

LUNULE

1. Un po' di storia.

Una lunula è una porzione di piano, di solito a forma di lente menisco-convergente, limitata da due cerchi con centro e raggio diversi.

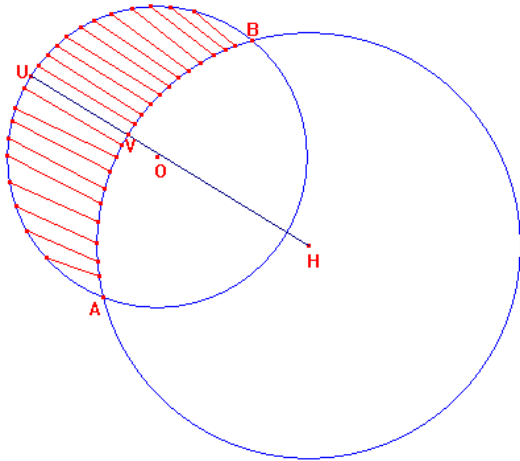


Fig. 1

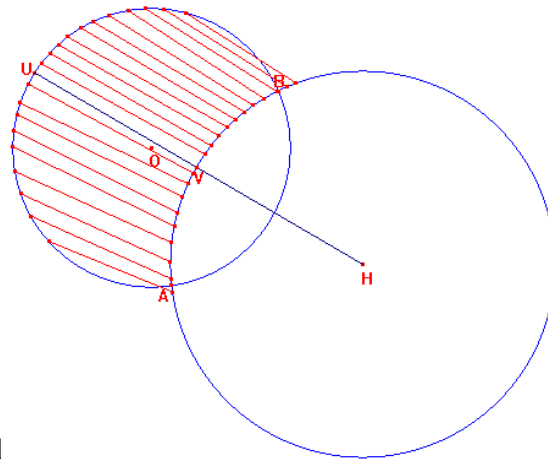


Fig. 1Bis

La lunula è la parte tratteggiata in Fig. 1 (o in Fig. 1Bis) tra il disco di centro O e raggio $r = OU$ e il disco di centro H e raggio $r' = HV$.

Il primo che si occupò della quadratura delle lunule fu Ippocrate di Chio (470 a.C. - 410 a.C.), considerato uno dei più illustri geometri dell'antichità. Membro della scuola pitagorica, ne venne espulso per la condotta riprovevole: la vendita di conoscenze geometriche in cambio di denaro. Fu allievo del grande astronomo Enopide di Chio. Con un secolo abbondante di anticipo su Euclide scrisse un'opera intitolata *Elementi* (*στοιχεῖα*), di cui però non è stato conservato neppure un frammento. Per gli antichi greci quadrare una figura significava costruire con **riga e compasso** un quadrato equivalente alla figura data. Un poligono è decomponibile, banalmente, in un insieme di triangoli; siccome tale decomposizione non è unica, il problema, semmai, era dimostrare che l'area del poligono è uguale alla somma delle aree dei triangoli, *indipendentemente dalla decomposizione*. Ma questa è una finezza che non si può pretendere dai geometri del V secolo. Inoltre un triangolo è equivalente a un rettangolo avente la stessa base e altezza metà; infine un rettangolo si riduce a un quadrato sfruttando quello che ora chiamiamo **2° teorema di Euclide** (vedi Fig. 2).

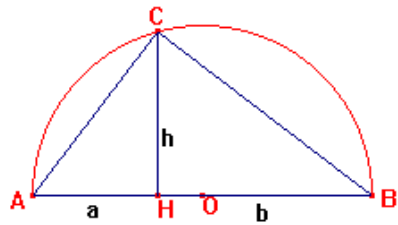


Fig. 2

Risulta che il lato del quadrato equivalente al rettangolo di dimensioni a e b è l'altezza h.

Ippocrate conosceva i seguenti risultati, alcuni trovati da lui, altri attribuiti a Talete (640/624 - 547?)

(1) angoli opposti al vertice sono uguali;

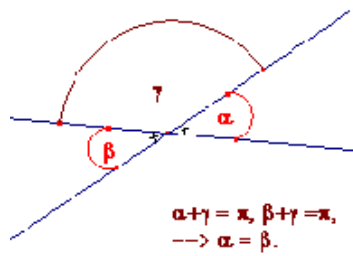


Fig. 3

(2) se due rette sono parallele, gli angoli corrispondenti sono uguali (e anche gli alterni interni);

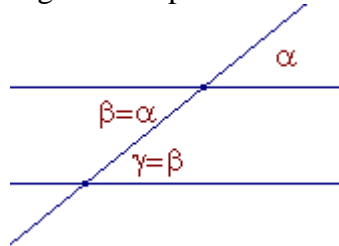


Fig. 4

(3) La soma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto;

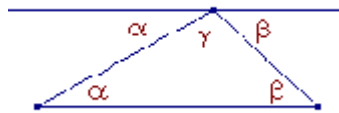


Fig. 5

(4) Se due triangoli sono simili, cioè se hanno uguali gli angoli omologhi, allora i lati corrispondenti sono proporzionali (pare che Talete abbia usato questa proprietà per sbalordire i sacerdoti egizi quando calcolò l'altezza di un obelisco dalla proporzionalità tra ombre e altezze;

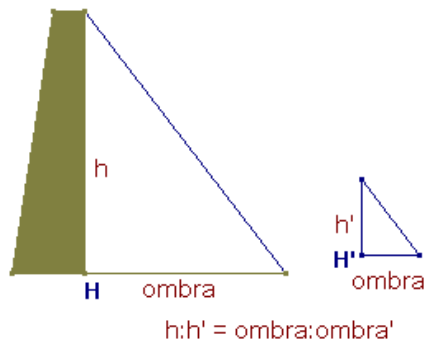


Fig. 6

Segue che i perimetri sono proporzionali a due lati corrispondenti e le aree ai quadrati di tali lati.

(5) Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.

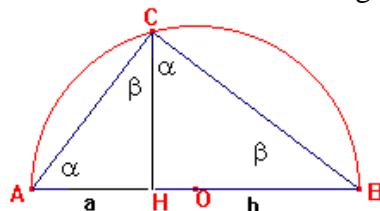


Fig. 7

Siccome gli angoli in H sono retti, $\alpha + \beta = \pi/2$ e inoltre $\alpha + \beta + \alpha + \beta = \pi$, perciò $ACB = \beta + \alpha = \pi/2$.

Non sappiamo come Ippocrate, per non dire di Talete, giustificasse queste proprietà; certamente quest'ultimo risultato era famoso e Dante lo ricorda nel XIII canto del Paradiso:

“... o se del mezzo cerchio far si puote triangol sì ch'un retto non avesse”.

(6) Dalla Fig. 7 si ricava per similitudine anche il teorema di Pitagora.

Ribaltando i triangoli (simili) AHC, BHC, ABC rispetto alle loro ipotenuse, si trova che il triangolo costruito sull'ipotenusa è uguale (equivalente) alla somma dei triangoli simili costruiti sui cateti del

triangolo rettangolo ABC. E siccome i quadrati sono tutti simili, segue il teorema di Pitagora. Anzi, non c'è bisogno che si tratti di triangoli o di quadrati: Una *qualunque figura* costruita sull'ipotenusa è uguale (equivalente) alla somma delle *figure simili* costruite sui cateti. Nella Fig. 8 il semidisco costruito sull'ipotenusa AB è equivalente alla somma dei semidischi costruiti sui cateti AC e BC del triangolo rettangolo ABC.

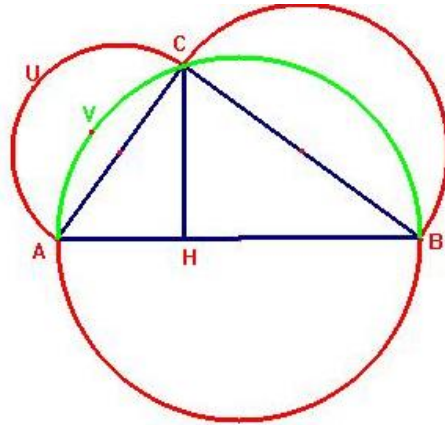


Fig. 8

Il problema ambizioso che si pose Ippocrate era quello di quadrare il cerchio. Egli osservò che se in due cerchi concentrici si tracciano due coppie di raggi formanti lo stesso angolo, si determinano due triangoli simili (omotetici) le cui basi (corde) sono proporzionali ai lati (raggi).

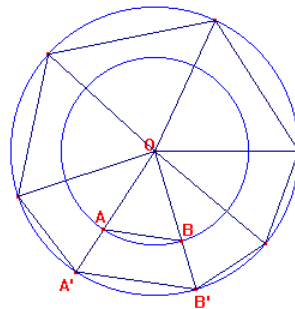


Fig. 9

$AB:A'B' = OA:OA'$. Considerando allora due poligoni inscritti nei due cerchi, segue che i perimetri sono proporzionali ai raggi e le aree sono proporzionali ai quadrati dei raggi. Questo risultato non dipende dal numero dei lati dei poligoni, perciò (al limite) deve valere anche per i cerchi: la lunghezza della circonferenza è proporzionale al raggio e l'area del cerchio è proporzionale al quadrato del raggio. Siccome il perimetro del poligono si approssima sempre più alla circonferenza e l'area del poligono all'area del cerchio, segue che le due costanti di proporzionalità sono correlate. Immaginando poligoni regolari, l'area del poligono è uguale alla lunghezza del semiperimetro per l'apotema e quindi l'area del cerchio è uguale alla semicirconferenza per il raggio. Da $L=kr$ ed $S=\pi r^2$, segue $k=2\pi$. Quadrare il cerchio è perciò equivalente a rettificare la circonferenza ed entrambi i problemi equivalgono a calcolare la costante π (con riga e compasso).

2. La prima lunula di Ippocrate.

Ippocrate parte da una lunula particolare, sperando per questa via di arrivare alla quadratura del cerchio.

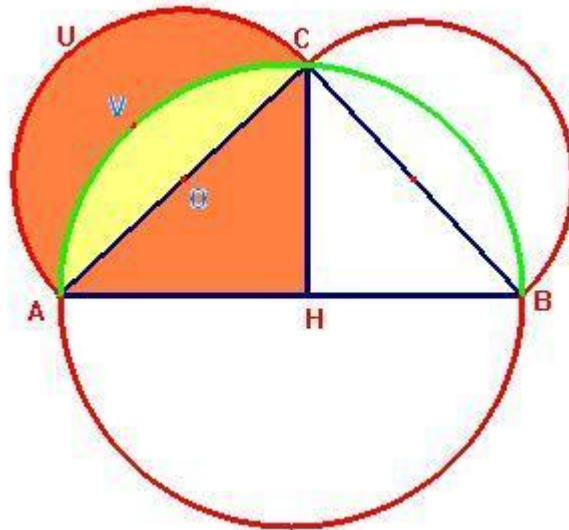


Fig. 10

Nel semicerchio di centro H e diametro AB inscrive un triangolo rettangolo isoscele ABC e sul cateto AC costruisce il semicerchio AUC. Per il teorema di Pitagora il semicerchio di diametro AC è la metà del semicerchio di diametro AB e perciò è uguale al quadrante AHCVA. Togliendo dalle due figure di area uguale la loro intersezione, cioè il segmento circolare AOCVA, si ricava che la lunula $L=AUCVA$ è uguale al triangolo $T=AHC$.

La lunula è equivalente a un triangolo e perciò è quadrabile.

In seguito Ippocrate trovò altre lunule quadrabili, ma non riuscì a quadrare il cerchio, impresa che ora sappiamo essere impossibile (con riga e compasso).

3. Condizione di quadrabilità delle lunule.

Userò la notazione moderna.

Si consideri la seguente figura

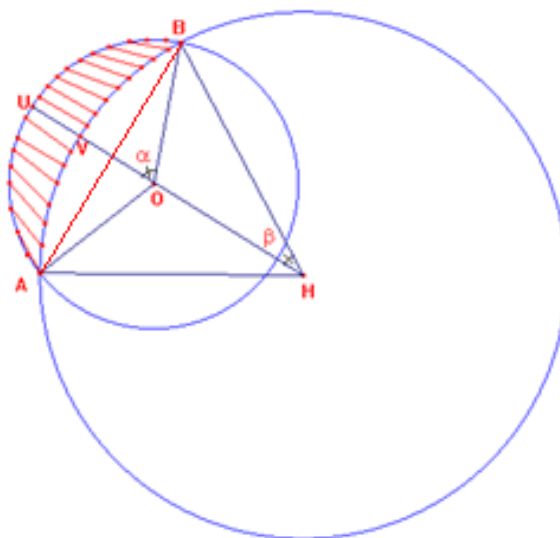


Fig. 11

Posto $r=OB$ ed $r'=HB$, risulta $r \sin \alpha = r' \sin \beta$, perché entrambi danno la metà della corda AB. L'area della lunula è $L = \text{Segmento circolare}(AUBA) - \text{Segmento circolare}(AVBA) =$

$$= \text{Sett(OAUB)} - \text{Triangolo(OAB)} - [\text{Sett(HAVB)} - \text{Triangolo(HAB)}] =$$

$$\alpha r^2 - \frac{1}{2} r^2 \text{sen}(2\alpha) - [\beta r'^2 - \frac{1}{2} r'^2 \text{sen}(2\beta)].$$

Condizione necessaria perché la lunula L sia quadrabile è che risulti $\alpha r^2 = \beta r'^2$ e, posto $m=r'^2/r^2$, la condizione di quadrabilità si scrive $\alpha = m\beta$, col vincolo che α non superi 90° . L'area della lunula sarà pertanto

$$L = \frac{1}{2} [mr^2 \text{sen}(2\beta) - r^2 \text{sen}(2m\beta)].$$

Siccome $r \text{sen} \alpha = r' \text{sen} \beta$ (metà di AB), segue $\text{sen}(m\beta) = \sqrt{m} \cdot \text{sen} \beta$.

La lunula sarà quadrabile, se l'equazione

$$[1] \quad \text{sen}(m\beta) = \sqrt{m} \cdot \text{sen} \beta$$

ammette soluzione positiva nell'incognita β per qualche valore di m positivo, diverso da 1 e costruibile con riga e compasso (numero *quadrabile*, cioè razionale con eventuali estrazioni di radici quadrate), e anche $\text{sen} \beta$ o, il ché è lo stesso, $\cos \beta$ deve essere quadrabile.

Oltre alla lunula di Ippocrate (vedi Fig. 10), il matematico Th. Clausen (1801-1885) nel 1840 pubblicò sul Giornale di Crelle a Berlino altre quattro lunule quadrabili, delle quali però Edmund Landau (Berlino 1877 – Berlino 1938) dimostrò che due erano già note a Ippocrate. Questi ne avrebbe perciò scoperto tre. In tutto le lunule quadrabili note sono cinque, che si ottengono per $m=2, 3, 3/2, 5, 5/3$; le prime tre scoperte da Ippocrate.

(a) **Caso $m=2$** . L'equazione [1] diventa:

$$\text{sen}(2\beta) = \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow 2 \text{sen}(\beta) \cos(\beta) = \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow \cos(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \beta = 45^\circ. \quad \text{Segue}$$

$\alpha = m\beta = 2\beta = 90^\circ$. E' la **prima lunula (Fig. 10) scoperta da Ippocrate**.

(b) **Caso $m=3$** . L'equazione [1] diventa

$$\begin{aligned} \text{sen}(3\beta) &= \sqrt{3} \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow \text{sen}(2\beta) \cos(\beta) + \cos(2\beta) \text{sen}(\beta) = \sqrt{3} \text{sen}(\beta) \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \text{sen}(\beta) \cos^2(\beta) + (2 \cos^2(\beta) - 1) \text{sen}(\beta) = \sqrt{3} \text{sen}(\beta) \rightarrow 4 \cos^2(\beta) - 1 = \sqrt{3} \rightarrow \cos(\beta) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

Perciò $\beta \approx 34^\circ, 2646$ e $\alpha = 3\beta = 102^\circ, 7939$ (**siamo nel caso della Fig. 1 Bis**).

(c) **Caso $m=3/2$** . L'equazione [1] diventa

$$\begin{aligned} \text{sen}(3 \frac{\beta}{2}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \text{sen}(\beta) \rightarrow \text{sen}(2 \frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}) + \cos(2 \frac{\beta}{2}) \text{sen}(\frac{\beta}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{sen}(\beta) \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \text{sen}(\frac{\beta}{2}) \cos^2(\frac{\beta}{2}) + [2 \cos^2(\frac{\beta}{2}) - 1] \text{sen}(\frac{\beta}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}} 2 \text{sen}(\frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}) \rightarrow \\ 4 \cos^2(\frac{\beta}{2}) - 2 \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\frac{\beta}{2}) - 1 &= 0 \rightarrow \cos(\frac{\beta}{2}) = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2} + 4}}{4} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4\sqrt{2}}, \text{ da cui si ricava } \cos(\beta): \end{aligned}$$

$$\cos(\beta) = 2 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 0,59307 \rightarrow \beta = 53^\circ,6248$$

e $\alpha = (3/2) \cdot \beta = 80^\circ,44 < 90^\circ$. (Caso della Fig. 1: lunula a menisco).

Quesito:

Nella Fig. 12 il triangolo rettangolo ABC è scaleno. Si può generalizzare il caso della prima lunula di Ippocrate (vedi Fig. 10) e concludere che la lunula di sinistra è equivalente al triangolo AHC e analogamente la lunula di destra è equivalente al triangolo BHC?

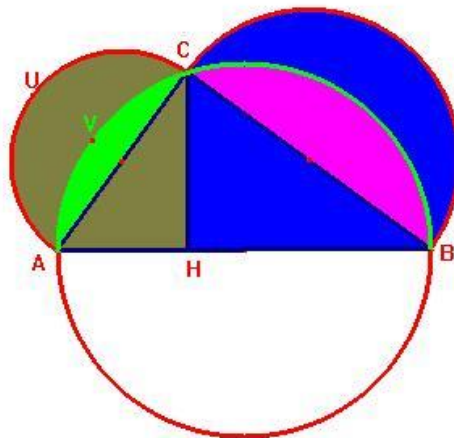


Fig. 12

Le lunule non sono le uniche figure curvilinee quadrabili. Il grande Archimede (287-212 a. C.) quadrò il settore parabolico (2/3 del rettangolo circoscritto). Per quanto riguarda il cerchio, ideò il bellissimo metodo dei poligoni regolari inscritti e circoscritti, per approssimare π , ma non riuscì, ovviamente, a quadrare il cerchio, per quanti sforzi facesse: “qual è l'geometra che tutto s'affigge per misurar lo cerchio e non ritrova, pensando, quel criterio ond'egli indige”. Bisognò aspettare Hermite (Charles Hermite, Dieuze 1822 – Parigi 1901) per dimostrare la trascendenza (e perciò a maggior ragione la non quadrabilità) del numero e di Nepero e poi Lindemann (Hannover 1852 – Monaco di Baviera 1939)), che nel 1882 dimostrò che e^x è trascendente per ogni numero algebrico x . Questo fondamentale risultato, associato alla celebre formula di Eulero (**Leonhard Euler** Basilea 1707 – San Pietroburgo 1783), $e^{i\pi} = -1$, permise finalmente a Lindemann di accertare la trascendenza di π , trovando così il principio di cui Archimede “indigeva” e di mettere la parola *fine* a un millenario problema.

Nota sui numeri algebrici e trascendenti.

Ricordo, a beneficio del lettore, che un numero reale si dice algebrico se è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi; in caso contrario si dice trascendente. I numeri $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3} \dots$ sono algebrici (i primi due quadrabili), invece “ e ”, “ π ” sono trascendenti e dunque non quadrabili. In seguito fu dimostrato che $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono trascendenti, se x (in radianti!) è algebrico. Fu così trovata un'infinità di numeri trascendenti. In assoluto il primo numero trascendente fu trovato nel 1844 da Liouville (**Joseph Liouville**, Saint-Omer, 1809 – Parigi 1882); è il numero 0,100100010000...

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,1100010000000000000000000000001000\dots$$

Nel 1874, Georg Cantor (San Pietroburgo 1845 – Halle 1918) dimostrò la numerabilità dei numeri algebrici e di conseguenza la più che numerabilità dei trascendenti. I numeri trascendenti sono la stragrande maggioranza dei numeri reali, sembrano “*pochi*” perché è difficile individuarli.