigcup_{a<b}]a;b[$. Perciò ϕ è un Chiuso.

2. Intorno di un punto.
Intorno di x_0 è un qualsiasi aperto cui x_0 appartiene: $I(x_0)$.
Intorno bucato di x_0 un intorno di x_0 privato di x_0. In simboli $I_0(x_0) = I(x_0)-\{x_0\}$.
Ovviamente se il punto si chiama c, $I_0(c) = I(c)-\{c\}$.
Se x_0 è un numero reale **finito**, un intorno di x_0 può essere $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, ove δ è un numero positivo. In questo caso **δ** si suole chiamare ***raggio dell'intorno di centro x_0.***
Un intorno di +∞ è un intervallo aperto illimitato a destra $I(+\infty)=]\delta; +\infty[$, (insieme degli x> δ).
Un intorno di -∞ è un intervallo aperto illimitato a sinistra $I(-\infty)=]-\infty; \delta[$, (insieme degli x< δ).
In questi due casi **δ** è un qualsiasi numero reale, purché **diverso da zero** e in questi casi i concetti di intorno e di intorno bucato coincidono.
Una proprietà importante di questa definizione di intorno, basata sugli intervalli, è che **punti distinti** hanno (possono avere) **intorni disgiunti**: siano a e b due punti distinti; detta **d** la loro distanza |a-b|, basta prendere come raggi dei loro intorni numeri δ minori di d/2.
Mostrare come costruire intorni disgiunti per a (finito) e b=+∞ ((o -∞).
Se **c è finito,** intorno sinistro di c, $\mathbf{I^-(c)=\,]c-}\,\delta;\ c[$, intorno destro di c, $\mathbf{I^+(c)=\,]c;\ c+}\,\delta[$. (δ>0).

3. Punti di accumulazione di un insieme E.
Un punto **c** si dice punto di accumulazione di E se in ogni intorno ***bucato*** *di c cade* ***almeno*** *un punto x di E***.** Insomma, vogliamo che in tale intorno cada almeno un punto x di E *diverso da c.*
Un punto di accumulazione di un insieme E può appartenere ad E oppure no.

Esempi. Un intervallo ha come punti di accumulazione tutti i suoi punti, *compresi gli estremi*, anche se è aperto. Perciò un intervallo **chiuso coincide** con l'insieme dei suoi punti di accumulazione.
$+\infty\ e - \infty\ possono\ essere\ punti\ d'accumulaazione\ di\ un\ insieme?$ Certamente, se …
Esercizi.
1° Dimostrare che, se c è punto d'accumulazione di E, in un intorno di c cadono **infiniti** punti di E**.**
Corollario: un insieme finito non ha punti di accumulazione.
2° Sia E= *{x=1/n, n=1, 2, 3, …}*. Determinare i punti di accumulazione di E. (e anche Inf, Sup, ecc.).
Un punto di un insieme che non è di accumulazione si chiama ***punto isolato*****.**
3° L'insieme ***N*** dei numeri *naturali*, considerato come sotto insieme di ***R*****,** ha un **unico** punto di accumulazione: determinarlo.

4. Limiti.

Comincio con un esempio. Data la funzione $y = \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$, il dominio è D=$\mathbb{R}$ - {1; 2}.
Dunque, 2 non appartiene al dominio, ma è un suo punto di accumulazione (perché? Chi sono tutti gli altri?), perciò possiamo considerare punti arbitrariamente prossimi a 2 restando nel dominio e ci chiediamo: a quale valore si avvicina la funzione man mano che x si avvicina a 2 (restando $\neq$ 2).
Osserviamo che anche il numeratore si annulla per x=2, perciò possiamo scrivere $y = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}$.
Il fattore (x-2) è diverso da zero, perché x è diverso da 2 (sta in un **intorno bucato di 2,** incluso in D), perciò è lecito semplificare la frazione e otteniamo $y = \frac{x+3}{x-1}$, equivalente alla funzione data in un intorno bucato di 2 in cui non c'è il *pericolo* della frazione 0/0. Perciò, man mano che x si avvicina a 2 la funzione si avvicina al valore y=5.
Che cosa succede se x si avvicina a 1, l'altro punto di accumulazione di D non appartenente a D?
In questo caso il numeratore si avvicina a 4, mentre il denominatore si avvicina a 0; perciò in un intorno bucato di 1, $I_0(1)$, la funzione assume valori arbitrariamente grandi in modulo. Diremo che il limite della funzione, per x tendente a 1, è ∞ (*salvo il segno*).
Verificare che, se x tende a 1 da *destra*, cioè per valori >1 (tende a 1^+), allora per la funzione data il limite è +∞, mentre se x tende a 1 da *sinistra*, cioè per valori <1 (tende a 1^-), il limite è -∞.
Siccome il dominio D della funzione data è illimitato a destra e a sinistra e quindi $+\infty\ e - \infty$ sono punti di accumulazione di D, mi chiedo: che succede al valore della funzione se x diventa sempre più grande e positivo (**x tende a +∞**)? La funzione si può scrivere $y = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$.
Se x diventa **arbitrariamente grande**, tutte le frazioni nelle parentesi diventano **arbitrariamente piccole** e *marciano* verso 0, perciò la funzione *marcia* verso 1.
Per x tendente a +∞, il limite della funzione è 1.
Siete in grado di stabilire che la funzione tende a 1 ***decrescendo*** (si dice che tende a 1^+)?
Che succede per x tendente a -∞? E per x tendente a 0?
Tutte queste **informazioni** vi permettono già di fare un grafico abbastanza accurato della funzione.
A questo punto diamo la definizione formale di l**imite** di una funzione f(x) con dominio D.

Sia x_0 un punto d'accumulazione di D (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$, se D è illimitato). Diremo che, per x tendente a x_0, il limite della funzione f((x) è l, se per **ogni** prefissato intorno di l, I(l), **esiste** un intorno **bucato** di x_0, $I_0(x_0)$, tale che, se x appartiene all'intersezione tra D e $I_0(x_0)$, allora f(x) appartiene a I(l). In simboli:

$$[1]\lim_{x\to x_0} f(x)=l \underset{def}{\equiv} \forall I(l)\exists I_0(x_0)\,|\, x\in I_0(x_0)\cap D \Rightarrow f(x)\in I(l).$$

Peer esercizio si esprima la [1] nel linguaggio *"epsiilontico"*, (usando ε e δ) per definire gli intorni nei 9 casi possibili (x_0 finito, $+\infty, -\infty$ ed l finito, $+\infty, -\infty$).

Avrete notato che per x_0 si richiede un **intorno bucato**. Ciò perchè vogliamo tenere distinto il concetto di limite dal valore della funzione in x_0, nel caso che x_0 appartenga al dominio.

Si consideri, per esempio, la funzione $y = f(x) = \begin{cases} 1, x=0 \\ x^2, x\neq 0 \end{cases}$

Questa funzione è definita su tutto l'asse reale e f(0)=1, perchè così **io** l'ho voluta definire, ma il suo limite per $x\to 0$ *vale* 0.

A volte il limite in c non esiste, ma esistono il **limite sinistro** e il **limite destro** e sono diversi.

Per esempio, f(x)= $2^{1/x}$. Il dominio è $\mathbb{R}-\{0\}$. Se x tende a 0 da sinistra, il limite è 0, se x tende a 0 da destra, il limite è $+\infty$. Si parla in questi casi di **limite sinistro** e **limite destro**. In simboli:

$\lim_{x\to c^-} f(x)=l_S, \lim_{x\to c^+} f(x)=l_D$, facendo tendere x a c rispettivamente in un intorno sinistro o destro di c.

Verificare quanto su asserito: $\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0^+, \lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty.$ (Notare e spiegare il primo limite: **0^+**).

In altri casi può non esistere il limite destro o il limite sinistro (o entrambi). Per esempio, la funzione f(x)=Sen(1/x), definita in tutti i punti dell'asse reale eccetto 0, in tale punto, che è d'accumulazione, non ammette né limite sinistro né limite destro; in un intorno di 0 tale funzione oscilla **infinite volte** tra -1 e 1, in modo sempre più fitto man mano che x→>0, e in tale intorno il grafico sembra una macchia rettangolare il cui lato verticale ha lunghezza 2.

Se in c limite sinistro e limite destro sono uguali, diremo brevemente che in c la funzione ammette limite (limite determinato), *finito o infinito***.**

Esercizio teorico facile. Se f(x) è unna funzione dispari e 0 è un punto d'accumulazione del suo dominio, dire in due secondi quanto valgono i limiti **sinistro** e **destro** (per x →0).

Esercizi. Utilizzare la definizione [1], adattandola ai vari casi, (ε e δ) **per dimostrare che:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2};\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=0;\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty;\lim_{x\to +\infty}Log_2(x)=+\infty;\lim_{x\to 0^+}Log_2(x)=-\infty;\lim_{x\to +\infty}2^x=+\infty;\lim_{x\to -\infty}2^x=0.$$

E'' importante capire che le dimostrazioni proposte richiedono, prefissato l'intorno di l, cioè l'*ε positivo*, ***esibire, calcolare*** il **δ, *funzione di ε***, *col quale costruire l'intorno di x_0.*

Se alla fine dei calcoli **non trovate** il **δ**, oppure l'intorno che trovate **non è un intorno di x_0**, significa che il limite proposto è **sbagliato (***o avete sbagliato voi***)**. Per esempio $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}=\frac{1}{4}$ **è sbagliato**.

N.B. I limiti indicati per logaritmi ed esponenziali non cambiano sostituendo la base 2 con un qualsiasi numero maggiore di 1 (10, π, e). Perché? Che succederebbe se la base fosse minore di 1?

Avvertenza: non vi disperate se non sapete **verificare** i limiti proposti; tra breve imparerete delle tecniche per **calcolarli** e questa è la cosa **importante**.

A proposito, dovreste sapere che ***il numero e*** si definisce come limite di una successione f(n) (successione significa funzione che ha per dominio l'insieme dei numeri naturali). Per il numero **e** si ha

[2] $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. (Perché non ho specificato a quale punto d'accumulazione debba tendere n?)

Si dimostra che la [2] è **crescente** e che **3 è un maggiorante** (occorre un po' di calcolo combinatorio); **perciò il suo limite è finito e minore di 3.**

Calcolate f(n) con la[2] usando valori di n sempre più grandi: **e=2,718281828…**

[3] $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = Sup\{f(n)\}$ =***e*** (conosciuto come numero di Nepero, ma chiamato ***e*** da ***E***uler).

Scusate, se non l'ho detto pima. Per una funzione si chiamano **Inf, Sup** (e se esistono, **Min e Max**) i corrispondenti valori dell'insieme ***immagine*** **(**a volte detto ***codominio*)*,*** cioè dell'insieme dei **valori** che la funzione assume **nei punti del dominio.**

5. Teoremi sui limiti.

*** Teorema di unicità:** Se $\lim_{x\to c} f(x)=a$ e $\lim_{x\to c} f(x)=b$, allora b=a.

N.B. Non si tratta di una **cretinata** (proprietà transitiva dell'uguaglianza tra numeri: *lim non è un numero, ma un operatore che applicato a una funzione restituisce un numero. Il teorema vuol dire che* **comunque x tende a c, x=c $\pm$ (1/2)^n oppure x=c$\pm$ (1/3)^n oppure comunque x scivoli verso c, se il limite esiste otteniamo sempre lo stesso risultato.**

Prima di dimostrare il teorema, faccio vedere esempi di funzioni che non hanno limite.

$\lim_{x\to+\infty} sen(x)$ NON ESISTE, perché il seno oscilla continuamente tra -1 e 1 e non si avvicina definitivamente a nessun valore. Analogamente, non esiste il $\lim_{x\to 0} sen(\frac{1}{x})$. Man mano che la x si avvicina a 0 1/x diventa arbitrariamente grande (in modulo) e il Seno assume i*nfinite* volte ciascun valore compreso tra -1 e 1. Il suo grafico, vicino a 0 sembra addirittura una macchia rettangolare di altezza 2.

Dimostro ora il teorema di unicità.

Per ogni intorno I(a) esiste un intorno bucato $I_0(c)$ tale che se x ∈ $I_0(c)$∩ D allora f(x)∈ $I(a)$.

Così pure, per ogni intorno I(b) esiste un intorno bucato $J_0(c)$ tale che se x sta in $J_0(c)$ e in D allora f(x)∈ $I(b)$. Ma allora, se x ∈ $I_0(c) \cap J_0(c) \cap D$, f(x) ∈ I(a) ∩ I(b). Se a e b fossero diversi, potrei sceglier i loro intorni disgiunti e quindi f(x) dovrebbe stare nell'insieme vuoto, impossibile, quindi a=b.

***Teorema del confronto.**

Siano date due f(x)) e g(x) definite nello stesso insieme D nei cui punti f(x)<g(x); se nel punto c d'accumulazione di D esistono i limiti, **a** per f(x) e **b** per g(x), allora **a ≤ *b*.** Si noti, in particolare, che il teorema afferma che **al limite le disuguaglianze si attenuano.**

Prima della dimostrazione mostro due esempi.

1° esempio: siano $f(x)=\frac{x-1}{x+1}, g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ due funzioni e le vogliamo studiare in D = [2; +∞[.

In D risulta f(x)<g(x) e, per x→+∞, lim f(x)=1e lim g(x)=2 (1<2: la disuguaglianza permane).

2° esempio: siano $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}, g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ due funzioni e le vogliamo studiare in D = [2; +∞[.

In D, anche in questo caso, f(x)<g(x), ma ora, per x→+∞, lim f(x)=lim g(x)=2 (la disuguaglianza si attenua).

Dimostrazione. Trattiamo il caso di **a** e **b** finiti.

$[4] \forall \varepsilon>0 \exists I_0(c) \mid x \in I_0(c) \cap D \Rightarrow (a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon)$ e analogamente

$[5] \forall \varepsilon>0 \exists J_0(c) \mid x \in J_0(c) \cap D \Rightarrow (b-\varepsilon<g(x)<b+\varepsilon)$.

Segue che ,se x sta nell'intersezione dei due intorni di c, valgono simultaneamente la [4] e la [5]. Da qui segue a- ε<f(x)<g(x)<b+ ε e quindi a<b+2ε. Si conclude $a \leq b$. Se, infatti, così non fosse, sarebbe a>b, ma ciò implicherebbe ε>(a-b)/2, cioè ε dovrebbe essere maggiore di un numero positivo determinato, contro l'ipotesi che sia un numero *positivo* ***arbitrario***.

Corollario. Se in D f(x)<g(x)<h(x) e in c f(x) e h(x) hanno lo stesso limite l, anche g(x) ***deve*** avere limite l (teorema dei **due carabinieri**).

Teorema di permanenza del segno.

Se il limite per x tendente a c è l **diverso da zero**, allora esiste un intorno di c in cui f(x) ha lo stesso segno di l: f(x).l > 0.

Se l è +∞, basta scegliere I(+∞) ={x| x> δ}, con δ >0.

Se l=- ∞, si scelga I(-∞) ={x| x< δ}, con δ <0.

Se l è finito, si scelga I(l)=]l-ε; l+ε[, con ε= |l/2|.

(Non è detto che l'intorno di l debba essere un intorno centrato, ma si può sempre renderlo centrato restringendolo opportunamente).

6. Operazioni sui limiti. Si dimostra che

Se $\lim_{x\to c} f_1(x)=l_1$ e $\lim_{x\to c} f_2(x)=l_2$, e **i limiti sono finiti**, allora:

1) dette a_1 e a_2 due costanti, $\lim_{x\to c}\left(a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)\right)=a_1\lim_{x\to c} f_1(x)+a_2\lim_{x\to c} f_2(x)$. In particolare, il limite della **somma** di due funzioni è la **somma dei limiti**, il limite della differenza è la differenza dei limiti. (Dimostrare per esercizio).

2) $\lim_{x\to c} f_1(x).f_2(x)=l_1.l_2$ (il limite del prodotto è il prodotto dei limiti).

Suggerimento: $|f_1(x).f_2(x).-l_1.l_2=|f_1(x).f_2(x)-l_1.f_2(x)+l_1.f_2(x)-l_1.l_2| \leq$

$\leq |f_2(x)|.|f_1(x)-l_1|+|l_1|.|f_2(x)-l_2|<\left(|Supf_2+|l_1|\right).\varepsilon$

Ricordare che il **modulo** di una somma o di una differenza è **minore o uguale** alla somma dei moduli: |a±b| ≤ |a| + |b|. Geometricamente significa che in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due.

Invece il modulo del **prodot**to è **uguale** al prodotto dei moduli e poi ricordare che se una f(x) ha limite finito in c, esiste un intorno di c in cui f(x) è superiormente (e inferiormente) limitata e che, moltiplicando per una costante positiva un positivo arbitrario, si ottiene un positivo arbitrario, ecc. (Se voglio che 1000ε sia minore di 10^{-9} basta prendere ε<10^{-12}).

3) Se $\lim_{x\to c} f_1(x)=l_1, \lim_{x\to c} f_2(x)=l_2$ e $l_2 \neq 0$, allora $\lim_{x\to c}\frac{f_1(xx)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}$. (Dimostrarlo, se vi riesce).

7. Funzioni continue.

Una funzione si dice continua in un punto c del domino D, se c è un punto isolato oppure c è un punto d'accumulazione di D e $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. (Cioè, il limite coincide col valore). Ovviamente, il limite deve essere **finito** (e determinato, *cioè limite destro=limite sinistro*).

Una funzione si dice continua in D se è continua in tutti i punti di D.

Si dimostra che sono continue nel loro insieme di definizione:

(1) le funzioni costanti (dimostrazione immediata),

(2) la funzione **identica** y=x (dimostrazione immediata),

(3) le funzioni Seno e Coseno, Tangente e le loro inverse: Arcsen, ArcCos, ArcTang. (per seno e coseno usare le formule di prostaferesi, ma non dovete dimostrare tutto),

(4) le funzioni esponenziale e logaritmica (in qualunque base, ma basta dimostrarlo per la base **e**)

(5) somme, differenze, prodotti e quozienti, radici n^{me} di funzioni continue.

In pratica, **sono continue** tutte le **funzioni elementari**, cioè quelle che si studiano al liceo e al 1° anno di università, **tranne** quelle che si costruiscono apposta per assegnare esercizi ai poveri studenti. Di solito sono espresse con più di una formula.

Esempio.

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x+3, x \le 1 \\ k-x, x > 1 \end{cases}$, individuare il dominio e determinare k in modo che sia continua in tutti i punti del dominio (La risposta è k=5).

Un teorema importante sulle funzioni continue.

Se f è una funzione continua ed esiste il $\lim_{x \to c} g(x)$, per la funzione composta (f·g)(x)=f(g(x)) vale $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x))$. (L'operatore di limite si può portare **dentro** la funzione continua, come se valesse una **specie di proprietà commutativa** tra gli *operatori* **limite** e **funzione continua**).

Esercizi.

(1) Calcolare $\lim_{z \to \pm\infty} \left(1+\frac{x}{z}\right)^z$ (*La variabile è z*, **x va pensato come un parametro costante; alla fine del calcolo potete pensare la x come variabile e così nasce una nuova funzione**).

Prima conviene dimostrare, usando il teorema dei **carabinieri**, che si ottiene come limite il numero **e,** se nella formula [2] si sostituisce il numero naturale n con la variabile reale z e la si fa tendere a $+\infty$, $sfruttando\ la\ disuguaglianza\ [z] \le z < [z]+1$. ($[z]$è $la\ parte\ intera\ di\ z$).

$Per\ z \to -\infty$, ridursi a + ∞ col cambiamento di variabile z=-t. Poi ricordare che l'esponenziale, in qualunque base, è una funzione continua. Troverete la ***funzione esponenziale*** per eccellenza, l'esponenziale *standard:* **e^x:** $\lim_{z \to \pm\infty} \left(1+\frac{x}{z}\right)^z = e^x$.

(2) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{Log_b(1+x)}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x}$ e verificare che se b è uguale al numero **e** il risultato diventa particolarmente semplice (entrambi i limiti avranno valore1). Suggerimento: per il primo limite, eseguire la sostituzione di variabile x=1/t, per il secondo porre b^x-1=t.

(3) Aiutandovi con un disegno, cerchio goniometrico e angoli in radianti, **calcolare** $\lim_{x \to 0} \frac{sem(x)}{x}$, (deve venire 1), e poi, usando questo risultato, calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2}$, moltiplicare e dividere per 1+cos(x).

(che trovereste, se misuraste gli angoli in gradi babilonesi: angolo piatto =180°?).

(4) Appoggiandovi agli esercizi precedenti, calcolate $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}, \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^4}, \lim_{x\to 0}\frac{Ln^2(1+x)}{1-\cos(x)}$.

Applicate il principio che io chiamo della **Lampada di Aladino**, cioè: *ah, se si fosse trattato del limite di (1-cos(x))/x², avrei saputo risponder!* Ma con la lampada il desiderio diventa realtà: *aggiustate* la frazione e poi applicate i teoremi e le operazioni sui limiti; e così per gli altri esercizi.

Punti singolari o di discontinuità. Se x_0 è punto d'accumulazione di D, dominio di una funzione f(x), ma non appartiene a D, si dice che x_0 è un *punto singolare* o di discontinuità per f(x). Se però in x_0 il limite di f(x) è determinato e finito, si dice che la singolarità è ***eliminabile,*** assumendo come valore della funzione in x_0 il valore del limite e il punto x_0 viene ***incorporato*** nel dominio (***prolungamento del dominio della funzione per continuità***).

A proposito: si sente dire che si può disegnare il grafico di una funzione continua, senza sollevare la matita dal foglio. Ciò è vero, se il dominio della funzione è un intervallo, ma se il dominio è l'unione di parti disgiunte, è **falso.**

Per esempio, $f(x) = Arc\mathrm{Tan}\frac{1-x}{1+x} + Arc\mathrm{Tan}(x)$ è continua nel suo dominio D, ma D=***R*-{-1} non è un intervallo, è l'unione di due intervalli (semirette) disgiunti.**

(Nel punto -1 la funzione ha una singolarità non eliminabile: calcolare i limiti sinistro e destro).

8. Infinitesimi.

Il concetto di *infinitesimo* è molto importante per le applicazioni della teoria dei limiti e per gli sviluppi successivi. Il punto di partenza è molto semplice.

Se f(x) è una funzione definita in D e x_0 è un punto d'accumulazione di D, si dice che f(x) è un *infinitesimo* in x_0, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. **(Nota: x_0 può essere ∞).**

Siano f(x) e g(x) due infinitesimi in x_0; se il limite del loro quoziente è finito e diverso da zero, si dice che f(x) e g(x) sono infinitesimi dello stesso ordine (*marciano* verso 0 con la stessa velocità).

Se il limite del quoziente f(x)/g(x) è 0, si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g(x). (f(x) marcia verso 0 più rapidamente di g(x)).

(Non è necessario trattare il caso in cui il limite è infinito, f di ordine inferiore rispetto a g, basta invertire la frazione e viene g di ordine superiore rispetto a f).

Nel punto x_0 si assume come infinitesimo campione la funzione $x-x_0$, se però x_0 è infinito si assume come infinitesimo campione la funzione 1/x.

Se α è un reale positivo e $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = l \neq 0$, si dice che in x_0 f(x) è un infinitesimo di ordine α.

Per esempio, nel punto 0 x^3 è un infinitesimo di ordine 3, in x_0=5 la funzione $(x-5)^{2/3}$ è un infinitesimo di ordine 2/3, per $x_0=\infty$ la funzione sen(x)/x è un infinitesimo del 1° ordine, si intende rispetto all'infinitesimo campione 1/x.

Parte principale e parte secondaria di un infinitesimo (molto importante).

Teorema: Se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, allora f(x)=l.g(x)+o(x), dove **o(xx) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g(x)** o, il chè è lo stesso, rispetto a l.g(x), che si chiama parte principale dell'infinitesimo f(x); o(x) si chiama parte secondaria.

Dimostrazione. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{o(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-l.g((x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-l\right)=l-l=0.$

Esempi.

(1) Siccome $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sen(x)}{x}=1$, in un intorno di 0 sen(x)=x +o(x): **sen(x) è un infinitesimo del 1° ordine** più una parte secondaria che è un infinitesimo di **ordine superiore rispetto a x;** ciò significa che, per x →0, o(x) va a 0 più rapidamente di x e quindi o(x)=k.x$^{\alpha}$. (k è una costante che ancora non siete in grado di determinare), α è un numero reale, ovviamente maggiore di 1, che potete prevedere senza calcoli, con considerazioni di simmetria. *Sen(x) è una funzione dispari, x è dispari, dunque α =?*

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\text{Cos}(x)}{x^2}==\frac{1}{2}$, perciò per x→0 1-Cos(x) è un infinitesimo del 2° ordine, con x^2/2 infinitesimo principale. Segue che Cos(x)=1$-\frac{1}{2}$x^2 +o(x). L'infinitesimo secondario o(x) è un infinitesimo di ordine α >2, tipo k.x$^{\alpha}$. Non siete ancora in grado di calcolare k, ma potete *indovinare* α con considerazioni di simmetria.

(3) Da $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$, segue che, in un intorno di 0, Ln(1+x) =x +o(x). L'infinitesimo secondario o(x) è certamente di ordine maggiore di 1, e siccome x è dispari, mentre Ln(1+x) non è né pari né dispari, l'infinitesimo secondario o(x) non può essere di ordine 3, altrimenti Ln(1+x) sarebbe una funzione dispari. Forse o(x) potrebbe essere un infinitesimo di ordine 2. *Forse un bel dì vedremo.*

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, quindi e^x-1=x +o(x). Ciò consente di affermare che, in un intorno di 0, e^x =1+x+o(x). Come nell'esempio (3), **forse** o(x) è un infinitesimo di ordine 2.

Gli esempi proposti ci fanno intuire quale via seguire per calcolare, con precisione arbitrariamente grande funzioni come seno, coseno, esponenziale e logaritmo. Essi rappresentano solo il primo passo. Il passo ulteriore consiste nel considerare o(x) come funzione infinitesima della quale calcolare parte principale e parte secondaria e così via.

Ciò richiede il concetto di ***derivata*** e le sue proprietà; alla fine la funzione viene approssimata da un polinomio di grado arbitrariamente alto. Ciò consente di tabulare la funzione, approssimandola con un polinomio che richiede solo le quattro operazioni aritmetiche, le uniche che l'uomo sa fare.

Per il momento, utilizzando i risultati acquisiti, **calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale** dei seguenti **infinitesimi** per x→0:

Ln^2(1-x^2); e^x +sen(x) -1; x^4+(1-cos(x))^2; sen^2(x^2)/(1-cos(x)).

Utilizzando gli infinitesimi, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sqrt[3]{Ln\left(1+x^5\right)}};\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{Ln\left(1+x^6\right)}}{1-\cos(x)};\lim_{x\to 0}\frac{7^{x^2}-1}{1-\cos(x)};\lim_{x\to \pi}\frac{\text{Tan}(x)}{e^x-e^\pi};\lim_{x\to 1}\frac{Ln(x)}{sen(\pi x)};\lim_{x\to 1}\frac{Ln(x)}{\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}.$$

(nel 3° esercizio esprimere l'esponenziale in base 7 come esponenziale standard (base **e**) nel 4° porre x-π = z, così x→ π diventa z→0; nel 5° e nel 6° procedete in modo analogo.

Per x→ 0 ce la caviamo meglio (lo zero ci semplifica la vita)**.**

9. Infiniti.

Se in x_0 una funzione f(x) ha limite infinito, si dice che **in x_0 f(x)è un Infinito.**
Il concetto di Infinito è l'altra faccia del concetto di infinitesimo.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0,$ si dice **che i due Infiniti sono dello stesso ordine**.

Se invece $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty,$ si dice che **f(x) in x_0 è un Infinito di ordine superiore rispetto a g(x),** se tale limite è 0, diremo che **f(x) è un Infinito di ordine inferiore rispetto a g(x).**
Infine, se tale limite **non esiste**, i due Infiniti **non sono confrontabili**. (**Stesso discorso** vale per gli infinitesimi).
Se i due Infiniti sono di ordine uguale, si può scrivere f(x)=l.g(x)+O(g(x)). Il primo addendo, l.g(x), si chiama ***parte principale*** dell'Infinito f(x), O(g(x)) ***parte secondaria***. Questa risulta un **Infinito** di **ordine inferiore** rispetto a g(x). Infatti $\lim_{x\to x_0} \frac{O(g(x))}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - l.g(x)}{g(x)} = l - l = 0.$

*Si noti la perfetta simmetria tra i concetti di infinitesimo e di Infinito, basta scambiare i termini **0** e ∞**, ordine inferiore e ordine superiore.***
In una somma di Infiniti sono trascurabili quelli di ordine inferiore (rispetto a quelli di ordine massimo: *teorema di **Paperone***), come in una somma di infinitesimi sono trascurabili quelli di ordine superiore (rispetto a quelli di ordine minimo: *teorema di **Paperino***).
Infinito campione: se x_0 è finito, l'Infinito campione è per convenzione $1/(x-x_0)$, se $x_0=\infty$, l'infinto campione è x.
Per esempio, per x→0 $f(x)=1/x^2$ è un Infinito di ordine 2.

Per x→ +∞ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3} = \frac{\sqrt{x^2+O(x)}}{x^2+O(x^2)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ e per x→ −∞ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3} = ... = \frac{-x}{x^2} = \frac{-1}{x}.$

Per esercizio, si studi questa funzione e se ne tracci il grafico. S noti che tale funzione è pari, perciò in un intorno abbastanza ristretto di 0 (quanto ristretto?) f(0)=-1/3 è il valore massimo, ma nell'intero dominio la f(x) assume valori arbitrariamente grandi, Sup(f)=+ ∞ , perciò f(0) è quello che si chiama un *massimo relativo*.

Esempi. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+2x-19}+5x-2x^2}{\sqrt[4]{x^6-x^3-1}+\sqrt{x^4+x+7}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{\sqrt{x^4}} = -2.$ (La prossima volta deve bastare un'occhiata).

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-x-3}+\sqrt{x^2+2x-8}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-3}+\sqrt{x^2+2x-8}\right)$**. La prima radice quadrata è un Infinito dii ordine ½,** perciò trascurabile rispetto alle altre due di ordine 1. Fortunatamente entrambe tendono a +∞, perciò il limite della loro soma è +∞. **Ma se si fosse trattato di una differenza?**

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2+3)-(x^2+5)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+5}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-5}{2x} = 0^-$ **.** *(+∞ − ∞=0.Ma è sempre così? Vedo)*

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{x^2+4x+5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2-x+3)-(x^2+4x+5)}{\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{x^2+4x+5}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{2x} = -\frac{5}{2}$ *(+∞ − ∞ ≠0).*

Conclusione: +∞ − ∞ *è, come 0/0 e ∞/∞,* **una forma indeterminata,** cioè il valore dei limiti che si presentano sotto queste forme **non è prevedibile a priori, se gli ordini di Infinito sono uguali.** Occorre ridurre il limite a una forma **quoziente** e poi eseguire **manipolazioni algebriche**.

Esercizi di riepilogo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(xx)};\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{e^{2x}-1};\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{x^2}-1}{e^{2x}};\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x^2}-1}{e^{2x}};\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+2x-1}{x+1}}\right);\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+2x-1}{x+1}}\right);$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+2x-1}{x+1}}-x\right);\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+2x-1}{x+1}}-x\right);\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{x5+2x-1}{x+1}}-x^2\right);\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{x^3-3x-1}\right);$$

$$lm_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\sqrt{\frac{x}{(x-1)^2}}\right);lm_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\sqrt{\frac{x}{(x-1)^2}}\right).$$

Con gli strumenti matematici disponibili studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico qualitativo, indicando l'eventuale parità, l'esistenza di minimi o massimi e la loro posizione approssimativa.

$(5)y=\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+1};(6)y=\sqrt{x^2+2x-3}-x.$

10.Forme indeterminate.

Avete visto che il limite del rapporto di due infinitesimi dipende dal loro ordine e, a parità di ordine, dipende dalle particolari funzioni. Lo stesso succede per gli Infiniti.

Si dice brevemente, con linguaggio, credo, trasparente, che $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ sono forme *indeterminate*.

Anche +∞ - ∞ , *se gli ordini di infinito sono **uguali***, è una forma indeterminata, come si è visto negli esempi ed esercizi proposti, e occorre ridurre alla forma quoziente, **più maneggevole**, mediante l'identità $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$ e sperando che il numeratore si semplifichi e non riproduca la forma +∞ - ∞.

In ogni caso le forme indeterminate si risolvono portandole alla forma quoziente, che risulta la più conveniente per il calcolo.

Naturalmente, + ∞ + ∞=+∞ e -∞ - ∞ = - ∞. In questi casi non c'è indeterminazione: se per ogni numero reale k f(x)>k e g(x)>k, allora f(x)+g(x)>2k (e se f(x)<k e g(x)<k, anche f(x)+g(x)<2k).

0.∞ =**0/0** oppure ∞/∞ **(infatti 1/0=∞ e 1/∞=0, con ovvio significato dei simboli).**

Ci sono ancora tre forme indeterminate, che si riducono a 0.∞ con l'identità $a^b=e^{bLn(a)}$:

$(0^+)^0=e^{0.Ln(0^+)}=e^{0.\infty};$

$(+\infty)^0=e^{0.Ln(+\infty)}=e^{0.\infty};$

$1^\infty=e^{\infty Ln(1)}=e^{\infty.0}.$

Invece

$(0^+)^{+\infty}=e^{+\infty Ln(o^+)}=e^{+\infty.(-\infty)}=e^{-\infty}=0^+$ **Non è una forma indeterminata**

$(0^+)^{-\infty}=e^{-\infty Ln(o^+)}=e^{-\infty.(-\infty)}=e^{+\infty}=+\infty$ **Non è una forma indeterminata**

La notazione usata è una sorta di stenografia per evitare un simbolismo rigoroso ma pesante.

Per esempio, 1^∞ significa: limite per $x\to x_0$ di $[f(x)]^{g(x)}$, quando f(x) ha limite 1 e g(x) ha limite ∞.

Decodificate, per ***esercizio,*** le altre notazioni stenografiche.

Si ricordi che in generale il calcolo dei limiti richiede l'uso di alcuni teoremi, come la regola di *de L'Hospital* basata sul concetto di derivata, che a sua volta è basato sul concetto di limite.