Ottavio Serra

Costruzioni e Problemi di geometria

La geometria è l'occhio della matematica

Avvertenza. E' bene, preliminarmente, avere (o acquisire) competenza sulle trasformazioni geometriche del piano, in particolare su traslazioni, omotetie simmetrie assiali. Vedi anche i prerequisiti indicati nella lezione "*Punti notevoli di un triangolo*". E' bene anche avere confidenza con la sezione aurea di un segmento (la "*divina proportione*"di Luca Pacioli).

Problemi.

1) Sia dato un triangolo isoscele con il lato obliquo doppio della base. Dimostrare che il quadrato del raggio del cerchio circoscritto è i 4/15 del quadrato del lato obliquo.
2) Dimostrare che il segmento congiungente i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è uguale alla semisomma delle basi.
3) Dividere (con riga e compasso) un segmento in 3 parti uguali; idem in 5 o in 7 parti uguali.
4) Dividere con riga e compasso un angolo retto in tre parti uguali. Idem, si trisechi un angolo di 45°. *Sappiate che, a differenza di un segmento, in generale non è possibile trisecare, con riga e compasso, un angolo generico*.
5) Dimostrare che la somma dei quattro segmenti che congiungono un punto interno con i vertici di un quadrilatero è maggiore della somma delle diagonali.
6) Dato un triangolo isoscele, tracciare una retta parallela alla base in modo che si formi un trapezio (isoscele) con tre lati uguali.
7) Dato un triangolo isoscele, si consideri un punto P sulla base. Si dimostri che la somma delle distanze di P dai lati obliqui è costante al variare di P sulla base.
8) Sia dato un punto arbitrario P interno a un triangolo. Dimostrare che la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo è compresa tra il semiperimetro e il perimetro del triangolo.
9) Dato un cerchio, sia AB un suo diametro. Determinare con ***riga e compasso*** un punto P sulla retta di AB in modo che le tangenti condotte da P al cerchio abbiano (ciascuna) lunghezza pari al diametro AB.
10) In un triangolo ABC si consideri la mediana AM e sia P il punto medio di AM; sia Q il punto medio di PC ed R il punto medio di QB. Calcolare il rapporto tra l'area del triangolo PQR e l'area del triangolo ABC.
11) Date due rette r ed s il cui punto di intersezione O cade fuori del foglio (è invisibile), tracciare con riga e compasso la bisettrice del loro angolo.
12) Preso un punto P sulla bisettrice di un angolo rOs, si tracci per P una retta che interseca r in A ed s in B in modo che risulti PA=2PB. (E poi 3PA=4PB, … mPA=nPB).
13) Dato il trapezio O(0,0) A(1,1) B(3,1) C (4,0), calcolare le coordinate del suo baricentro geometrico (coincidente col centro di massa del trapezio considerato come una lamina omogenea). Verificare che, a differenza del caso del triangolo, il baricentro non coincide col centro di massa di quattro particelle uguali disposte nei vertici.
14) Dividere un segmento s in due parti, a e b, tali che il rettangolo di dimensioni a e b abbia area massimala; idem che la somma dei quadrati costruiti su a e su b abbia area minima.
15) Date due rette il cui punto di intersezioni O è invisibile (fuori del foglio) e un punto C del loro piano, tracciare la retta per C che passi per O.
16) Dimostrare geometricamente e algebricamente che, diviso un segmento in media ed estrema ragione (sezione aurea e parte rimanente), la parte rimanente è sezione aurea della sezione aurea. Dedurre da ciò l'incommensurabilità tra un segmento e la sua sezione aurea.

Suggerimenti per la risoluzione.

1) Basta guardare la seguente fig1:

fig1

2) Dalla fig2: MN è parallelo alle basi del trapezio per l'inverso del teorema di Talete. Mandata da C la parallela a DA, MF=DC=AE, FN =EB/2. Il resto è facile. Se poi BC è parallelo a DA (se il trapezio è un parallelogrammo, …).

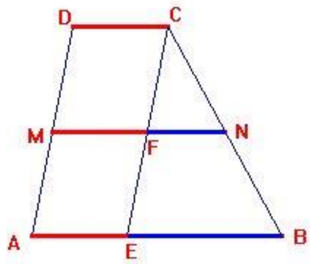

fig2

3) Per dividere un segmento in parti uguali, servirsi del teorema di Talete.
4) Per dividere un angolo retto in tre parti uguali, costruire un triangolo equilatero con un vertice nel vertice dell'angolo retto; il resto è facile. Per trisecare un angolo di 45°, prima costruire tale angolo bisecando un angolo retto, poi costruire il solito triangolo equilatero, poi… è fatta.
5) Utilizzare il teorema che dice: *In un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo.*
6) Detto l il lato obliquo, b la base, si dimostri con metodo algebrico che il segmento che risolve il problema è quarto proporzionale dopo l+b, l, b. La costruzione del quarto proporzionale si ottiene dal teorema di Talete. Vedi fig2bi

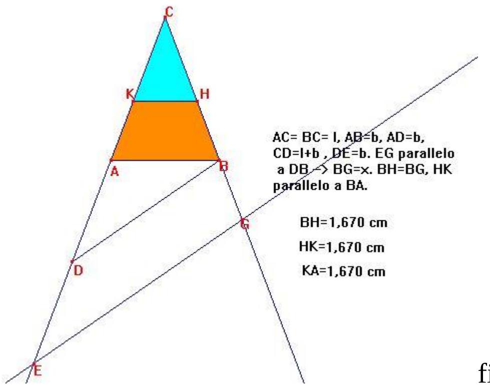

fig2bis

7) Guardare la fig3: PH perpendicolare a BA, PK e BT perpendicolari a CA, PZ perpendicolare a BT. Dimostrato che i triangoli BPH e BPZ sono uguali, il resto è facile.

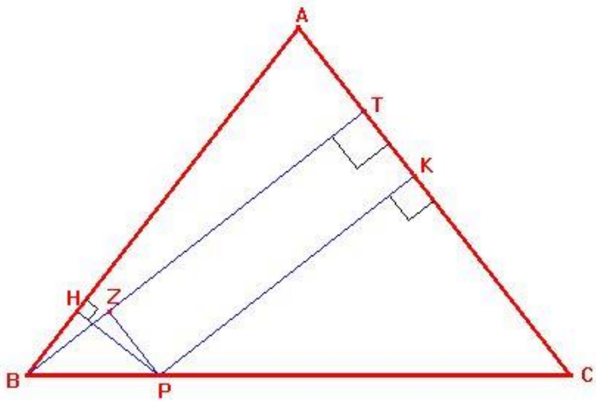

fig3

8) Dimostrare che la somma delle tre distanze è maggiore del semiperimetro è facile. Per provare che è minore del perimetro, occorre stabilire il seguente lemma: *La somma delle distanze di P dagli estremi di un lato è minore della somma degli altri due lati del triangolo*. Vedi fig4.

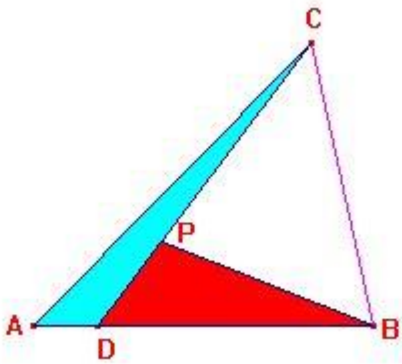

fig4

PB<PD+DB; CD<AC+AD. Si sommi e si tenga presente che CD=PC+PD: PB+PC+PD<PD+DB+AC+AD e quindi <u>PB+PC</u><(AD+DB)+AC=<u>AB+AC</u>, c.d.d.

A questo punto, basta applicare tre volte il lemma.

9) Detto AB un diametro, P sul prolungamento di AB, si dimostri che BP è uguale alla sezione aurea di AB, dopo di che basta ricordare la classica costruzione di Euclide della sezione aurea. Vedi fig5.

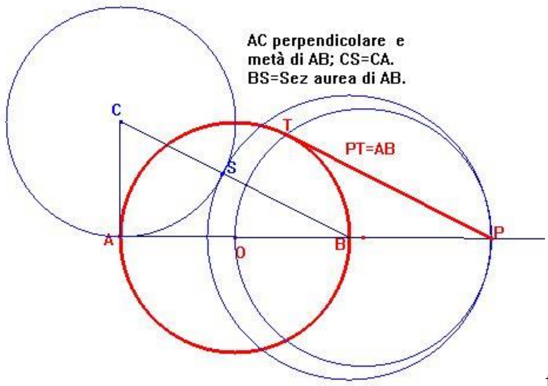

fig5

10) Si veda la fig6:

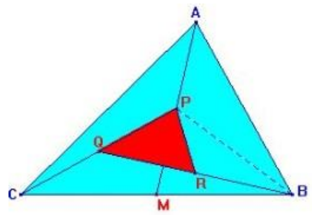

fig6

Congiunto P con B, il triangolo CPB è metà di ABC, perché … , PQB è metà di CPB per lo stesso motivo, come pure PQR è metà di PQB. Il resto è immediato-

11) Si tratta di capire dalla fig7 che ABO e CDO (O invisibile) sono isosceli.

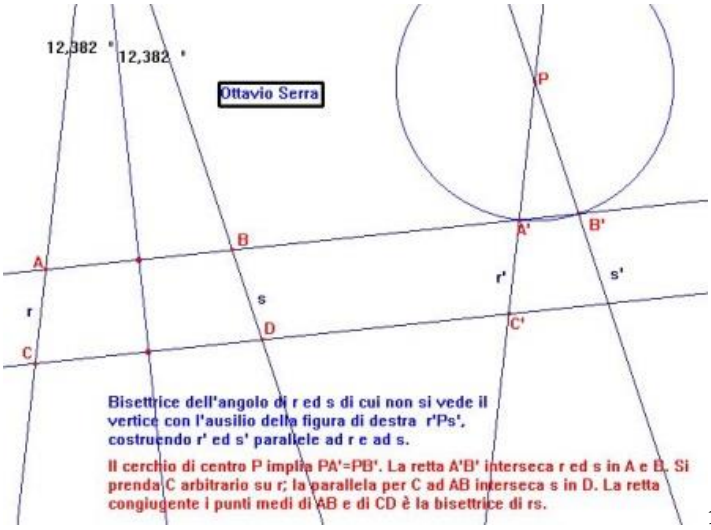

fig7

12) Basta dare un'occhiata alla fig8:

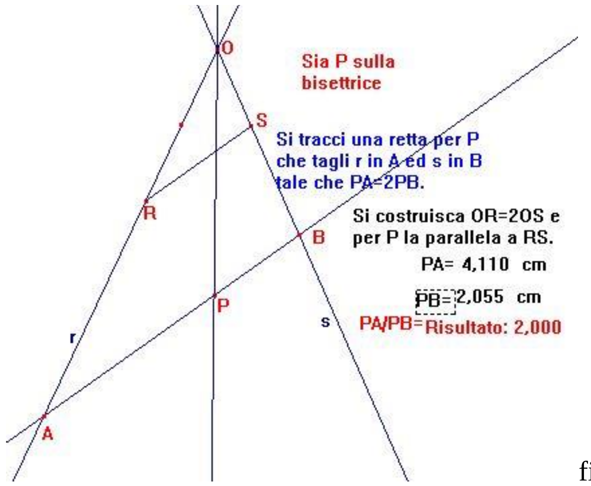

fig8

13) Si noti che il trapezio è isoscele, perciò il baricentro sta sull'asse di simmetria di equazione x=2. Si prolunghino i lati obliqui in modo da ottenere un triangolo isoscele, anzi due e si ricordi che il baricentro di un triangolo divide una mediana in due parti, una doppia dell'altra. Si calcolino le aree dei due triangoli e del trapezio e si ricordi che l'ordinata del triangolo "grande" è la "media ponderata" delle ordinate del triangolo piccolo e del trapezio. (Le aree rappresentano le masse, immaginando densità superficiali uniformi).

Dette S_1, S_2 ed $S=S_1+S_2$ le aree del triangolo piccolo, del trapezio e del triangolo grande, y_1, y_2 e y_G le ordinate dei baricentri delle tre figure, la formula è

$$y_G = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2}\,.$$

(Formula analoga per le ascisse). Per masse puntiformi disposte in n punti, la formula del centro di massa è (in notazione vettoriale)

$$\vec{R}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Se le n masse sono uguali, la semplificazione è ovvia.

14) Entrambe le tesi si possono ricavare per via algebrica:

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{s}{2}$, perciò il massimo di ab si ha quando nella disuguaglianza vale l'uguale, cioè quando a=b=s/2 e quindi il massimo di ab= $\frac{s^2}{4} = a^2$.

Inoltre dalla uguaglianza $(a+b)^2 = s^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, siccome s è costante, al crescere di ab, la somma a^2+b^2 decresce e il suo minimo si ha quando ab è massimo, cioè quando a=b=s/2. Geometricamente basta un'occhiata alla seguente fig9:

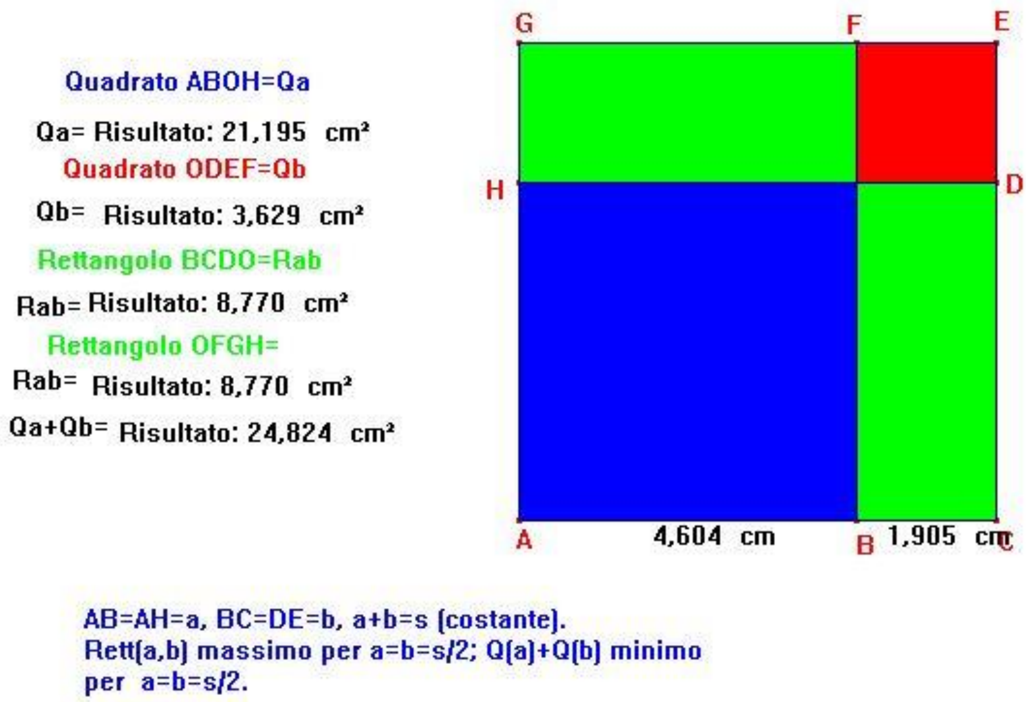

fig9

15) Si tratta di costruire due triangoli omotetici, vedi la fig10.

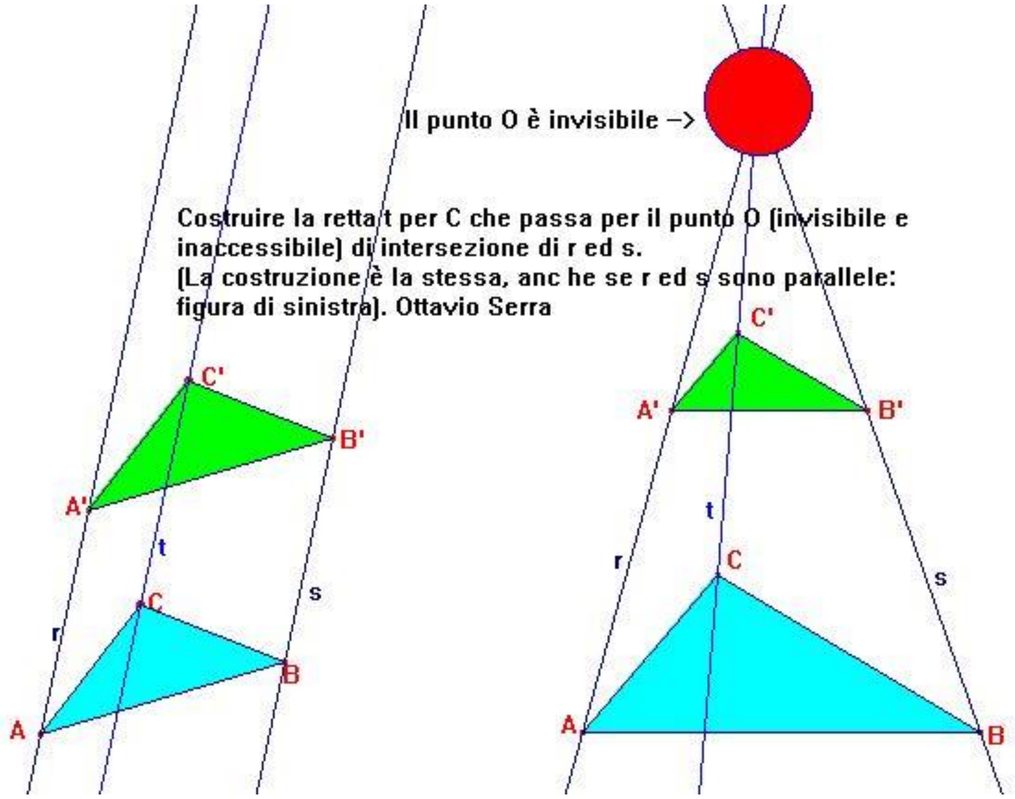

fig10

16) Per via algebrica è facile. La via geometrica è illustrata dalla seguente fig11:

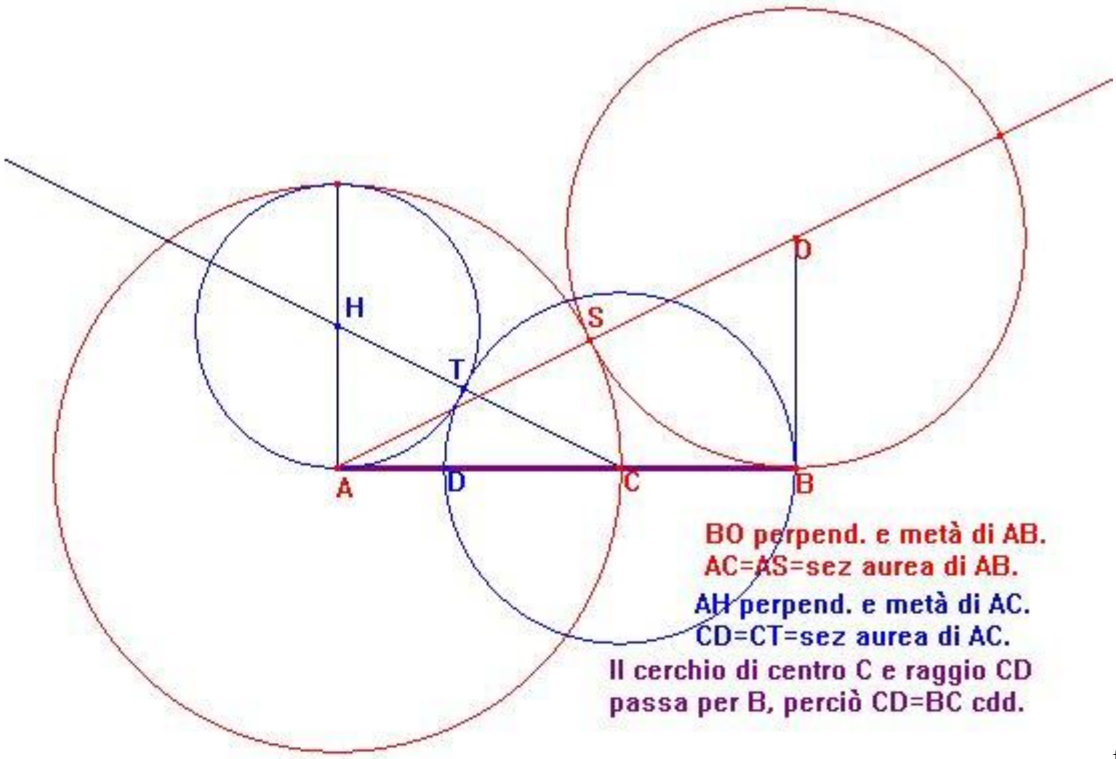

fig11