Ottavio Serra

Appunti di Analisi Infinitesimale

(per il Liceo)

Seconda parte: Derivate

1. Problema della tangente.

Data una funzione y=f(x) di D→$\mathbb{R}$,,x_0 punto d'accumulazione di D appartenente a D, si dice ***retta tangente*** al grafico di f nel punto $P_0(x_0; y_0=f(x_0))$ la retta, se esiste, che ha in comune col grafico ***almeno due punti coincidenti in P_0.*** Nel fascio di rette di centro P_0, insomma, va scelta quella avente il giusto coefficiente angolare m. Se tale m non è determinato o non esiste, vuol dire che la tangente non è determinata (tangente destra diversa da quella sinistra) o non esiste.

Si prenda un x in D, $x \neq x_0$, e sia P(x,y=f(x)) il corrispondente punto del grafico. Il coefficiente angolare della ***retta secante*** P_0P è $m_s = \frac{y-y_0}{x-x_0}) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, dove il denominatore è l'incremento della variabile indipendente (dell'ascissa), il numeratore è l'incremento della funzione (dell'ordinata); pertanto m_s viene detto ***rapporto incrementale***. *Se x→x_0, equivalente a dire che l'incremento Δx→0, (e P→P_0) si dovrebbe ottenere il coefficiente angolare m della tangente. Vedi fig.1*

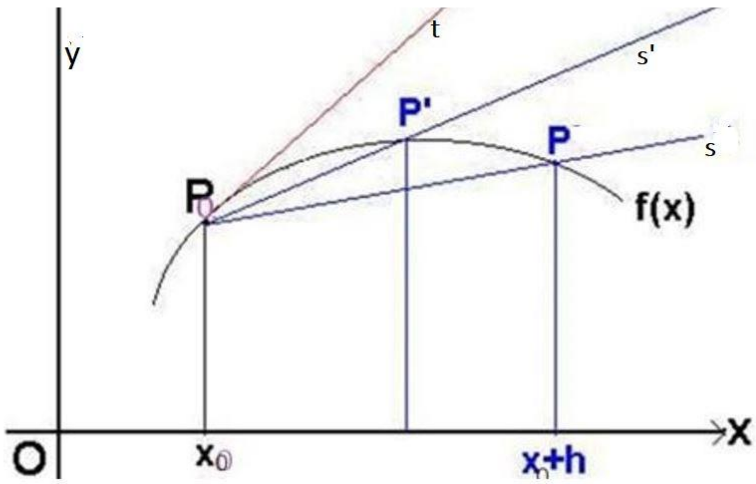

fig.1 (h=Δx)

Il coefficiente angolare della tangente è perciò definito dal seguente limite

[1]]$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, se tale limite esiste (determinato e finito).

Esempio semplice, controllabile con i metodi della geometria analitica. Tangente al grafico di $y=x^2$ nel punto $P_0(c; c^2)$. $m = \lim_{x\to c} \frac{x^2-c^2}{x-c} = \lim_{x\to c}(x+c) = 2c.$ Poi la tangente è facile: $y-c^2=2c(x-c)$.

Altro esempio. Tangente al grafico di $y=x^3-5x$ nel punto di ascissa c.

$$m = \lim_{x\to c} \frac{x^3-5x-(c^3-5c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\left[\frac{x^3-c^3}{x-c} - \frac{5x-5c}{x-c}\right] = \lim_{x\to c}\left[x^2+cx+c^2-5\right] = 3c^2-5.$$

2. Problema della velocità.

Il problema della velocità è in realtà più complesso di quello della tangente, perché il moto avviene nello spazio tridimensionale. Detta s=s(t) la traiettoria di una particella in funzione del tempo, ogni punto di s P(x,y,z) è una terna di funzioni: x=x(t), y=y(t), z=z(t). La seguente fig.2 rappresenta l'ascissa x in funzione del tempo. Dovreste immaginare altre due figure per y(t) e z(t).

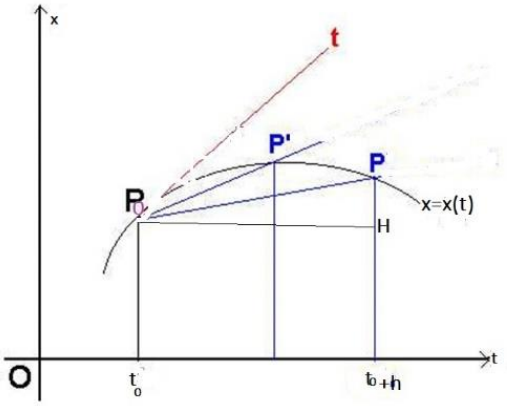

fig.2 (h=Δt)

$P_0H = \Delta t$, $HP = \Delta x$, il rapporto incrementale $\Delta x/\Delta t$ dà la velocità media (lungo l'asse x) nell'intervallo di tempo Δt, il suo limite, per $\Delta t \rightarrow 0$ la velocità istantanea $v_x(t_0)$(nel punto P_0) all'istante t_0.
Se il moto è unidimensionale, abbiamo finito. **Se il moto avviene lungo una curva** (traiettoria) s dello spazio, di cui x rappresenta l'ascissa curvilinea, cioè la lunghezza x(t) della traiettoria percorsa da P_0 a P, alla fine troviamo che la velocità istantanea è un vettore avente la direzione tangente alla traiettoria.
Siccome il limite del rapporto incrementale compare in innumerevoli situazioni con significati diversi, si è convenuto di dargli un **nome *neutrale*: *derivata.***

3. Derivata di una funzione y=f(x) in un punto c (x_0, t_0 o come volete chiamarlo) del suo dominio, simbolo f'(c), è

[1] $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, **se esiste determinato e finito**.

Può accadere che il limite del rapporto incrementale nell'intorno sinistro di c sia diverso da quello nell'intorno destro; in tal caso si parla di **derivata sinistra** e di **derivata destra**, ma la funzione **non è derivabile in c.** Esempio: $f(x)=x^2$ per $x \leq 1$, $f(x)=2-x^2$ per $x>1$. Verificate che in c=1 la derivata sinistra vale 2, la derivata destra vale -2: $f'(1^-)=2$, $f'(1^+)=-2$. Segue che la tangente sinistra è y=2x-1, la tangente destra è y=-2x+3. Fate un disegno: noterete che il grafico nel punto di ascissa c=1 non è liscio, è ***appuntito***, si parla dii **punto angoloso: le due tangenti formano un angolo.** Vedi fig.3

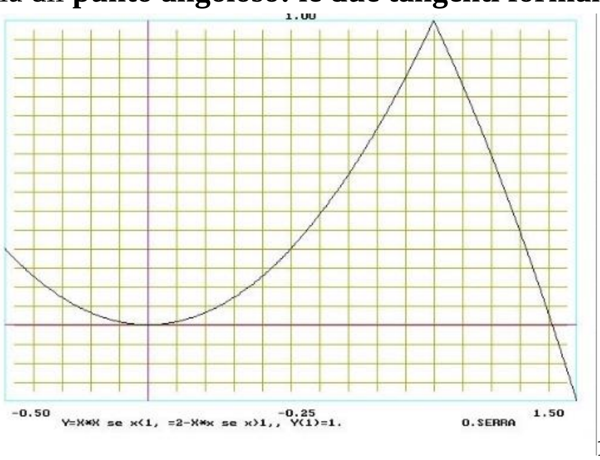

fig.3

Un esempio interessante. Calcolare la derivata di $y=\sqrt[3]{x^2}$ nel punto c=0 Si ha $y'(c)=\lim_{x\to c}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{c^2}}{x-c}=...=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}$. Sfruttate l'identità $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,per cui $a-b=(a^3-b^3)/(\ldots)$.

Non disperate, fra breve imparerete tecniche molto veloci.

Notate che y' è negativa nei punti c<0, positiva nei punti c>0. Se fate un grafico, notate che la funzione y(x) decresce per x<0, cresce per x>0. Nel punto c=0 (x==0) la funzione vale 0. y(0)=0. Ma che succede alla derivata? Il limite sinistro della derivata è -∞, il limite destro è +∞. Le due tangenti tendono a divenire ***infinitamente ripide, una decrescendo e l'altra crescendo*** e, graficamente, coincidono con la **retta *verticale*** x=0. Il punto (0; 0) del grafico è **particolarmente appuntito:** in tal caso si dice che il punto è una **cuspide.**

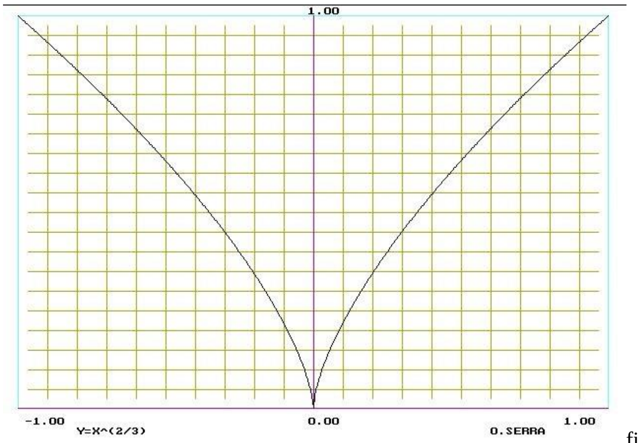

fig.4 Cuspide

Può accadere che in un punto angoloso una tangente sia *verticale* e l'altra *obliqua*; il punto angoloso ha una forma a *becco d'uccello*, come in fig.5

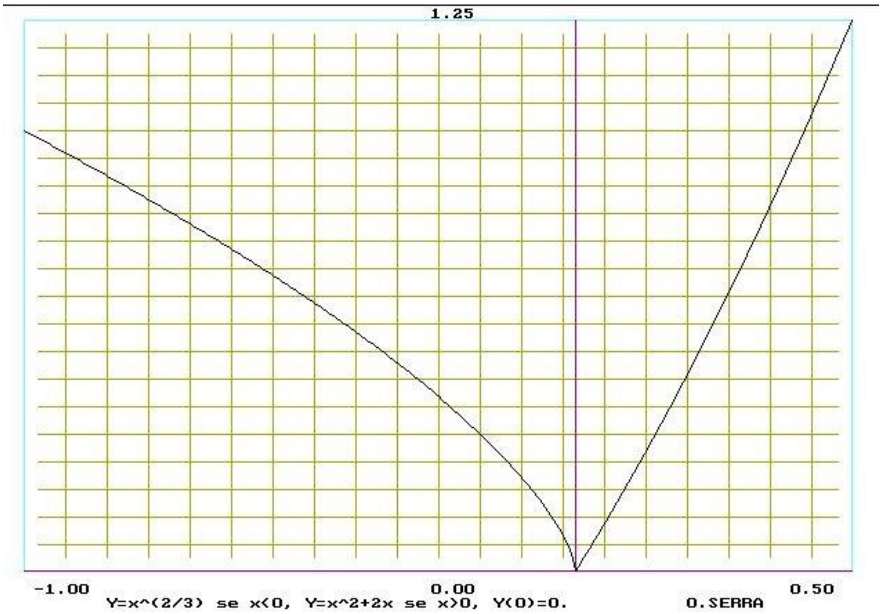

fig.5

Nota sulla fisica. In fisica *classica* (**non** *quantistica*) le leggi che descrivono l'evoluzione dei fenomeni sono rappresentate da funzioni **continue** *(Natura non facit saltus*, diceva il filosofo e matematico Leibniz), anzi addirittura derivabili. Segue che la velocità è ben definita in ogni punto della traiettoria. Questa non può avere punti angolosi, perché ciò significherebbe che in tempo nullo la velocità cambierebbe di una quantità finita (non nulla), ma in tempo nullo nulla può succedere.

4. Calcoliamo ora le derivate di base (con le quali costruiremo tutte le altre).

Una nota. Se si fa variare il punto x_0 (*o c che dir si voglia*) in cui si calcola la derivata di f(x), nasce una nuova funzione che si chiama (**funzione**) ***derivata*** di f(x) e che si denomina f'(x).
Spesso la derivata di f(x) si indica con Df(x).

(a) Dk=0 (*la derivata di una costante è zero*). Infatti Δk=0, eccetera.

(b) Dx=1 (*la derivata della variabile indipendente è 1*). Infatti Δy=Δx, eccetera.

(c) Dsen(x)=cos(x). Infatti

$$Dsen(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x+\Delta x)-sen(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x)\cos(\Delta x)+\cos(x)sen(\Delta x)-sen(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(sen(x)\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}+\cos(x)\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\right)=sen(x).0+\cos(x).1=\cos(x).$$

(d) Dcos(x)=-sen(x). Procedere come per Dsen(x), con la formula di addizione per il coseno.

(e) $De^x=e^x$ (**L'unica funzione che ha per derivata se stessa).** Infatti

$$De^x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(e^x\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)=e^x.1=e^x.$$

Calcolare per esercizio: D[Ln(x)] (R. 1/x), D[tang(x)] (R. $1+tang^2(x)=1/cos^2(x)$), D[cotang(x)] (R. $-1/sen^2(x)$).

Questi risultati, e tanti altri, **li otterremo velocemente tra breve con i teoremi sulle derivate.**

5. Teoremi sulle derivate.

(a) Se una funzione è derivabile in un punto c del suo dominio, ivi è continua. Ricordo la definizione di continuità: $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}[f(c++\Delta x)-f(c)]=0\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$ Cioè, una funzione è continua in c se il suo incremento è infinitesimo come l'incremento della variabile x. Segue

$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}.\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=y'.0=0.$ Il teorema è dimostrato.

La continuità è condizione **necessaria, ma non sufficiente,** per la derivabilità. Viceversa, la *derivabilità* è condizione **sufficiente**, ma non **necessaria**, per la continuità (*Vedi grafici con punti angolosi*).

(b) D[a.f(x)+b.g(x)]=a.Df(x)+b.Dg(x). (a e b costanti). Facile. Dimostratelo per esercizio.

In particolare, la derivata della somma (di due funzioni derivabili) è la somma delle derivate.

(c) D[f(x).g(x)]= Df(x).g(x)+f(x).Dg(x). Infatti: $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x}\right)=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-g(x+\Delta x).f(x)+g(x+\Delta x).f(x)-f(x).g(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=g(x).Df(x)+f(x).Dg(x).$$

Ho fatto uso del teorema (a), per cui ho potuto concludere che $\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x).$

(d) se g(x) è diversa da 0 in un punto x, allora $D\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$. Infatti

$$D\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x).f(x+\Delta x)-f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x[g(x).g(x+\Delta x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x).f(x+\Delta x)-f(x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)+f(x).g(x)}{\Delta x[g(x).g(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{g(x).g(x+x)}\left(g(x).\frac{\Delta f}{\Delta x}-f(x).\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)\right]=$$

$$=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}.$$

Applicazione. $D\,\mathrm{Tan}(x)=D\frac{Sen(x)}{\mathrm{Cos}(x)}=\frac{\mathrm{Cos}(x).\mathrm{Cos}(x)-Sen(x)-(-Sen(x))}{\mathrm{Cos}^2(x)}=1+\mathrm{Tan}^2(x)\equiv\frac{1}{\mathrm{Cos}^2(x)}.$

Verificate che DCotan(x)= $-1/\mathrm{Sen}^2(x)$ = $-[1+\mathrm{Cotan}^2(x)$.

(e) **Derivata di una funzione composta**. Se z=f(y) è derivabile rispetto a y e y=g)(x) è derivabile rispetto a x, allora la funzione composta f(g(x)) è derivabile rispetto a x e risulta D[f(g(x))]=f'(g).g'(x).

Nota *sulla notazione*. Si deve a **Leibniz** una comoda e trasparente notazione per la derivata:

se y=f(x) è derivabile rispetto a x, la f'(x) (Df(x)) si indica con dy/dx o df/dx che ricorda il rapporto incrementale dal quale segue la derivata con un passaggio al limite. Nel nostro caso il teorema, con la notazione di Leibniz, si scrive: $\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{df}{dg}.\frac{dg}{dx}$. (**Non vi venga in mente di semplificare!** Non si tratta del prodotto di ***due frazioni***, ma del prodotto di ***due funzioni***). Ora la dimostrazione:

$$\frac{df(g(x))}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(g)}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(g)}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta g\to 0}\left(\frac{\Delta f(g)}{\Delta g}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right)=\frac{df}{dg}.\frac{dg}{dx}.$$

(*la funzione g(x), essendo derivabile, è continua e, perciò, se Δx→0, anche Δg→0*).

La notazione di Leibniz ha soppiantato quella di Newton, perché indica senza bisogno di parole rispetto a quale variabile si intende fare la derivata. **Esempi:**

$$\frac{d(xy^2)}{dx}=y^2,\frac{d(xy^2)}{dy}=2xy.$$

Il teorema di derivazione delle funzioni composte è **molto potente.**

Applichiamolo alla derivata di x^α, essendo **α** un qualsiasi numero reale (x>0: perché?).

$$\frac{dx^\alpha}{dx}=\frac{de^{\alpha Ln(x)}}{dx}=\frac{de^{\alpha Ln(x)}}{d(\alpha Ln(x))}.\frac{d(\alpha Ln(x))}{dx}=e^{\alpha Ln(x)}.\alpha\frac{1}{x}=x^\alpha.\frac{\alpha}{x}=\alpha.x^{\alpha-1}.$$ (***In seguito saremo più svelti***).

Dunque, $d(x^2)/dx=2x$, $d(x^5)/dx=5x^4$,…, $d(x^{4/3})/dx=(4/3)x^{1/3}$, $d(x^{1/2})/dx=1/(2x^{1/2})$, eccetera.

Quando non c'è ambiguità, useremo tranquillamente i simboli f'(x) o Df(x). Es. $(3x^2)'=6x$.

(f) **Derivata delle funzioni inverse.** Sia y=f(x) una funzione biunivoca di A (dominio) su B (immagine). La funzione inversa f^{-1} applica B su A, risultando $x=f^{-1}(y)$ se y=f(x). **Vale il seguente teorema**: nei punti x in cui f'(x) è diversa da zero, sarà $df^{-1}(y)/dy=1/f'(x)$. Infatti

$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1/\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}$. **Questo teorema è semplice e potente.**

Alcuni esempi. Data y=Ln(x) calcolare y'=D[Ln(x)].

y=Ln(x) →x=e^y, perciò dx/dy=d(e^y)/dy=e^y e infine dy/dx=1/e^y, ovvero DLn(x)=1/x, perché e^y=x.

(Risultato che sapevate già, se lo avete calcolato precedentemente applicando la definizione).

Derivata di y=ArcSen(x). Da y=ArcSen(x) segue x=Sen(y), dSen(y)/dy=cos(y) e quindi

$$\frac{dArcSen(x)}{dx} = \frac{1}{cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivata di y=ArcTan(x). Da questa segue x=Tang(y), dTan(y)/dy=1+Tan^2(y) e quindi

$$\frac{dArc\,\mathrm{Tan}(x)}{dx} = \frac{1}{1+\mathrm{Tan}^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Esercizi. Verificate che $DArc\,\mathrm{Cos}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, DArc\,\mathrm{Cotan}(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

Siccome la derivata di una costante è zero e dArcSen(x)+DArcCos(x)=0, **forse** la somma

ArcSen(x)+ArcCos(x) è una costante (*nell'intersezione dei loro domini*!). Verificate che è così, calcolando la somma. **Stesso quesito** per ArcTan(x)+ArcCotan(x).

Esercizio. Calcolate la derivata di $y = Arc\,\mathrm{Tan}(x) + Arc\,\mathrm{Tan}\frac{1-x}{1+x}$ e verificate che y'=0. **Questa volta**, però, y non è costante nel suo dominio, come vi invito a verificare. **Quale potrebbe essere**, secondo voi, il motivo della **differenza con i due casi precedenti?** ***(vedere più avanti il corollario del teorema di Lagrange).***

6. Teoremi fondamentali per le applicazioni geometriche e per il calcolo numerico. \

(a) Teorema di Weierstrass: Se una funzione f(x) è continua in un intervallo chiuso e limitato, essa ammette massimo e minimo (**assoluti**).

Il teorema è molto delicato e **non lo dimostro**, però farò degli esempi per far capire che se viene meno anche una sola delle ipotesi, l'esistenza del massimo o del minimo *non è garantita*.

1° f(x)=ArcTan(x) è continua su ***R***, che è un intervallo chiuso ma non limitato. Sup è finito (π/2) ma non è Max (è il lim per x→+∞); L'Inf è finito (-π/2) ma non è Min (è il lim per x→-∞).

2° $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ continua in]-1; 1[, che è un intervallo **limitat**o ma **non chiuso.** Il Sup è +∞ e non può essere Max; il Min *invece* esiste e vale 1 (per x=0). (**Non garantito** non significa **non può essere**).

3° f(x)=Sen(x) è continua su $\mathbb{R}$, intervallo non limitato, però ha Max = 1 e Min = -1.

4° Sia data la funzione f(x) definita in [-1; 1] come segue: f((x) =1 per x>0, f(x)=-1 per x<0, f(x)=0 per x=0. Essa è definita su un intervallo chiuso e limitato, però non è continua nel punto x=0, tuttavia ha Max=1 e Min=-1.

Nota importante. Se il massimo (**assoluto**) esiste, per esempio se è garantito dal teorema di Weierstrass, esso è il più grande tra gli eventuali massimi relativi e i valori estremi, cioè i valori che la funzione assume agli estremi del dominio se questo è un intervallo chiuso e limitato.

Analogo discorso vale per il minimo (**assoluto**). Per determinarli la via migliore è studiare la funzione e disegnare il grafico.

Esercizi. Utilizzate solo tecniche già note.

1°. Studiare la funzione $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$, determinando dominio, valori estremi, Max e Min (assoluti), grafico.

2° Studiare la funzione $f(x)=\sqrt{10-x-x^3}$, determinando dominio, valori estremi, Inf e Sup, Max e Min (se esistono), Grafico. Calcolate la derivata f'(x) e il suo limite per x→2. Questo risultato vi serve per disegnare più accuratamente il grafico nelle *vicinanze* di x=2 (in che senso?).

3° Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+1}$, determinando il **dominio** (***banale***), intersezioni con gli assi cartesiani, positività (a questo punto dovreste aver capito che la funzione possiede un **minimo relativo** posizionato più o meno …), asintoto orizzontale (a questo punto dovreste aver capito che il minimo relativo è **Min, cioè minimo assoluto**), intersezione con l'asintoto **orizzontale.** (Perché, se l'asintoto orizzontale esiste, è unico?). (A questo punto dovreste aver capito che la funzione possiede il **Max, cioè il massimo assoluto**, posizionato più o meno …). Ora disegnate il grafico.

Infine, una sfida alla vostra bravura. Con le tecniche finora acquisiti, guardando il grafico e facendo appello alle vostre reminiscenze di geometria analitica, cercate, intuite una via per calcolare in modo esatto le coordinate di Min e di Max.

(b) Teorema dei valori intermedi. Se una funzione y=f(x) è continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b], allora assume tutti i valori intermedi tra Min e Max, cioè per ogni k compreso tra Min e Max esiste **almeno** un punto c di [a; b] in cui f(c)=k.

Questo teorema è **utile** in molti contesti, per esempio in un semplice algoritmo per approssimare la radice di un'equazione f(x)=0, con f(x) continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b].

Se f (a).f(b)<0, **esiste almeno un** $c\in]a,b[$ tale che f(c)=0. Se poi f(x) è monotòna nell'intervallo (è sempre crescente o sempre decrescente), la radice c sarà **unica**. Il metodo è detto algoritmo di bisezione. **Il teorema risulterà, in seguito, necessario** per dimostrare il **teorema fondamentale** del **calcolo integrale.**

Questo teorema è molto intuitivo e graficamente evidente e non sarà dimostrato. Faccio solo un controesempio. Considero la funzione f(x)=ArcTa(x)-ArcTan[(x-1)/(x+1)] in [-2; 2]\{-1}, f(-1)=0.

La funzione è definita in tutti i punti di [-2; 2], che è un intervallo chiuso e limitato, tuttavia non è continua (**calcolare i limiti destro e sinistro per x→ -1**) e, pur ammettendo il Min=-3π/4 e il Max=π/4, non assume nessun altro valore intermedio, **tranne 0,.**

(c) Teorema di Rolle. E' un *lemma* per dimostrare i teoremi successivi. **Enunciato:** Se f(x) è continua in [a; b], derivabile in]a; b[e con valori estremi uguali, cioè f(a)=f(b), allora esiste almeno un punto c interno ad [a; b] in cu f'(c)=0.

Dimostrazione. Per il teorema di Weierrstrass f(x) possiede Min e Max e dunque esistono almeno due punti, c e d, in [a; b] tali che f(c)=Max e f(d)=Min. Se i punti c e d coincidessero uno con a e l'altro con b, avremmo Min=Max, la f(x) sarebbe costante e in ogni punto interno avremmo f'(x)=0. Resta il caso che almeno uno, tra a e b, sia interno ad [a; b], per esempio c: Max=f(c). Allora in c Δf<0 e preso un Δx abbastanza piccolo in modo che c+Δx resti in [a; b], si avrà Δf/Δx>0 in un intorno sinistro di c, Δf/Δx<0 in un intorno destro di c. Passando al limite, per Δx→0, avremo $f'(c^-))\geq 0$, $f'(c^+)\leq 0$ (al limite, **ricordate**, le disuguaglianze si attenuano). Ma f(x) è derivabile in]a; b[, pertanto le derivate destra e sinistra coincidono: $f'(c^-)=f'(c^+)=f'(c)$ non minore e non maggiore di 0 → $f'(c)$ ==0.

Ricordando che la derivata è il coefficiente angolare della retta tangente, il teorema di Rolle si può enunciare dicendo che nelle ipotesi poste **esiste *almeno* un punto in cui la tangente al grafico è parallela all'asse delle ascisse.**

Esercizio. Verificare il teorema di Rolle per $f(x)=(x^2+x-2)/(x+3)$ in [-2; 1].

(d) Teorema di Cauchy Siano date due funzioni. f((x) e g((x), continue in [a; b], derivabili nei punti interni, cioè nell'aperto D=]a; b[e con g(b)≠ $g(a)$; esiste allora **almeno** un punto interno c in cui $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, cioè in cui il rapporto delle derivate è uguale al rapporto degli incrementi globali delle due funzioni. **Il teorema** non ha un'interpretazione geometrica evidente come il teorema di Rolle, esso però è fondamentale per dimostrare ***il teorema del valore medio di Lagrange*** e il teorema di **de l'Hospital**, importante per il calcolo rapido di limiti in *forma indeterminata quoziente* e per lo sviluppo di una funzione *in polinomio di Taylor* ***(ciò consente di calcolare seno, coseno esponenziale e logaritmo)***.

Dimostrazione. Si costruisca la funzione h(x)=[g(b)-g(a)].f(x)-[f(b)-f(a)].g(x): questa funzione è continua in [a; b] e derivabile nei punti interni perché combinazione lineare a coefficienti costanti di funzioni che godono di tali proprietà; inoltre h(a)=h(b), come si verifica con un calcolo elementare. Perciò, per il teorema di Rolle, esiste un punto interno ad [a; b], diciamo c, in cu h'(c)=0. **Segue tesi.**

(e) Teorema di Lagrange. Caso particolare di quello dii Cauchy, quando g((x) è la funzione identica g(x)=x, per cui si ottiene $f'((c)=\frac{f(b)-f(a))}{b-a}$, il cui significato geometrico è trasparente: nelle ipotesi poste, esiste *almeno* un punto interno in cui la tangente è parallela alla corda che unisce gli estremi.

Esercizi. Verificate che la funzione $f(x)=x^3-3x+1$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo [0, 2]. Calcolare c e f(c), disegnare la tangente al grafico in (c; f(c)) e la corda dei punti estremi. Avrete notato che il grafico interseca l'asse delle ascisse in tre punti distinti, questo è un potente ausilio per capire quante radici **reali** ha un'equazione; nel nostro caso ***vediamo*** *che l'equazione algebrica* ***x^3-3x+1=****0* ha il massimo numero di radici reali previste dal teorema fondamentale dell'algebra. *Calcolarle poi con un certo numero di cifre decimali è un altro discorso, ma è facile*.

Corollario del teorema di Lagrange. *Nelle ipotesi del teorema di Lagrange, se la derivata f'(x)=0 per tutti i punti x interni ad [a; b], allora f(x) è costante in [a; b].* Preso infatti un punto x>a in [a; b], per il teorema di Lagrange applicato all'intervallo [a; x] esiste un punto c interno ad [a; x] nel quale

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$, ma f'(c)=0 per l'ipotesi di questo corollario, perciò f(x)=f(a), cioè f è costante.

(f) Teorema di de l'Hospital. *Se f(x) e g(x) sono continue in un intervallo contenente il punto c e risulta f(c)=g(c)=0, allora* $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(Se le funzioni sono derivabili nell'intorno di c). Se il rapporto delle derivate dovesse riprodurre la forma indeterminata 0/0****, si può riapplicare il teorema****).*

Dimostrazione. Si applica il teorema di **Cauchy** all'intervallo di estremi x e c: $\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, essendo ξ un conveniente punto interno all'intervallo [c; x] (o [x; c]). Passando al limite per x→c, anche ξ tenderà a c, essendo compreso tra c e x, perciò $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to c}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. ***Siccome l'abito non fa il monaco***, alla fine potremo chiamare **x** la variabile **ξ.**

Esempi. $\lim_{x\to 0}\frac{Sen(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Cos}(x)}{1}=1$, come già dimostrato nella **parte prima** (**Limiti**).

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{Cos}(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{Sen(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Cos}(x)}{1}=\frac{1}{2}$. (*Ho applicato due volte il teorema*).

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$. $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1}=1$. (*Fin qui niente di nuovo, solo conferme*).

Nota. Il teorema si applica anche alla forma ∞/∞, le altre forme indeterminate vanno ricondotte alle forme quoziente.

$\lim_{x\to 0^+}xLnn(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{Lnn(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0^-$ **.** (Che ci dice quel segno "*meno*": 0^- ?).

Esercizi. (1) Siccome $\lim_{x\to 0}\frac{Sen(x)}{x}=1$, in un intorno di 0 Sen(x)=x+o(x). (Vedi **Limiti**). o(x) deve essere un infinitesimo di **ordine 3** (Sen(x) e x sono funzioni dispari), perciò Sen(x)=x+a.x^3+o(x^3). Calcolare a. Ripetere il processo per o(x^3) e approssimare Sen(x) con un polinomio di 5° grado. Applicare il risultato al calcolo di Sen(1^{rad}), (1radia = 57° circa) e verificare con una calcolatrice che l'errore è inferiore a 2 decimillesimi. **Verificare** poi che $\lim_{x\to 0}\frac{Sen(x)-x}{x^2}=0$**,** per rafforzare l'dea, già asserita, che il seno, essendo una funzione dispari, può essere approssimato solo da una somma di monomi di grado dispari.

(2) Stesso esercizio per Cos(x); con un polinomio di **4° grado** l'errore su Cos(1) è **poco più** di 1 millesimo, con un polinomio di **6° grado** l'errore è **minore** di 3 centomillesimi. (Ricordate: Il Coseno è una funzione **pari**).
Se tabulate le differenze tra i valori *esatti* di Sen(1) e Cos(1) della calcolatrice e i valori approssimati con i polinomi di 1°, 3° e 5° grado per il sen(1), di 2°, 4° e 6° grado per il Coseno(1), noterete che gli errori sono di segno alterno e progressivamente più piccoli in valore assoluto. Questo è un caso fortunato che non sempre si verifica; ci permette di affermare che l'errore non supera, in valore assoluto, il primo addendo trascurato.
(3) In un intorno di 0 la funzione $e^x = 1+x+ o(x)$. La Funzione e^x non è né parii né dispari, d'accordo col 2° membro dell'uguaglianza: 1 è funzione pari, x è dispari. Perciò, per simmetria, mi aspetto che o(x) sia un infinitesimo di ordine 2, $o(x)=a.x^2$. Calcolate a e poi, sul successivo infinitesimo $o(x^2)$ calcolate il coefficiente b, in modo che $e^x=1+x+a.x^2+b.x^3+ o(x^3)$. Questa volta, però, i coefficienti **non sono** a segno alterno ed è più complicato stimare l'errore. Per esercizio calcolate il numero ***e*** (x=1), usando il polinomio approssimante di 3° grado. Calcolate poi con lo stesso polinomio di 3° grado la $\sqrt{e}$ (x=1/2). Dovremmo avere un'approssimazione migliore, perché ½ è più piccolo di 1.
Per e^2 il polinomio di3° grado dà un'approssimazione peggiore (confrontare col valore della calcolatrice). **La stima dell'errore richiede concetti che non introdurrò in questi appunti. Solo nella parte terza, *Integrali e Serie*,** tratterò il problema della convergenza, cioè delle limitazioni eventuali da imporre alla x perché il polinomio che stiamo costruendo, **polinomio di Taylor**, approssimi veramente la funzione sempre meglio al crescere del grado del polinomio.

(g) Applicazione allo studio delle funzioni.
a) Una funzione y=f(x) si dice crescente in un punto c (del dominio), se al crescere di x (verso destra) il valore di f(x) aumenta (l'ordinata si sposta verso l'alto). In simboli: $\Delta y/\Delta x>0$. Analogamente, la funzione è decrescente in c, se $\Delta y/\Delta x<0$. Se f(x) è derivabile in c, avremo, rispettivamente, $f'(c) \geq 0$ *e* $f'(c) \leq 0$.
. Se $f'(c)>0$, in c la f(x) è crescente in senso stretto, se $f'(c)<0$, f(x) è decrescente.
(b) In c f(x) ha un massimo relativo se in un intorno di c, I(c), $\Delta y <0$ (o ci si sposti a sinistra o a destra, la y diminuisce). In c la f(x) potrebbe avere un punto angoloso, ma se è derivabile, $f'(c^-)=f'(c^+)$ e inoltre $f'(c^-)\geq 0$ e $f'(c^+)) \leq 0$ implica $f'(c)=0$.
(c) In c f(x) ha un minimo relativo se in un intorno di c, I(c), $\Delta y >0$ (o ti sposti a sinistra o a destra, la y aumenta). In c la f(x) potrebbe avere un punto angoloso, ma se è derivabile, $f'(c^-)=f'(c^+)$ e inoltre $f'(c^-)\leq 0$ e $f'(c^+) \geq 0$ implica $f'(c)=0$.
(d) Dunque, se f è derivabile in c, sia in caso di massimo sia di minimo relativo $f'(c)=0$. Graficamente ciò significa che la tangente al grafico in (c, f(c)) è *orizzontale* e che in un intorno di c il grafico sta tutto al di sotto della tangente in caso di massimo relativo, tutto al di sopra in caso di minimo relativo. Per distinguere i due casi, si osserva il segno di f'(x): si ha massimo relativo se $f'(x)>0$ nell'intorno sinistro I(c-) e $f'(x)<0$ in I(c+). Il contrario, in caso di minimo relativo.
Può accadere che $f'(c)=0$, ma f'(x) ha segno costante in $I_0(c)$: in questo caso il grafico attraversa la tangente (orizzontale) passando da sotto a sopra la tangente se $f'(c)>0$ nell'intorno bucato di c, $I_0(c)$, da sopra a sotto se $f'(c)<0$. Il grafico nel punto c ha un **flesso** a *tangente orizzontale*.

(e) Convessità, concavità, flessi.

Si dice che in c la f(x) è convessa, se in un intorno di c il grafico sta al disopra della tangente. Ciò intanto richiede che f(x) sia derivabile in c. L'incremento del coefficiente angolare, cioè della derivata f'(x)è negativo in I(c⁻) e positivo in I(c+), perciò $\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x} > 0$ in tutto $I_0(c)$ e se f'(x) è derivabile in I(c), $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f''(x)}{\Delta x} \geq 0$. Questo limite è la derivata della derivata di f(x) e si chiama derivata seconda di f(x) (rispetto a x), in simboli f ''(x) ovvero, con la notazione di Leibniz, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$. Si conclude che se la derivata seconda f ''(c)>0, f(x) è convessa in c.

Discorso analogo si fa se f''(c)<0: il grafico di f sta al di sotto della tangente e la funzione f(x) si dice concava in c.

Resta da analizzare il caso in cui f''(c)=0. Se in un $I_0(c)$ f''(x)>0, f è convessa, se f''(x)<0, f è concava, se invece cambia segno passando da $I_0(c^-)$ a $I_0(c^+)$, il grafico *attraversa la tangente* ed f(x) ha in c un flesso., ascendente se il grafico passa da concavo a convesso, discendente al contrario.

Schemi grafici (di chiarimento e riepilogo).

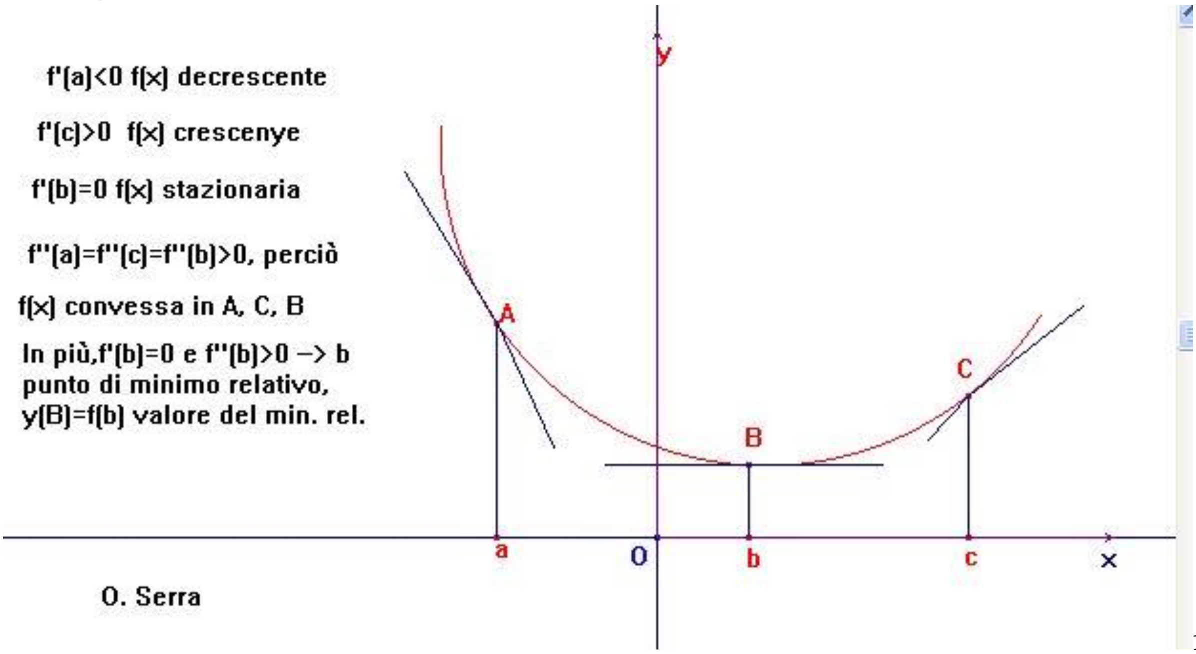

fig.6

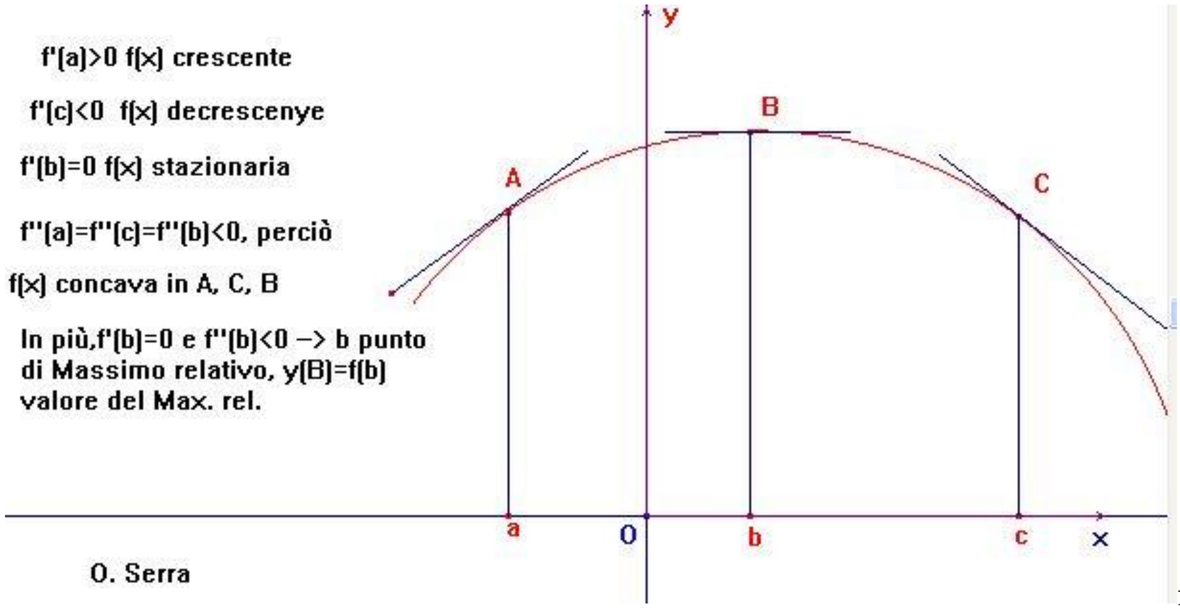

fig.7

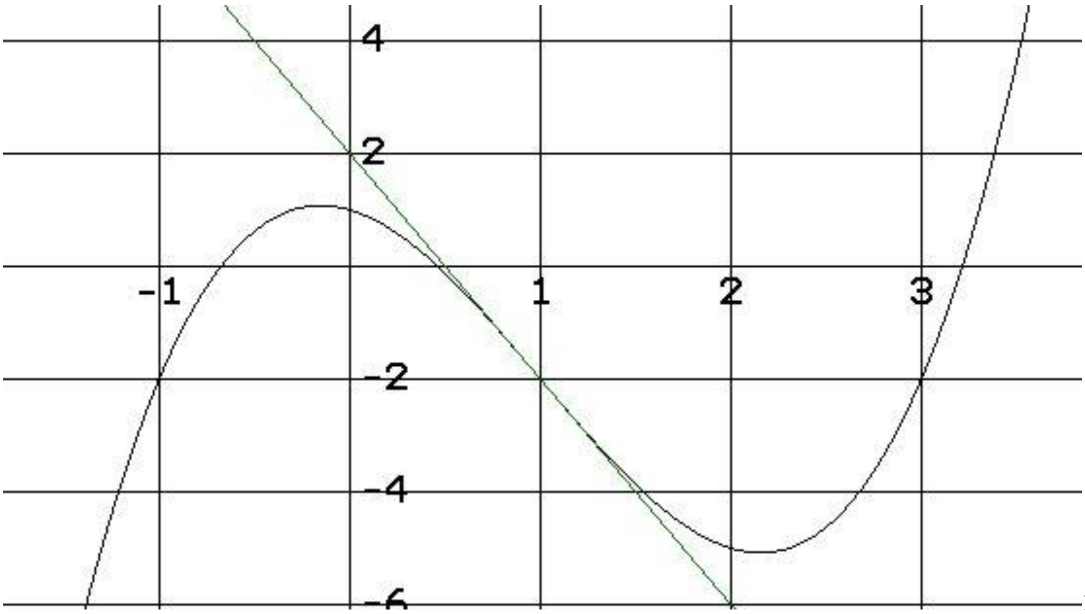

fig.8

Nel punto (1; -2) il grafico ha un flesso ascendente: y’’ passa da valori <0 a valori >0 e y’’(0)=0; il grafico passa da sotto a sopra la tangente nel punto di flesso (**tangente di flesso**).

Si badi che flesso ascendente (o discendente, vedi anche fig.9) non ha niente a che vedere con funzione crescente o decrescente; in questo caso, fig.8, la funzione in (1;-2) è decrescente (y’(1)<0, cioè il coefficiente angolare della retta tangente, tangente di flesso, è negativo).

Domanda: Una **conica**, per esempio una **parabola**, può avere punti di **flesso**?

Se una curva ha un flesso, come il grafico di fig.8 o di fig.9, qual è il minimo numero di punti coincidenti che la **tangente di flesso** ha in **comune** con la **curva**?

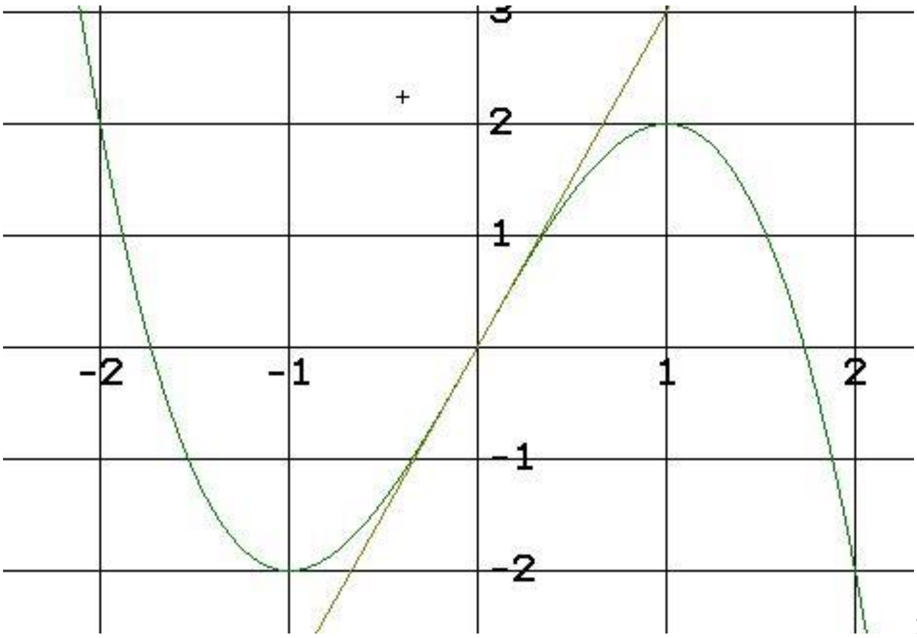

fig.9

Nel punto (0;0) si ha un flesso discendente (f’’(x)>0 a sinistra, f’’(x)<0 a destra di x=0, f’’(0)=0).

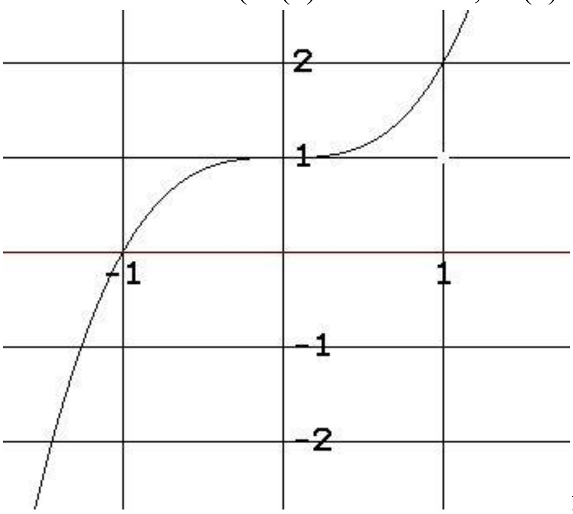

fig.10

In fig.10 un esempio di grafico di funzione con un flesso a tangente “*orizzontale*”.

Si noti che, almeno nella parte di grafico riportata, la funzione non ha punti di massimo o di minimo relativo (la funzione è crescente in tutti i punti del dominio riportato [-2, 2].

Nota algebrica. Una funzione y=f(x) si dice **algebrica**, se f(x) è costituita da polinomi in x, rapporti di polinomi (funzioni razionali) con eventuali radicali (funzioni algebriche irrazionali).

Ordine di una funzione algebrica è il grado massimo dei suoi monomi in x, y , una volta ridotta a un polinomio in x, y eliminando eventuali denominatori e radicali.

Esempi. $y=x^2$è una funzione algebrica razionale intera di ordine 2 (del 2° ordine), $y=(x+1) / (x^3+x)$ è una funzione razionale di ordine 4 (4° ordine), $y=\frac{\sqrt{x+5}}{x^2-x+1}$ è una funzione (irrazionale) dii ordine 5.

Il grafico di una funzione algebrica è, in generale, una (**porzione di)** curva algebrica (Vedi il caso di $y=\sqrt{x}$, funzione del 2° ordine; il suo grafico è mezza parabola).

Le intersezioni del grafico di una funzione y=f((x) con una retta y=mx+q si ottengono risolvendo (se ci si riesce) l’equazione che si ottiene eliminando la y. Se f(x) è algebrica di ordine n, si ottiene un’equazione in x di grado n. Ora, un’equazione algebrica di grado n ammette esattamente n radici,

contate con la dovuta molteplicità, nel campo dei numeri complessi (teorema fondamentale dell'algebra), ma nel campo reale le radici, i in generale, sono di meno, il loro numero va da zero ad n, perciò la retta interseca il grafico al più in n punti (eventualmente alcuni coincidenti, se l''equazioni ha radici **multiple,** coincidenti). Per esempio, l'equazione $(x+2)(x-1)^2(x+5)^3(x^4+1)=0$ ha grado 10, ma le radici reali sono 6: -2 semplice (molteplicità 1), 1 doppia (molteplicità 2), -5 tripla (molteplicità 3). Infatti il fattore $x^4+1=0$ ha 4 radici a coppie complesse coniugate. (Sapreste calcolarle?). Questo è un fatto generale: se i coefficienti di un'equazione algebrica sono numeri reali, le eventuali radici complesse vanno a coppie coniugate, perciò sono sempre in numero pari. Segue che un'equazione algebrica a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale.
Importante. Una retta tangente a una curva in un punto P(c, f(c)) assorbe in P almeno due punti coincidenti; se ne assorbe un numero pari (>0), in un intorno di c la curva sta tutta in un semipiano rispetto alla tangente (tangente ordinaria); se ne assorbe un numero dispari (>1), in un intorno di c la curva attraversa la tangente (sta in semipiani opposti), il punto P è un unto di flesso e la retta si chiama tangente di flesso. Verificare quanto detto nel punto P(0; 0) per le funzioni $y=x^n$, per n=2, 3, 4, 5.
Corollario. Le coniche non hanno flessi.

7. **Asintoti.**

a) Asintoti verticali. Tutte le volte che, per x→c, limf(x) = ∞ (***salvo il segno***) la retta x=c è un asintoto verticale. *La distanza del punto P(xx,f(x)) dall'asintoto tende a zero. Questa è la definizione generale*. Di asintoti verticali ce ne possono essere tanti, uno, nessuno; la f(x)=tan(x) ne ha infiniti.
b) Asintoto obliquo (*l'asintoto orizzontale è un caso particolare)*.
Una retta y=mx+q è asintoto, se $\lim\limits_{x\to\infty}(mx+q-f(x))=0.$ A maggior ragione, dividendo per x, $\lim\limits_{x\to\infty}(m+q/x-f(x)/x)=0$ e quindi $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ e poi $q=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx).$
Si noti che, perchè esista l'asintoto obliquo, f(x) deve essere un infinito del 1° ordine.
Per l'unicità del limite, l'asintoto obliquo, **se esiste**, è **unico.**

Esercizi.

1) Si studino le funzioni $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$, $f(x)=x^4-4x^2+1$, $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$.
2) Dimostrate che tra tutti i rettangoli di dato perimetro quello di area massima è il quadrato (e tra tutti i rettangoli di data area quello di perimetro minimo è il quadrato).
3) Calcolare l'area del poligono regolare di n lati di perimetro assegnato l e dimostrare che l'area cresce con n. Calcolare il limite di tale area per n→∞. A quale figura geometrica corrisponde tale area limite?
4) Data una funzione biunivoca y=f(x) e la sua inversa $y=f^{-1}(x)$, verificare che i loro grafici sono simmetrici rispetto alla retta y=x, bisettrice del 1° e 3° quadrante, detta **diagonale** del piano. Perciò, se i loro grafici si intersecano, i punti di intersezione stanno sulla retta y=x. Ciò è facilmente verificabile per le funzioni $y=x^2$ (ristretta alle x positive) e $y=\sqrt{x}$, alle funzioni $y=x^3$ e $y=\sqrt[3]{x}$, alle funzioni seno e arcsen, taang e arvtang (con le dovute restrizioni).
Invece le funzioni $y=e^x$ e y=Ln(x) **pare** che non si intersechino.
Propongo pertanto un problema non facilissimo: Considerate le funzioni $y=\mathbf{b}^x$ e $y=\text{Log}_\mathbf{b}(x)$ (naturalmente, **b** maggiore di 0 e diverso da 1!), dimostrare che

(**a**) **se b<1** i grafici si intersecano **in un solo punto** (ovviamente sulla retta y=x) con ascissa compresa tra 0 e 1. Questo è facile. Verificare che, se b=1/2, i grafici si intersecano in $x_0=y_0=$ 0,641185744505.
(b) Se b>1, i grafici si intersecano in due punti se **b<b₀,** sono tangenti se **b=b₀,** non hanno punti in comune se **b>b₀**. **Determinare il valore di b₀.**
Suggerimento. Imporre che $Log_b(x)$ intersechi la diagonale del piano. Siccome il logaritmo (in base b>1) è una funzione concava, tra i due punti di intersezione sta al di sopra della diagonale; perciò la funzione $f(x)= Log_b(x) – x$ deve essere positiva per x compresa tra le ascisse dei punti di intersezione, negativa all'esterno e avrà un (solo) massimo relativo che è anche massimo assoluto. Determinare l'ascissa c di tale massimo e imponete f(c)≥0 (*Se fosse f(c)<0, vorrebbe dire che il grafico del logaritmo non interseca la retta y=x*). *Fate la derivata di f(x).* **Imponendo f'(x)≥0, troverete l'ascissa c del Massimo in funzione di b; imponendo f((c) ≥ 0, troverete b₀.**
Verificate poi che, per $b=b_0$, i grafici sono tangenti tra loro e alla retta y=x nel punto P(…; …).
Ricordate che $b^x = e^{x.Ln(b)}$ e che $Log_b(x) = Ln(x)/Ln(b)$.

Inserisco di seguito alcuni grafici per illustrare i punti a) e b) del quesito proposto.

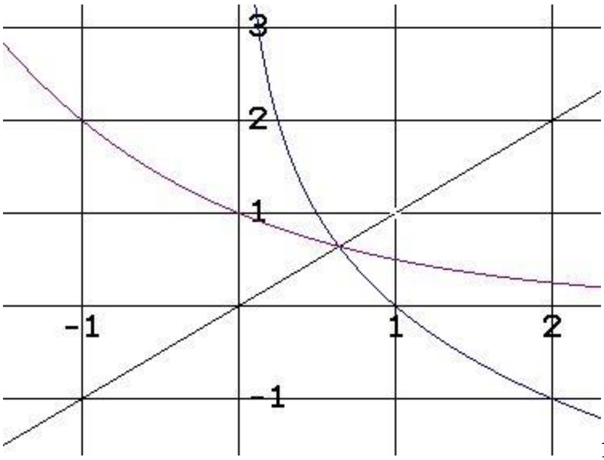

fig.11

In fig.11 sono riportati i grafici per b=1/2. Distinguete i grafici di $y= (1/2)^x$ e di $y=Log_b(x)$?
Si **vede** che il punto di intersezione è P(c; c) con c un po' più grande di 0,5.

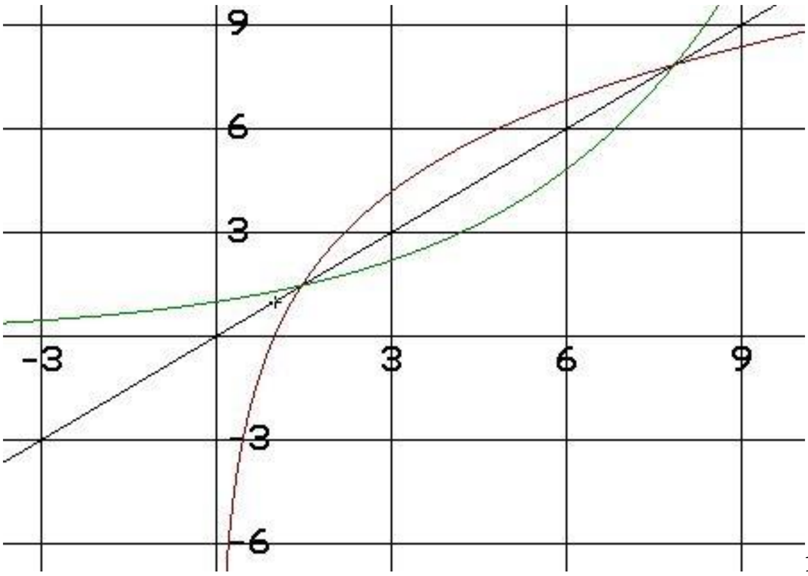

fig.12

La fig.12 riporta i grafici per b=1,3 (evidentemente $1,3< b_0$, perché le intersezioni sono due, distinte).

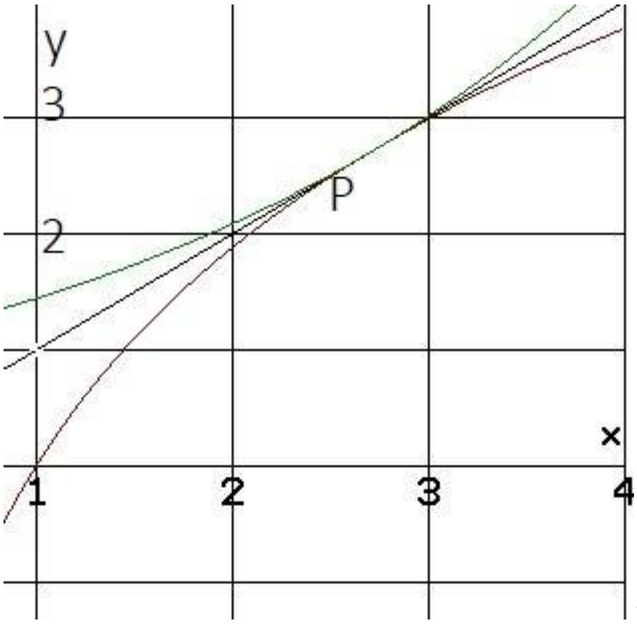

fig.13

In fig.13 è riportato il caso limite $b=b_0$: i due grafici sono tangenti in P alla retta y=x: P(α; α). Notare che è sicuramente 2< α <3 e forse 2,5< α <3. **Il numero** α **è un numero famoso**.

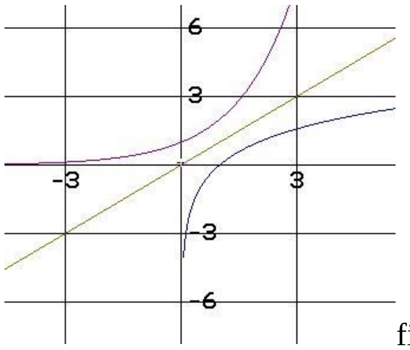

fig.14

Infine, in fig.14 **b=2.** Evidentemente, $2>b_0$, perché i grafici non si intersecano. Siccome e>2, a maggior ragione non si intersecano i grafici di $y=e^x$ e di y=Ln(x). E ancora più distanti sono i grafici per b>e.

Nota sulle figure.
I grafici di fig.1, fig.2, fig.6 e fig.7 li ho realizzati con "*Cabri Gèometrie";*
quelli di fig.3, fig.4 e fig.5 col mio software "***Grafunz***" in Pascal;
quelli da fig.8 a fig.14 con "*Derive for Windowws".*

Molti esercizi li trovate sui vostri manuali e nelle tracce assegnate agli esami di stato; alcuni sono veramente interessanti. In particolare vorrei segnale il **problema 1** dell'esame di stato **2017** al Liceo scientifico, che potete trovare nel mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0* nella sezione *Articoli*, cartella *Miscellanea*, al n° 32, col titolo ***Bicicletta ministeriale***, con generalizzazioni e complementi. **In realtà**, nella traccia ministeriale è disegnato un **triciclo con le *ruote quadrate***.

Altri esercizi, *non convenzionali*, li trovate nel 23°*Annuario* del Liceo Scientifico "Scorza" di Cosenza a. s. 2010/2011, nell'articolo "***La prova scritta di matematica***", reperibile anche nel mio sito, riportato nel paragrafo precedente, nella sezione *Articoli*, cartella *Annuario del Liceo Scientifico Scorza di Cosenza*, al n°23 *dell'elenco,* dal titolo *"**La prova scritta di matematica**".*