Ottavio Serra

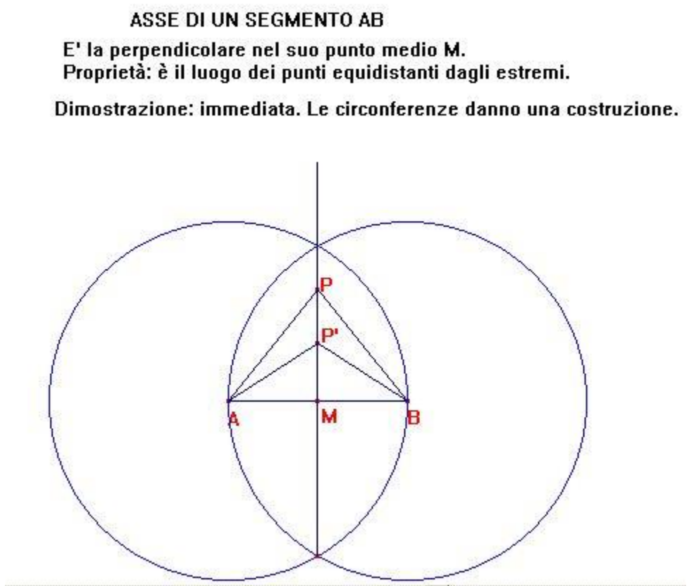
Punti notevoli di un triangolo

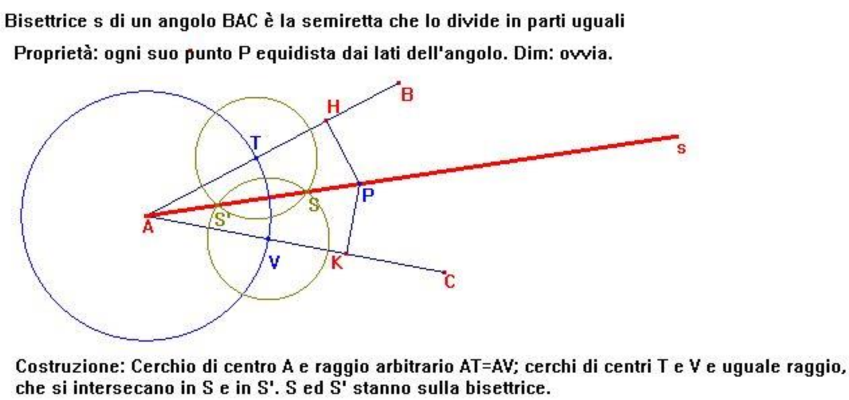
(La geometria è l'occhio della matematica)

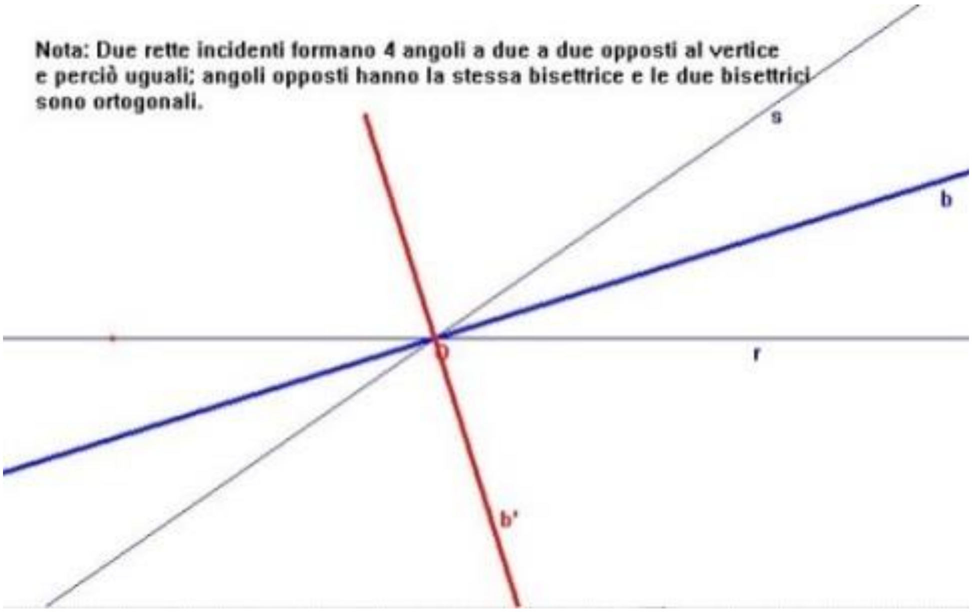
Prerequisiti.

a) Conoscere i tre criteri di uguaglianza (congruenza) dei triangoli
b) Conoscere il teorema di Talete
c) Conoscere le proprietà del triangolo isoscele
d) Conoscere i tre criteri di similitudine dei triangoli
e) Conoscere il teorema "In un triangolo al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore
f) Sapere che vale il viceversa (all'angolo maggiore si oppone il lato maggior) da dimostrare per assurdo (se non fosse vero, cadrebbe il teorema e)
g) In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due (e maggiore della differenza)
h) Sapere che in generale l'inversa di una proposizione vera è falsa (fare degli esempi)
i) Conoscere i teoremi di Euclide e quello di Pitagora
j) Sapere che la tangente al cerchio è perpendicolare al raggio nel punto di contatto
k) Avere consapevolezza che la definizione di Euclide di retta tangente a un cerchio non è corretta

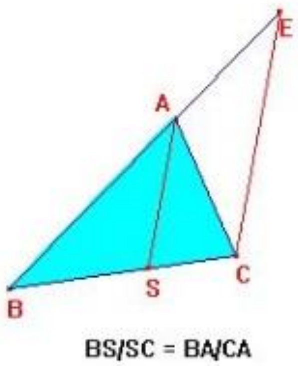
Premessa: asse di un segmento e bisettrice di un angolo.



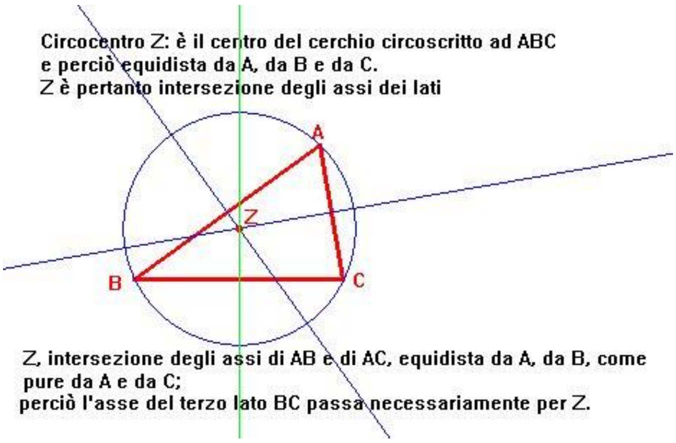




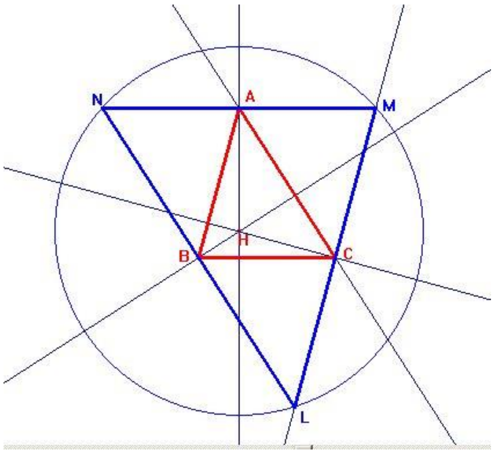
Visto che ci siamo, dimostriamo che la bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali ai rimanenti lati: basta mandare CE parallelo alla bisettrice AS fino a incontrare in E il prolungamento di BA; nota che il triangolo ACE è isoscele (vedi gli angoli); poi applica il teorema di Talete.



Circocentro



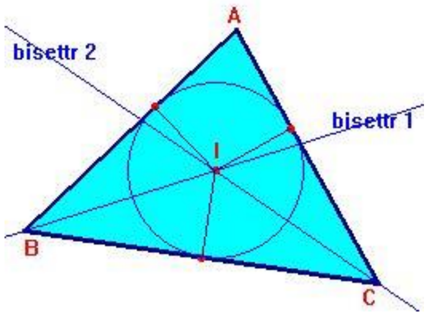
Ortocentro



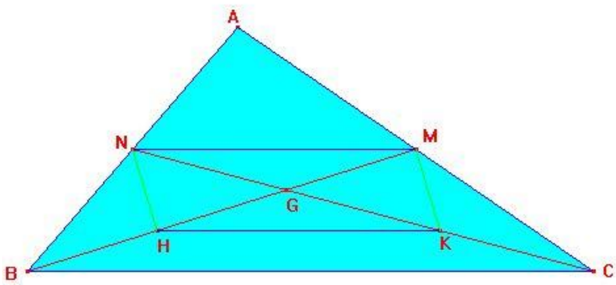
Se costruisco il triangolo LMN con i lati paralleli a quelli del triangolo ABC,

MA ed NA risultano uguali, perché entrambi uguali a BC (considerare i parallelogrammi ANBC e BCMA); perciò il circocentro del triangolo LMN è ortocentro H del triangolo ABC e con ciò resta dimostrato che le tre altezze di ABC si intersecano in uno stesso punto (l'ortocentro H).

Incentro (centro I del cerchio inscritto). I deve stare sulle bisettrici degli angoli del triangolo ABC. (vedi la premessa). Basta tracciare due delle tre bisettrici, perché… Vedi figura seguente.



Baricentro (geometrico) di un triangolo: definito come intersezione delle mediane.



Considero le mediane BM e CN che si intersecano in G. I triangoli ANM e ABC sono simili (2° criterio) e perciò MN è parallela a BC e metà di BC. Presi poi i punti medi H e K dei lati GB e GC del triangolo GBC, per lo stesso motivo HK risulta parallela a BC e pari alla sua metà. Perciò il quadrilatero NMKH, avendo due lati opposti uguali e paralleli, è un parallelogrammo e le diagonali

HM e KN si bisecano (in G). Si conclude che BH, HG e GM sono uguali e pertanto GM è 1/3 dell'intera mediana BM. Analogamente GN è 1/3 di CN. Segue che la terza mediana (quella che parte da A) deve passare per G. Infatti, detto J il punto in cui la mediana uscente da A interseca BM, dovrà essere MJ =1/3 di MB; ma anche MG=1/3 di MB, dunque J=G.
Inoltre, abbiamo il bel risultato che il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, una (quella verso il vertice) doppia dell'altra.
Baricentro, alla lettera, significa *centro del peso* o centro di massa. In meccanica si chiama centro di massa il punto materiale (ideale) G in cui si può immaginare concentrata tutta la massa e tutta la quantità di moto del sistema: $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \vec{V}_G$.

Detti $\boldsymbol{r_i}$ i raggi vettore delle singole particelle e $\boldsymbol{R_G}$ il raggio vettore del centro di massa (in opportuno sistema di riferimento bidimensionale o tridimensionale, risulterà $\vec{R}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$.

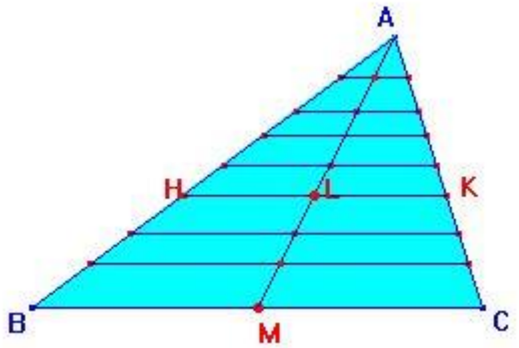
Verificare che per due particelle poste nei punti A e B il centro di massa G divide il segmento AB in parti inversamente proporzionali alle loro masse.

Per una distribuzione continua di massa il calcolo del baricentro richiede in generale gli integrali; se però la figura ammette un asse o un piano di simmetria ortogonale, il baricentro appartiene a tale asse o piano di simmetria.

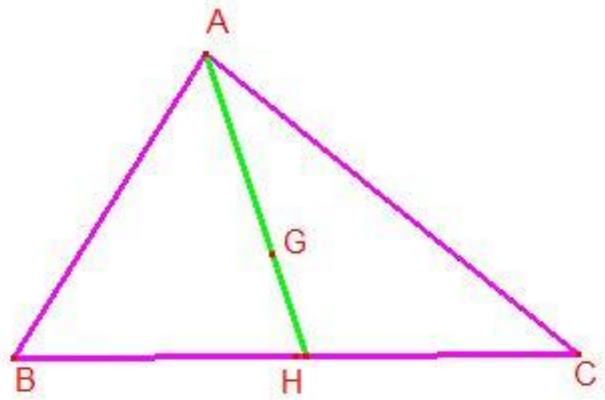
Dire dove si trova il centro di massa di una distribuzione uniforme nei seguenti casi:

- **a) figure piane: cerchio, ellisse, parallelogrammo; determinare il centro di massa di un trapezio isoscele date le basi e l'altezza.**
- **b) Figure solide: sfera, ellissoide, cilindro (retto). Che cosa sapete dire per il cono?**

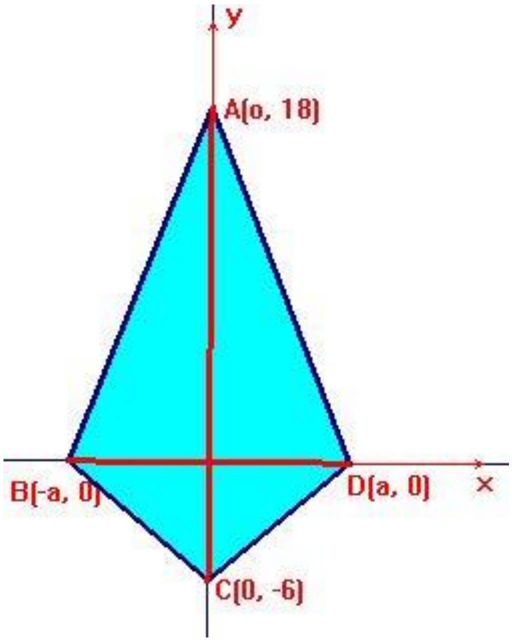
Per il triangolo vale la seguente notevole proprietà: il centro di massa coincide col baricentro geometrico, sia che si immagini la massa concentrata in tre parti uguali nei tre vertici, sia che la si immagini distribuita uniformemente sulla superficie (lamina triangolare omogenea).



Infatti, se "*affettiamo*" il triangolo ABC in strisce parallele al lato BC, abbastanza strette (al limite, infinitamente sottili) da assimilarle a segmenti, ciascuno di essi avrà, per simmetria, il centro di massa nel suo punto medio. Tracciata la mediana AM, M sarà il centro di massa del segmento BC. Il generico segmento HK interseca la mediana AM nel punto L: dico che L è punto medio di HK e quindi centro di massa di HK. Infatti, i triangoli AHL e ABM sono simili (angoli corrispondenti uguali) e perciò $\frac{HL}{BM} = \frac{AL}{AM}$. Analogamente, $\frac{LK}{MC} = \frac{AL}{AM}$ e siccome BM=MC, HL=LK.
Segue che il centro di massa della lamina triangolare deve stare su AM.
Affettando il triangolo parallelamente a un altro lato, il centro di massa starà sulla corrispondente mediana e quindi starà nell'intersezione delle due mediane; siccome due mediane individuano il baricentro geometrico, segue la tesi.
Vediamo ora che anche nel caso la massa sia concentrata nei tre vertici in uguali quantità, il centro di massa è il baricentro geometrico. Si consideri, infatti, il triangolo ABC e tre masse uguali di valore comune m, concentrate nei vertici (Vedi figura seguente).



Il centro di massa delle particelle poste in B e in C è il punto medio H di BC, dove si può immaginare concentrata una massa 2m. Siccome in A c'è la massa m, il centro di massa G deve dividere AH in due parti, AG e GH con AG doppia di GH; HG è 1/3 di AH e quindi coincide col baricentri geometrico.
Si badi che per un poligono qualsiasi il centro di massa è diverso a seconda che la massa si immagini concentrata in parti uguale nei vertici, oppure spalmata uniformemente sul poligono.
Basta considerare il caso di un quadrilatero a losanga come un aquilone. Vedi figura seguente.

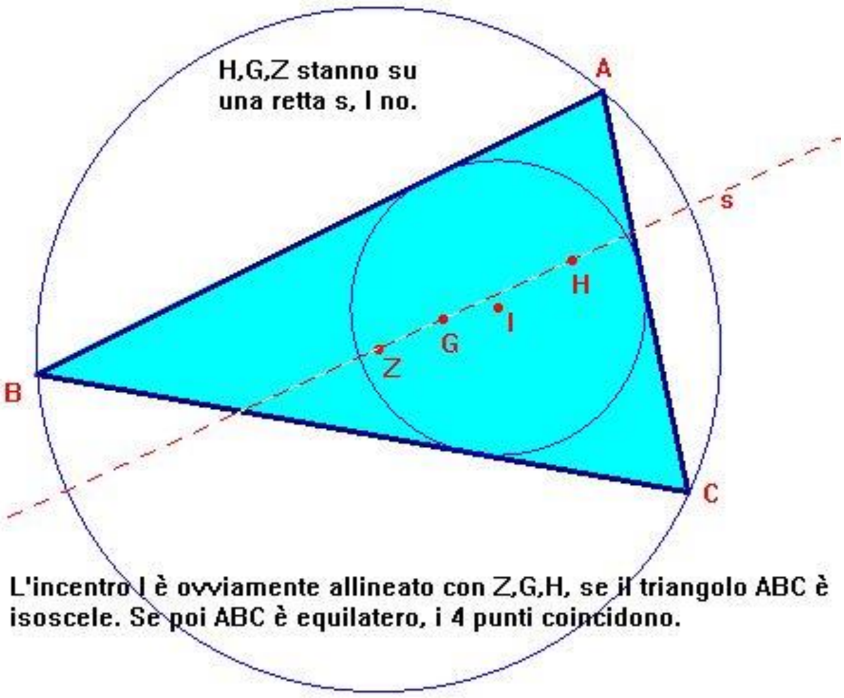


Immaginiamo prima quattro masse m concentrate nei vertici ABCD. L'ascissa del centro di massa è chiaramente 0, perché l'asse delle y, AC, è asse di simmetria; l'ordinata è $y=\frac{18m+(-6)m+0m+0m}{4m}=3$, perciò il centro di massa è il punto (0, 3).

Se invece immaginiamo la massa distribuita (uniformemente) sulla losanga, possiamo pensare il quadrilatero come unione dei triangoli adiacenti, quello di sopra ABD e quello di sotto BCD.
Il centro di massa G_1 di ABD ha coordinate (0, 18/3)=(0, 6); quello G_2 di BCD è (0, -6/3)=(0, -2).
Siccome i due triangoli hanno la stessa base BD, le aree, e quindi le masse, sono proporzionali alle altezze relative alla comuna base BD, cioè 18-0=18 e 0-(-6)=6, cioè le due masse, immaginate concentrate in G_1 e G_2 stanno come 3 sta ad 1. Segue che il centro di massa della losanga ha ordinata $y=\frac{3*6+1*(-2)}{3+1}=4$ (l'ascissa è 0 per simmetria rispetto alla diagonale AC).
Si conclude che per la lamina a losanga il centro di massa è (0, 4), diverso dal precedente.

Osservazione metodologica. L'ultimo esempio mostra che per dimostrare una proposizione (teorema) negativa, basta un controesempio (la losanga), mentre per dimostrare una proposizione affermativa occorre un ragionamento generale. Per provare, ad esempio, che il baricentro G di un triangolo appartiene alla retta che passa per il circocentro Z e per l'ortocentro H, occorre una dimostrazione che prende in considerazione un generico triangolo, vedi pagina seguente), mentre per mostrare che l'incentro I non è allineato (in generale) con i tre punti precedenti basta considerare un triangolo opportuno.

Notare la figura seguente: Z, G e H sono allineati, ma provarlo non è semplice.
La dimostrazione (1760) è dovuto al matematico svizzero Leonardo Eulero; la retta HGZ è detta perciò *retta di Eulero*. Il punto G risulta sempre interno al segmento ZH e GH è il doppio di ZG.



Nella prossima figura è riportata, per chi voglia seguirla, la dimostrazione.