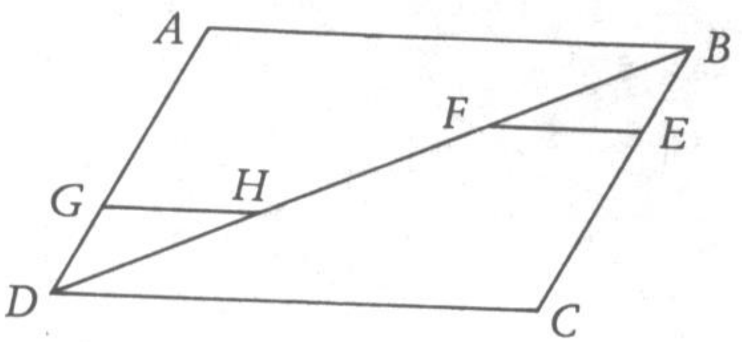
Ottavio Serra

Generalizzazione del principio di Cavalieri.

(1) Il principio di Cavalieri.

Bonaventura Cavalieri **(1598-1647),** allievo di Galilei e professore in un liceo di Bologna, fu influenzato da Keplero e da Galileo e spinto da quest'ultimo a occuparsi dei problemi del calcolo infinitesimale. Cavalieri sviluppò le idee di Galileo e di altri sugli indivisibili incorporandole in un metodo geometrico e pubblicò un'opera sull'argomento intitolata "Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota" **(1635).** Egli considera un'area come costituita da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e un volume come composto da un numero indefinito di aree piane parallele; questi elementi sono detti rispettivamente indivisibili di area e di volume. Cavalieri si rende conto che il numero di indivisibili che costituiscono un'area o un volume deve essere indefinitamente grande, ma non cerca di approfondire questo fatto. In parole semplici, gli indivisibilisti sostenevano, come dice Cavalieri nelle sue "Exercitationes geometricae sex" **(1647),** che una retta è composta da punti come un rosario da grani; che un piano è composto da rette come una stoffa da fili e che un volume è composto da aree piane come un libro da pagine. Essi ammettevano tuttavia che gli elementi costituenti fossero in numero infinito.

Il metodo o principio di Cavalieri è illustrato dalla seguente proposizione, che può naturalmente essere dimostrata in altri modi. Per provare che il parallelogramma *ABCD* ha area doppia di quelle dei triangoli *ABD* o *BCD*, Cavalieri osservava che, se $GD = BE$, allora $GH = FE$. I triangoli *ABD* e *BCD* sono perciò composti da un numero uguale di segmenti uguali come *GH* ed *EF* e devono perciò avere aree uguali.



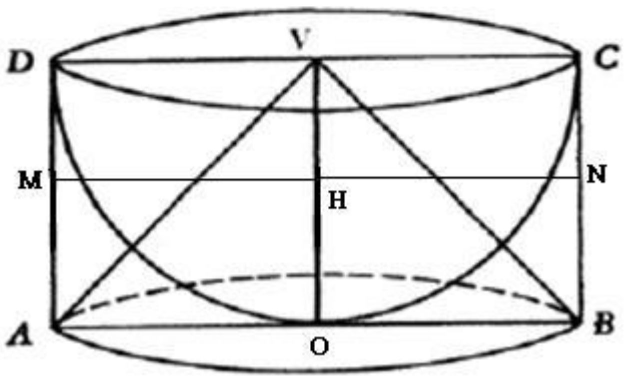
Lo stesso principio è incorporato nella proposizione nota oggi con il nome di **teorema di Cavalieri**; esso dice che, se due solidi hanno altezze uguali e se le sezioni fatte con piani paralleli alle basi e posti a distanze uguali da esse hanno sempre un rapporto dato, allora anche i volumi dei due solidi hanno lo stesso rapporto. In modo analogo trattava l'area compresa fra due curve. Cavalieri aveva successo nell'ottenere risultati corretti perché applicava il suo principio al calcolo di rapporti di aree e di volumi in cui il rapporto degli indivisibili che li costituiscono era costante.

Gli indivisibili di Cavalieri furono criticati dai suoi contemporanei e Cavalieri tentò di rispondere alle critiche, senza però essere in possesso di una giustificazione rigorosa. A volte sosteneva che il suo era soltanto un metodo pragmatico per evitare di far ricorso al metodo di esaustione di Eudosso, tanto usato da Archimede. Nonostante le critiche, il metodo degli indivisibili venne applicato intensivamente da molti matematici. Altri, come Fermat, Pascal e Roberval, si servirono del metodo e anche dello stesso suo linguaggio, adoperando espressioni come la somma delle ordinate, ma pensavano all'area come a una somma di rettangoli infinitamente piccoli piuttosto che come a una somma di segmenti.

L'enunciato del principio di Cavalieri è il seguente:

"**Se due figure piane si possono disporre in modo tale che le rette di un fascio pa-**

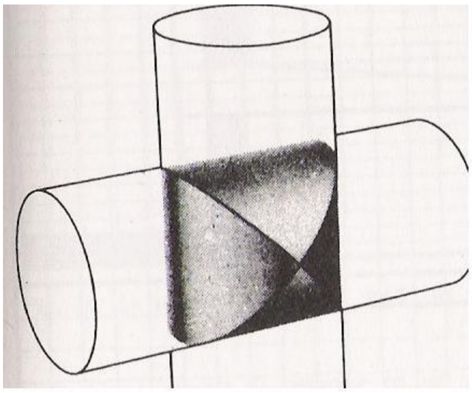
rallelo le tagliano secondo segmenti corrispondenti uguali, allora le due figure sono equivalenti" (hanno uguale area).
Più usato è l'enunciato valido per i solidi.
"**Se due solidi si possono disporre in modo tale che i piani di un fascio parallelo li segano secondo sezioni equivalenti (di uguale area), allora i due solidi sono equivalenti"** (hanno uguale volume).
La catena dimostrativa potrebbe essere la seguente:
(a) Il volume di un parallelepipedo retto rettangolo (intervallo tridimensionale) è il prodotto delle tre dimensioni, ovvero area del rettangolo di "base" per l'altezza. A questo punto il principio di Cavalieri permette di dimostrare che un prisma o un cilindro avente base equivalente alla base del parallelepipedo e altezza uguale ha un volume che si calcola moltiplicando l'area di base per l'altezza. In particolare, per un cilindro $V = \pi r^2 h$.
(b) Dopo aver dimostrato che una piramide a base triangolare è equivalente alla terza parte del prisma con la stessa base e la stessa altezza, il principio di Cavalieri permette di dimostrare che il volume di una piramide è 1/3 dell'area di base per l'altezza e, in particolare, per un cono $V = (1/3)\pi r^2 h$.
(c) A questo punto si determina il volume della sfera, circoscrivendo a una **semisfera** di raggio r un cilindro avente per base il disco diametrale della semisfera e altezza uguale al raggio e inscrivendo un cono avente il vertice nel centro della semisfera e base coincidente con quella opposta del cilindro.



Il solido compreso tra il cilindro e la semisfera è la celebre "**scodella**" di cui parla Galilei nel "Dialogo sui massimi sistemi" e che, col principio di Cavalieri, si dimostra essere equivalente al cono. Un piano parallelo alle basi del cilindro sega il cilindro secondo un cerchio di diametro MN, la scodella secondo una corona circolare e il cono secondo un cerchio equivalente alla corona. Segue che la semisfera è equivalente al cilindro meno il cono e pertanto $V_{semisfera}=(2/3)\pi r^3$ e quindi $V_{sfera}=(4/3)\pi r^3$, il celebre risultato do Archimede.
N.B. Il principio di Cavalieri dà una condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'equivalenza di due solidi. Si considerino, infatti, un prisma e una piramide avente la stessa altezza del prisma e base tripla. Essi hanno chiaramente uguale volume e si possono disporre con le basi su un piano e la base opposta del prisma e il vertice della piramide sullo stesso piano parallelo a quello delle basi; però un piano generico parallelo ai due sega il prisma secondo una sezione costante e uguale alla base, la piramide secondo un poligono di area variabile.
(2) Il principio di Cavalieri generalizzato.
"Se due solidi si possono disporre in modo tale che ogni piano di un fascio parallelo li sega secondo sezioni che stanno in un rapporto costante, anche i solidi stanno nello stesso rapporto.
Nel linguaggio del calcolo integrale ciò significa che una costante moltiplicativa "esce" fuori integrale.

$$\int_a^b kS(x)dx = k\int_a^b S(x)dx ,$$

essendo S(x) e kS(x) le sezioni corrispondenti dei solidi **V** e **V'**.
Con questo "principio generalizzato" di Cavalieri si può agevolmente calcolare il volume di un solido già trovato da Archimede e riportato in appendice al famoso trattatello ritrovato all'inizio del '900 e conosciuto come "**Il metodo di Archimede**". Il solido, detto **bicilindro,** è l'intersezione di due cilindri circolari di uguale raggio e con gli assi di rotazione incidenti e perpendicolari.



Esso si può inscrivere in un cubo di spigolo 2r e circoscrivere a una sfera di raggio r. Un piano parallelo al piano contenente gli assi dei due cilindri e distante x da esso interseca la sfera secondo un cerchio di raggio $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e area πy^2 e il bicilindro secondo un quadrato di lato 2y e area $4y^2$.

Perciò il rapporto tra i volumi è $\frac{4}{\pi}$ e dunque $V_{bicilindro} = \frac{4}{\pi} V_{sfera} = \frac{4}{\pi} . \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{16}{3} r^3$.

Siccome il volume del cubo è $8r^3$, segue che il volume del **bicilindro** è i $\frac{2}{3}$ del volume del cubo circoscritto.