

**OTTAVIO SERRA**  
**CURVE ALGEBRICHE E TANGENTI**  
 (senza derivate)

- (1) Una curva algebrica piana è rappresentata da un'equazione polinomiale  $F(x,y)=0$ , essendo  $F(x,y)$  un polinomio in due variabili. Un caso particolare è  $y=f(x)$ , con  $f(x)$  funzione algebrica, in particolare razionale o addirittura intera (polinomio in  $x$ ).  
 Nel caso delle curve algebriche la determinazione della tangente in un suo punto si può effettuare senza i metodi dell'analisi matematica, utilizzando semplicemente la regola di Ruffini<sup>1</sup>.
- (2) E' importante osservare che le intersezioni di una curva con una retta (diciamo  $y=mx+q$ ) si trovano risolvendo il sistema delle loro equazioni, il che conduce all'equazione "risolvente"  $F(x, mx+q)=0$  oppure all'equazione  $f(x)-mx-q=0$ .
- (3) Molteplicità di una soluzione. Data l'equazione  $g(x)=0$ , si dice che una soluzione  $x=\alpha$  ha molteplicità  $r$  se  $g(x)=(x-\alpha)^r \cdot h(x)$ , essendo  $r$  il massimo numero naturale per cui tale uguaglianza è vera (e  $h(\alpha) \neq 0$ ). Per esempio, l'equazione  $x^3+6x^2+9x=0$  si può scrivere  $x(x+3)^2=0$ ; perciò  $x=0$  ha molteplicità 1,  $x=-3$  ha molteplicità 2. (Diciamo che  $-3$  è una soluzione o radice **doppia**, mentre 0 è radice **semplice**).
- (4) **DEFINIZIONE DI RETTA TANGENTE A UNA CURVA.** Una retta si dice tangente a una curva in un suo punto  $P$  se ha in comune con la curva **almeno** due punti coincidenti in  $P$ . Dette  $\alpha$  e  $\beta$  le coordinate di  $P$ , le rette del fascio di centro  $P$  hanno equazione  $y-\beta=m(x-\alpha)$ ; si tratta di determinare il coefficiente angolare  $m$  e perciò di *imporre* che l'equazione  $F(x, m(x-\alpha)+\beta)=0$  abbia  $\alpha$  come radice di molteplicità (almeno) 2. E' questo il motivo per cui la tangente a una curva del secondo ordine (equazione di secondo grado in  $(x,y)$ ) si trova uguagliando a zero il determinante dell'equazione risolvente.

(5) **Esempi.**

[1] Sia la curva  $y=x^2+3x+1$ ,  $P$  il suo punto di ascissa  $-2$ :  $P(-2;-1)$ . Rette per  $P$ :  $y=m(x+2)-1$ . Facendo sistema si ricava:  $x^2+3x+1-mx-2m+1=0$ . Questa equazione, ordinata, diventa:  $x^2+(3-m)x+2-2m=0$  e siccome una sua soluzione è  $-2$ , il primo membro è divisibile per  $x+2$ . Applicando la regola di Ruffini, si trova:

	1	3-m	2-2m
		-2	-2+2m
-2			
	1	1-m	0 (Resto)

Il polinomio quoziente è  $x+1-m$  e affinché  $-2$  sia radice doppia occorre che  $-2+1-m=0$ , quindi il coefficiente angolare della retta tangente è  $m=-1$ . La tangente è  $y=-x-3$ .

[2] Tangente al cerchio  $x^2+y^2-x+y-6=0$  in  $P$  di scissa 1 e ordinata positiva.  $P(1;2)$ . Fascio di rette  $y-2=m(x-1)$ . Equazione risolvente:  $x^2+[2+m(x-1)]^2-x+2+m(x-1)-6=0$ . Ordiniamo e dividiamo per  $x-1$ , applicando la regola di Ruffini; si trova  $(1+m^2)x^2+(5m-2m^2-1)x+m^2-5m$ , che, diviso per  $x-1$ , dà: Quoziente=  $(1+m^2)x+5m-m^2=0$  (Resto ovviamente 0). Imponendo che  $x=1$  sia radice doppia, si ricava  $1+5m=0$  ed  $m=-1/5$ .

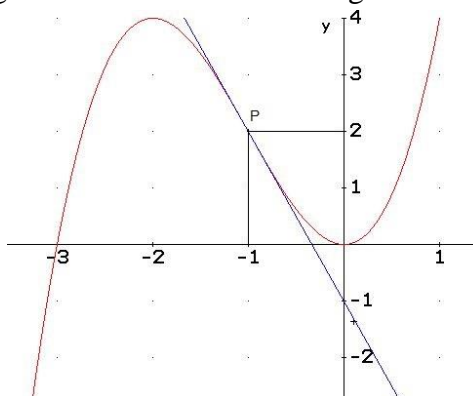
<sup>1</sup> Vedi anche sul mio sito [digilander.libero.it/ottavioserra0](http://digilander.libero.it/ottavioserra0) nella cartella Lezioni allo Scorza matematicapiù2012 l'articolo *Problema delle tangenti e delle aree*.

[3] Determinare la tangente all'ellisse  $4x^2+9y^2-36=0$  nel punto P di ascissa 2 e ordinata positiva.  $P(2; \frac{2}{3}\sqrt{5})$ . Verificare che  $m=\frac{-4}{3\sqrt{5}}$ .

- (6) Gli esempi presentati finora sono di curve del secondo ordine e quindi il coefficiente angolare della tangente si sarebbe potuto ottenere col metodo dell'annullamento del discriminante; nel caso del cerchio anche altri metodi sono disponibili (la tangente è perpendicolare al raggio nel punto di contatto; la distanza della tangente dal centro è uguale al raggio). Perché quindi scomodare Ruffini? Perché per un'equazione di grado superiore al secondo il discriminante o è difficile da ricavare (equazioni di 3° e 4° grado, risolte per la prima volta dagli algebristi italiani del '500: Scipione dal Ferro, Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano, Ludovic Ferrari) o, per quelle di grado superiore al 4°, non esiste.

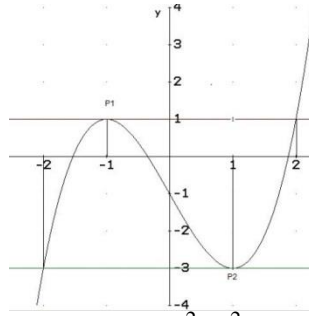
**(7) Alcuni esempi.**

[4] Tangente al grafico di  $y=x^3+3x^2$  in P di ascissa -1.  $P(-1;2)$ . Fascio di rette di centro P:  $y=m(x+1)+2$ . Risolvente:  $x^3+3x^2-mx-m-2=0$ . Dividendo il 1° membro per  $(x+1)$  si ottiene il polinomio quoziente  $Q(x)=x^2+2x-2-m$ ; imponendo  $Q(-1)=0$ , in modo che -1 risulti radice doppia per la risolvente, si ricava  $m=-3$ . La tangente in P è  $y=-3x-1$ . Si noti che, essendo  $m=-3$ ,  $Q(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$ , perciò -1 è radice tripla per la risolvente, cioè nel punto P la tangente ha in comune con la curva *tre punti coincidenti*. Quando la tangente ha in comune con la curva un numero dispari (maggiore di 1!) di punti coincidenti in P, il punto P di tangenza si dice punto di flesso (ivi la curva ha un'inflessione) e la tangente si chiama tangente di flesso. Vedi il disegno sottostante.



Dal disegno si nota che la curva passa da un semipiano all'altro rispetto alla tangente di flesso.

[5] Tangente a  $y=x^3-3x-1$  in un punto in cui la tangente è parallela all'asse x (è orizzontale). Detta a l'ascissa di P, sarà  $P(a;a^3-3a-1)$ . Siccome la tangente ha  $m=0$ , la sua equazione è  $y= a^3-3a-1$ ; la risolvente è  $x^3+(-3-a)x+ma-a^3=0$ . Dividendo per  $(x-a)$ , si ottiene  $Q(x)=x^2+ax+a^2-3$  e imponendo che  $Q(x)$  si annulli per  $x=a$  (a sia radice doppia della risolvente), si ricava  $a=1$  oppure  $a=-1$ . Perciò di punti con tangente orizzontale la cubica ne ha due  $P_1(-1; 1)$  e  $P_2(1; -3)$ . Si noti che le due rette,  $y=1$  e  $y=-3$  sono tangenti alla curva rispettivamente in  $P_1$  e in  $P_2$  e *secanti altrove*: la proprietà di tangenza è una proprietà locale. (vedi disegno seguente).



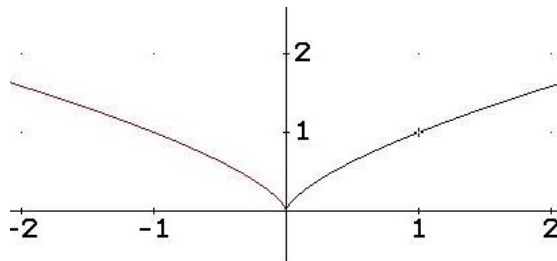
[6] Vogliamo trovare la tangente al cerchio  $x^2+y^2-2x+y=0$  in  $O(0;0)$ . Troveremo che la tangente si ottiene dai termini di 1° grado dell'equazione:  $y-2x=0$ . Questa proprietà è vera per tutte le curve algebriche passanti per l'origine che abbiano termini di 1° grado.

Il fascio di rette è  $y=mx$  e la risolvibile è  $(1+m^2)x^2+(m-2)x=0$ . Si nota a vista che la prima soluzione è  $x=0$  e il quoziente è  $Q(x)=(1+m^2)x+m-2$ ; imponendo che  $x=0$  sia doppia, cioè che  $Q(0)=0$ , si ricava  $m=2$  e la tangente è  $y=2x$ , come dovevasi verificare.

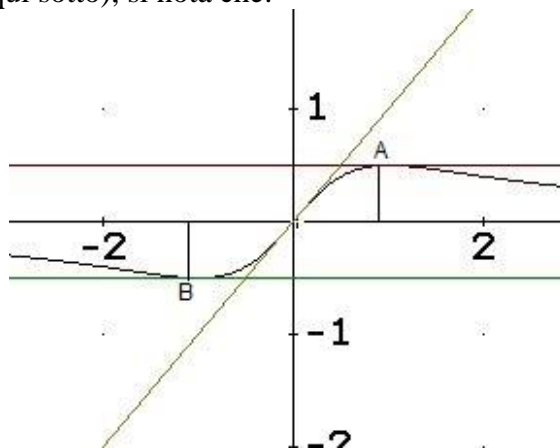
[7] Verificare che la tangente in  $O(0;0)$  alla curva  $x^3+y^4-2y=0$  è  $y=0$  e che la tangente in  $O(0;0)$  alla curva  $x^3+y^4-2x=0$  è ... l'asse delle ordinate ( $x=0$ ). Che succede? Scrivere l'equazione del fascio di rette di centro  $O$  nella forma  $x=by$ .

[8] Determinare la tangente all'ellisse  $x^2+4y^2-4=0$  in  $V(2;0)$ . Il fascio di rette di centro  $P$  è  $y=m(x-2)$ ; se trovate un'impossibilità (per esempio  $4=0$ ), vuol dire che la tangente da trovare è priva di coefficiente angolare e dunque è parallela all'asse  $y$ . Nel nostro caso la tangente è  $x=2$ . Se non ci credete, scrivete il fascio nella forma  $x-2=by$ .

[9] Tangente nell'origine alla curva  $x^2-y^3=0$ . Verificare che la tangente assorbe tre punti coincidenti in  $O$ , ma non è di flesso. Giustificare intuitivamente l'andamento del grafico riportato qui sotto.



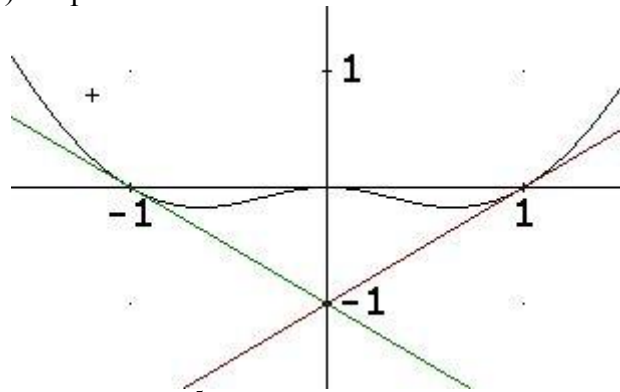
[10] Data la curva  $y = \frac{x}{1+x^2}$ , determinare la tangente in  $O(0;0)$  e in  $P(2;\frac{2}{5})$ . Verificare che la tangente in  $O$  assorbe tre intersezioni; e quella in  $P$ ? Seca la curva in un punto diverso da  $P$ ? Guardando il disegno (qui sotto), si nota che:



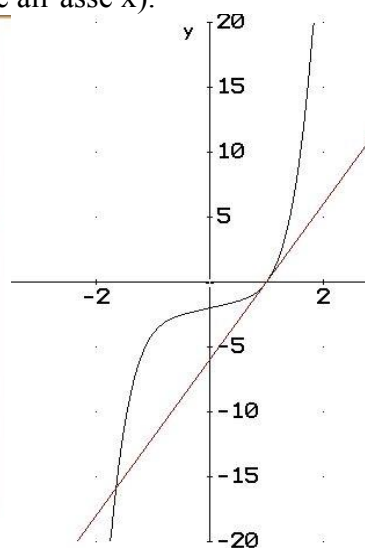
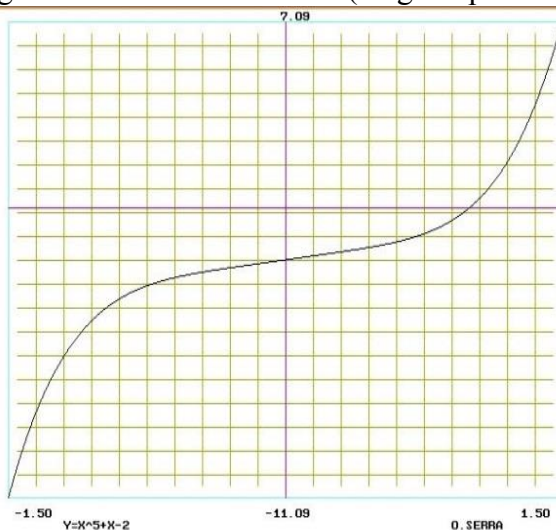
La curva è dispari, cioè  $y(-x)=-y(x)$ ; graficamente la curva è simmetrica rispetto all'origine. La curva ha un punto A di massima ordinata, in cui la tangente è orizzontale ( $m=0$ ):  $A(a;b)$ ; essendo dispari, avrà un punto B di minima ordinata simmetrico di A rispetto all'origine:  $B(-a;-b)$ . Per determinare A, tenete presente che la sua ordinata è  $b=\frac{a}{1+a^2}$  e che la retta tangente in A è  $y=b$ . Segue che la risolvente è  $\frac{x}{1+x^2}=\frac{a}{1+a^2}$  ovvero  $ax^2-(a^2+1)x+a=0$ . Dividendo il 1° membro per  $(x-a)$ , si trova  $Q(x)=ax-1$  e imponendo che  $Q(a)=0$ , (che a sia radice doppia per la risolvente, si ricava  $a^2=1$ ; perciò  $a=1$  (ascissa di A) oppure  $a=-1$  (ascissa di B). Pertanto  $A(1; 1/2)$  e  $B(-1; -1/2)$ .

[11] E' data la quartica (curva algebrica di quarto grado)  $y = \frac{x^4-x^2}{x^2+1}$ .

Notate che la curva è *pari* (è simmetrica rispetto all'asse y), perché  $y(-x)=y(x)$ . Notate anche che la retta  $y=0$  (asse x) ha due intersezioni con la curva coincidenti in  $O(0;0)$ , perciò l'asse x è tangente alla curva in O. Sempre guardando l'equazione della curva, dovrete capire che questa si estende indefinitamente verso l'alto, mentre verso il basso ha un minimo (anzi due minimi simmetrici rispetto all'asse y, di uguale ordinata negativa perché tra -1 e 1 il numeratore è negativo, mentre il denominatore è positivo per ogni x). **Trovate questi minimi** determinando la tangente orizzontale. Nella figura seguente è riportato il grafico e anche le tangenti (simmetriche) nei punti in cui la curva interseca l'asse x:



[12] Data la curva di equazione  $y=x^5+x-2$ , determinare la tangente nel punto  $P(1;0)$ . Dovete trovare che la tangente è  $y=6x-6$ ; quante intersezioni assorbe con la curva? Interseca la curva in qualche altro punto? (vedere per questa domanda il 2° dei due disegni qui sotto). Determinare poi la tangente in  $A(0;-2)$  e verificare che A è punto di flesso (assorbe un numero dispari di intersezioni con la curva: quante?). Verificare infine che non esistono tangenti orizzontali alla curva (tangenti parallele all'asse x).



[13] Trovare i punti della curva  $y=x^5+x^4-2$  nei quali la tangente è orizzontale. Dopo aver verificato che di questi punti ce ne sono due, determinare in quello di ordinata maggiore la

molteplicità del contatto con la tangente, cioè quanti punti coincidenti comuni con la tangente ha la curva. Provare a disegnare il grafico.

[14] Della curva  $y=-x^6-x^4+2$  provate a determinare quante più proprietà potete per disegnare il grafico.

[15] Data la curva  $y^2=x^3-9x+11$ , determinare la tangente nei punti di ascissa 2. (Notate che la curva è simmetrica rispetto all'asse x. *Risposta:*  $y=(3/2)x-2$  e  $y=-(3/2)x+2$ ). Trovare tutti i punti in cui la tangente è orizzontale e disegnare approssimativamente la curva. Senza calcolarlo, *giustificate* che esiste un punto (con x tra -4 e -3) in cui la tangente è verticale.

[16] **Ci proponiamo** ora di determinare la tangente a una curva, di coefficiente angolare m assegnato; questa volta m è noto, si tratta di trovare il punto di contatto. Come si vede, è la generalizzazione del problema delle tangenti "orizzontali".

### Esempi.

(a) Determinare i punti della curva  $y=x^3+x-2$  in cui il coefficiente angolare della tangente è, rispettivamente,  $m=1$ ,  $m=4$ ,  $m=-1$ .

[R. (0;-2); (1;0) e (-1;-4); impossibile].

(b) Nel fascio di rette parallele di coefficiente angolare assegnato m determinate la tangente alla curva  $y=x^4-2x+1$ . (Si immagini di avere il punto di contatto di ascissa a incognita e ordinata  $b=a^4-2a+1$ :  $P(a; a^4-2a+1)$ . Se non fate errori, troverete  $m=4a^3-2$ . Sfruttate questa relazione per determinare il punto di minima ordinata (tangente orizzontale); esiste un punto di ordinata massima? Determinate poi la tangente e il punto di flesso. Trovate infine le intersezioni della curva con gli assi cartesiani e disegnate approssimativamente la curva.

(b) Data la curva  $y=x^3+2x$ , determinare il minimo valore del coefficiente angolare delle sue tangenti. Come mai tale coefficiente angolare ha un minimo?

(c) Data l'ellisse  $x^2+2y^2-4=0$ , determinare le tangenti parallele alla bisettrice del 2° quadrante. (In questo caso è più semplice il metodo del discriminante).

(d) Dato il cerchio  $x^2+y^2+2x-y=0$ , determinare le tangenti di coefficiente angolare  $m=2$  e poi  $m=1$ . E' preferibile usare il metodo del discriminante e ancora meglio (è più veloce) il metodo basato sul teorema che dice: *la distanza del centro dalla tangente è uguale al raggio*. La morale della favola è che bisogna guardarsi intorno e usare il metodo più conveniente tra quelli conosciuti.

(e) Determinare le rette per l'origine tangenti alla curva (parabola)  $y=x^2+1$  e i punti di contatto (usare il metodo di Ruffini e quello del discriminante).

(f) Determinare le rette per l'origine tangenti alla curva (parabola)  $y=x^2-4x+3$  e i punti di contatto (usare il metodo del discriminante).

(g) Determinare le rette per l'origine tangenti al cerchio  $x^2+y^2-6x-8y+21=0$  (usare due metodi diversi).

(h) Determinare le rette per l'origine tangenti alla curva  $y=x^3+1$ . (Sapreste prevedere quante sono?)

(i) Determinare le rette per l'origine tangenti alla curva  $y=x^4+1$ . (Sapreste prevedere quante sono?). La retta  $y=1$  è tangente alla curva. Come si può affermare senza fare alcun calcolo? Quante intersezioni assorbe?