Ottavio Serra

La prova scritta di matematica.

1. Perché gli studenti incontrano tante difficoltà.

Che gli studenti italiani incontrino particolari difficoltà nello studio della matematica è certificato da indagini internazionali OCSE. Queste mettono altresì in luce forti differenze tra le varie aree geografiche del nostro paese.

Nel 2012, l'indagine PISA-OCSE misurerà nuovamente la competenza matematica degli studenti quindicenni, come è già avvenuto nel 2003. In quella rilevazione, gli studenti italiani riportarono risultati alquanto deludenti, ottenendo un punteggio complessivo di 466 punti, ben al di sotto della media OCSE (500 punti). In realtà, se si considerano i singoli punteggi ottenuti dagli studenti appartenenti alle cinque macroaree (Nord Ovest, Nord Est, Centro, Sud e Sud Isole) in cui il campione italiano è stato suddiviso, si nota che esiste un'enorme disparità tra i risultati conseguiti dagli studenti delle scuole del Nord Est e del Nord Ovest (superiore a 500), rispetto a quelli degli studenti del Centro e ancora di più del Sud e del Sud Isole, e ciò conferma quanto già emerso dalla precedente indagine di PISA 2000. Simili differenze non dovrebbero essere presenti in un Paese con un sistema scolastico centralizzato qual è il nostro, che dovrebbe dare una sostanziale omogeneità negli esiti; il fatto che invece esistano vuol dire che i risultati non dipendono soltanto dai programmi scolastici e che le scuole non sono ugualmente efficaci su tutto il territorio nazionale.

Da studi condotti nei corsi di dottorato di ricerca in pedagogia della matematica emergono varie interpretazioni. Una prima ipotesi interpretativa riguarda la conoscenza a volte scarsa, a volte molto superficiale o addirittura nulla, di alcuni degli argomenti presenti nelle prove, quali ad esempio quelli riguardanti la statistica e la probabilità. Alla limitata conoscenza degli argomenti affrontati dalle prove si accompagna a volte una scarsa comprensione del testo o la sua errata interpretazione da parte degli studenti, probabilmente a causa di una lettura poco attenta e superficiale della domanda oppure di una lettura non completa. Un altro elemento che emerge è la percezione di trovarsi di fronte a studenti che hanno appreso determinate regole, ma in modo mnemonico, meccanico e poco consapevole. Ciò che si intuisce è una scarsa abitudine al ragionamento, il considerare, da parte degli studenti, la matematica come qualcosa che non appartiene loro, una materia lontana, da cui hanno appreso solo rigide regole che pedissequamente applicano senza averle però interiorizzate e comprese nella loro interezza.

Gli studenti mostrano anche una certa difficoltà a individuare e riconoscere la matematica che hanno appreso a scuola, sia nell'indagine condotta nel progetto PISA-OCSE, sia nella prova scritta di matematica dell'esame di stato di Liceo scientifico, e conseguentemente a saperla applicare in contesti diversi. In altre parole, gli studenti italiani hanno difficoltà in quello che viene definito, all'interno del quadro teorico di riferimento dell'indagine PISA 2003, "il processo di matematizzazione", cioè la capacità di identificare gli aspetti matematici pertinenti a un problema collocato nella realtà, nel saper rappresentare il problema in modo diverso, nel senso di saperlo organizzare secondo concetti matematici e saper effettuare ipotesi e congetture adeguate. Infine si nota un'assenza quasi totale di processi metacognitivi quali quelli relativi all'applicazione di strategie durante la risoluzione dei problemi, oppure alla mancanza di processi di controllo, tipo riflettere sulla compatibilità o meno di un determinato risultato. Si segnalano in particolare tre difetti metodologici che la scuola, per inerzia, pigrizia o "*mancanza di tempo*" non sempre riesce a correggere. uno è il voler utilizzare per forza tutti i dati che la traccia di un problema fornisce, un altro è il voler risolvere un problema di matematica necessariamente attraverso dei calcoli e l'ultimo è la totale mancanza di controllo del risultato ottenuto.

2. Possibili rimedi.

Nessuno possiede ricette magiche e ciò che dirò è semplicemente un'indicazione di massima per favorire la curiosità degli studenti, senza la quale l'apprendimento non può che essere passiva accettazione mnemonica di regole.

La matematica richiede innanzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi e allora è istruttiva e anche divertente. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi, formalismi.[1] Giova soprattutto partire da svariati esempi ottenuti modificando il problema, riducendolo a casi particolari e tentare di vedere le regolarità sottostanti; poi giustificare, se ci si riesce, il procedimento congetturato.
Un allenamento efficace ci è dato dalla risoluzione di problemi aritmetici tipo quelli presenti nella "Settimana enigmistica", quali: *Come continueresti (logicamente) questa data successione?* Alcuni begli esempi si trovano in un famoso libro di Hofstadter, professore di scienze cognitive e informatica alla Indiana University[2]. Ne riporto due.

a. Come continuereste la successione 1, 4, 27, 64, 625, … ? Scrivete una formula. (Questo è facile).

b. Ancora una successione, ma questa volta molto più sottile e misteriosa. Eccola: 0, 1, 2, …

Qual'é il prossimo termine? Viene spontaneo rispondere 3, ma se mi si dice che è 720!, quale sarà il prossimo? (Ricordo che il fattoriale è così definito 0!=1, n!=(n-1)!.n, cioè, per n>0 n!=1.2…n). La successione é dunque questa: $\mathbf{a_0=0, a_1=1, a_2=2, a_3=720!}$ Chi è $\mathbf{a_4}$? E $\mathbf{a_n}$? Un'idea è questa: 720 è a sua volta 6!, perciò $a_1=1!!$, $a_2=2!!$, $a_3=6!!$; e poi? Intanto non si capisce come mai dopo il 2 (l'indice 2) venga il 6; inoltre $a_0=0$ resta fuori schema, perché 0!!=0!=1. La soluzione che si prospetta non è *simmetrica*, manca di *eleganza*. Ma se notiamo che a sua volta 6=3!, forse ci siamo. Voi ci siete?
A proposito, domanda da 50 centesimi: perché si pone 0!=1 ? Forse per lo stesso motivo per cui ogni numero positivo elevato a zero è uguale a uno? Fatevi guidare dalle regolarità, dalla simmetria, dall'eleganza (e dalle vostre conoscenze di calcolo combinatorio).
Un libro che consiglio vivamente è "*La scoperta matematica*" di Polya[3], insigne studioso ungherese di problemi della didattica della matematica. Il libro è rivolto prima di tutto agli insegnanti, perché, dice l'autore, "se il docente non è stato addestrato alla risoluzione critica e creativa dei problemi, come si può pretendere che guidi su questa strada i suoi alunni?".
Il libro contiene spunti, consigli e suggerimenti illuminanti. Dice Polya: *esaminare il testo del problema, chiedersi se i dati sono tutti necessari, se sono sufficienti a raggiungere il risultato, se si sono già incontrati problemi analoghi, chiedersi quali sono i prerequisiti che il problema richiede, se è il caso di studiare prima qualche caso particolare, se forse è meglio generalizzare, o generalizzare dopo aver risolto il problema, ricavare qualche schema utile per affrontare futuri argomenti, risolvere lo stesso problema in più modi.*

Ora presenterò degli esempi sui possibili modi di affrontare problemi di matematica, partendo da alcuni quesiti della prova scritta per il liceo scientifico.

1. Decimo quesito del questionario, sessione ordinaria del 2005, corso di ordinamento.

"*Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione* $f(x) = arctg(x) - arctg(\frac{x-1}{x+1})$ *è costante, indi si calcoli il valore di tale costante*".
Si verifica facilmente che la derivata di f (x) è zero, ma ciò non garantisce che la funzione sia costante (l'annullarsi della derivata nell'insieme di definizione è condizione necessaria, ma non sufficiente). Come si dimostra nel corso curriculare, applicando il teorema di Lagrange, la funzione è costante, se è continua in un intervallo e se la derivata è zero nei punti interni. Ora la funzione proposta è continua nell'insieme di definizione D e la derivata è zero in D, ma D non è un intervallo: D

[1] Bruno de Finetti: "Il saper vedere in matematica", Loescher Editore Torino, 1967.
[2] Douglas Hofstadter: "Concetti fluidi e analoghe creative", Adelphi, 1996.
[3] George Polya: "La scoperta matematica", Feltrinelli 1971

è l'asse reale privato del punto x = -1, $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, è l'unione di due intervalli, perciò il teorema ricordato non è applicabile. È invero f (x) = - 3π/4 per x < -1, f (x) = π/4 per x > -1.
Ci si può chiedere se l'estensore del testo ministeriale fosse consapevole del trabocchetto e abbia voluto vedere come se la sarebbero cavata i candidati (e i commissari) o se è incorso in un involontario infortunio, cosa più probabile, dato il tono apodittico della traccia: "*Si dimostri ... che ...*". Il fatto è che l'*ipse dixit* di pitagorica memoria domina ancora la cultura scolastica, non solo scientifica, e ben difficilmente un professore o, a maggior ragione, uno studente metterebbe in dubbio un'affermazione munita del sacro sigillo dell'autorità ministeriale. Con buona pace dello spirito critico che gli studenti avrebbero dovuto acquisire alla fine degli studi liceali e che i docenti avrebbero dovuto favorire.
E' comico il fatto che la soluzione pubblicata da un quotidiano a tiratura nazionale, a firma di una professoressa di una grande città del Nord, cada nell'errore *suggerito* (?) dal Ministero. La professoressa summenzionata considera f (x) costante e uguale a π/4. Volendo entrare nella sua testa (e magari in quella ministeriale), si possono avanzare due congetture.
Congettura a. Si é calcolata f (x) in un sol punto, per esempio x=0, oppure x=1, oppure x→+∞, nella ferma convinzione della costanza della funzione, autorevolmente affermata dalla traccia ministeriale e sfortuna ha voluto che non si sia tentata una verifica per qualche x < -1.

Congettura b. Si è usata la bella formula trigonometrica $arctg(a) - arctg(b) = arctg\,\frac{a-b}{1+ab}$,

che, per $a = x$ e $b = \frac{x-1}{x+1}$, fornisce $arctg(x) - arctg\,\frac{x-1}{x+1} = arctg\,\frac{x^2+1}{x^2+1} = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$.
Sfortunatamente la bella formula **non vale** se

$$arctg(a) < 0, arctg(b) > 0$$

come accade nel nostro caso per x<-1. Ciò perché la funzione *tangente* si può invertire solo dopo aver ristretto il dominio a un intervallo nel quale la funzione sia continua e **monotòna**, per esempio l'intervallo aperto]-π/2 , π/2[.

2. Secondo quesito del questionario, sessione ordinaria del 2011, corso di ordinamento.

"Si trovi il punto della curva

$$y = \sqrt{x}$$

più vicino al punto di coordinate (4, 0)" .
Gli studenti sanno risolvere problemi di massimo e di minimo per funzioni assegnate, ma non sono abituati a ciò che gli psicologi chiamano "*Transfert*", cioè la capacità di applicare competenze acquisite in un dato contesto ad ambiti affini, ma diversi. In questo caso si tratta preliminarmente di costruire la funzione "distanza tra il punto A(4, 0) e il generico punto P(x, y) della curva:

$$h(x) = d^2(x) = (\overline{A}\overline{P})^2 = (x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2 = x^2 - 7x + 16$$

(Poiché la distanza è non negativa, essa è minima se e solo se lo è il suo quadrato).
Siccome h(x) è una funzione quadratica, il suo minimo si ha nel vertice della parabola (non c'è bi sogno di scomodare le derivate): si trova x = 7/2. Il punto P è perciò

$$P\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

e la minima distanza da A è

$$d\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Un modo alternativo di procedere è il seguente. Se P è il punto della curva di minima distanza da A, la retta AP deve essere perpendicolare alla tangente in P alla curva. Detta a l'ascissa di P, il coefficiente angolare della tangente alla curva in P è $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ e il coefficiente angolare della normale é $-2\sqrt{a}$,

perciò l'equazione della normale alla curva in P è

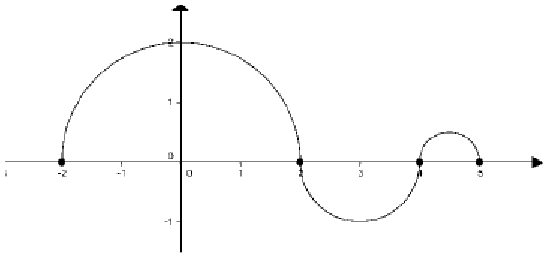
$$y-\sqrt{a}=-2\sqrt{a}(x-a).$$

Imponendo che passi per A(4, 0), si ottiene a=7/2, e si ritrovano i risultati precedenti.

(Che succede se in P la curva non è *liscia*?).

3. Problema 1 della sessione ordinaria 2010, corso sperimentale (PNI).

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \le x \le 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in (0, 0), (3, 0), $(\frac{9}{2}, 0)$ e raggi rispettivi $2, 1, \frac{1}{2}$.



a) Si scriva un'espressione analitica di *g(x)*. Vi sono punti in cui *g(x)* non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?

b) Per quali valori di *x*, $-2 < x < 5$, la funzione *f* presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)\,dt$, si determini *f*(4) e *f*(1).

d) Si determino i punti in cui la funzione *f* ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di *f*(*x*)? Qual è l'andamento qualitativo di *f*(*x*)?

Si possono sviluppare i 4 punti del problema conoscendo solo i concetti di derivata e integrale, senza bisogno di adoperare le tecniche del calcolo infinitesimale Non è il caso di sparare a cannonate sui passeri! Vediamo ora i quattro punti.

a) Si tratta di raccordare tre semicerchi:

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{-8+6x-x^2}, 2 \le x \le 4 \\ \sqrt{-20+9x-x^2}, 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

La funzione g è non derivabile nei punti di ascissa -2, 2, 4, 5 in cui la tangente al grafico è verticale.

b) La funzione f(x) rappresenta un'area con segno, perciò f(x) ha un massimo relativo per x=2, un minima relativo per x=4. [f(2)=2π, f(4)=2π-π/2=3π/2. [Si tratta di sommare aree di semidischi con segno].

La g(x) è zero anche nei punti estremi x=-2 e x=5, perciò anche in tali punti f(x) ha tangente orizzontale. Si noti che f(x) ha il minimo assoluto per x=-2: f(-2)=0, il massimo assoluto è invece il massimo relativo f(2)= 2π, perché f(5)= 3π/2+π/8=13π/8.

c) f(4) è l'area del primo semidisco (positivo) meno il secondo semidisco (negativo perché al di sotto dell'asse x), perciò f(4)= 3π/2. Per calcolare f(1) non c'è bisogno di integrali (vedi fig. sottostante).

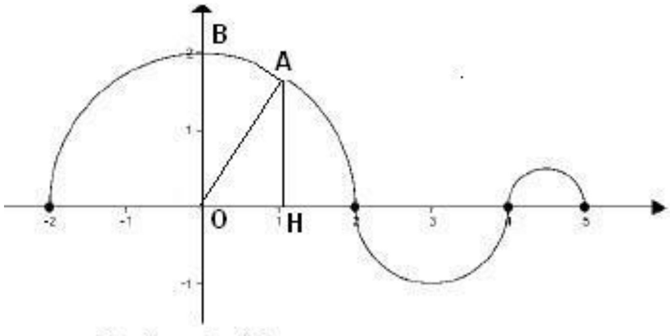
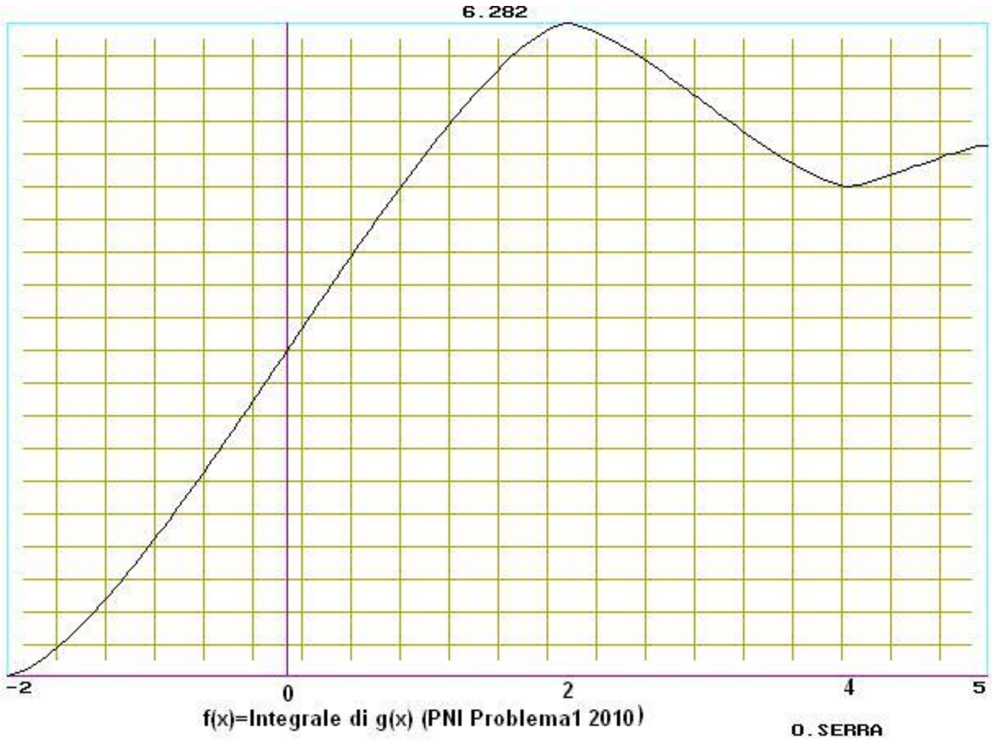


Grafico di g(x)

f(1) è somma del quadrante di sinistra del primo semidisco (di raggio 2) più il trapezoide OHAB. Quest'ultimo è somma del settore circolare OAB il cui angolo al centro é di 30° (perché?) e perciò ha area 4π/12=π/3 e del triangolo OHA la cui area è $\frac{\sqrt{3}}{2}$. In definitiva

$$f(1) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) I punti in cui f(x) ha derivata seconda zero sono quelli di massimo o minimo per g(x), cioè x=0, x=3, x=9/2. (Punti di flesso per f). Il segno di f(x) è positivo in tutto l'intervallo [-2,5], perché il semidisco negativo (il secondo) è minore del primo in valore assoluto. L'andamento di f(x) è il seguente:



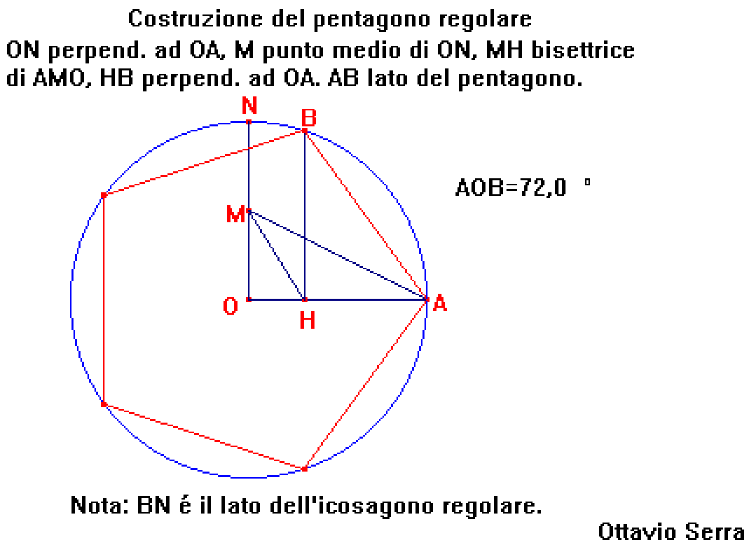
f(x)=Integrale di g(x) (PNI Problema1 2010)

Questo grafico è stato realizzato col mio programma in Pascal "FunzInt" (Funzione integrale).

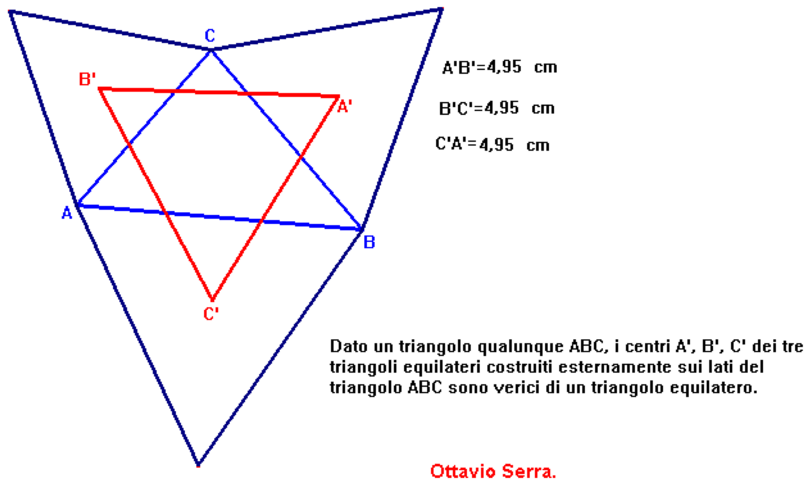
(Come si vede la soluzione del problema occupa due paginette).

4. Propongo ora un bel quesito di geometria:

"*Costruire (con riga e compasso) il lato del pentagono regolare inscritto in un cerchio*", seguendo un interessante procedimento proposto da Piergiorgio Odifreddi su "Le Scienze", marzo 2012.
Dato un cerchio di centro O e raggio OA (che si può assumere uguale a uno: perché?), si costruisce il raggio ON perpendicolare a OA, si prende il punto medio M di ON, si traccia la bisettrice dell'angolo AMO che interseca OA in H, si traccia la perpendicolare a OA in H che interseca il cerchio in B. Dico che AB è il lato del pentagono inscritto nel cerchio.
Come si dovrebbe sapere, tutte le costruzioni indicate si possono effettuare con riga e compasso. Ora si tratta di procedere alla dimostrazione. E' chiaro che se AB è il lato del pentagono regolare, esso deve essere visto da O sotto un angolo di 1/5 di giro, cioè di 72° (Vedi figura sottostante).



Per dimostrare che AB è il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio in figura, occorre procedere secondo i seguenti passi:
1° Calcolare OH e HA; **prerequisito**: il teorema della bisettrice *La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali ai rimanenti lati*. Sapreste dimostrarlo?
2° Calcolare HB dal triangolo rettangolo OHB; (assunto uguale a 1 il raggio del cerchio, OB=1).
3° Calcolare AB.
4° Verificare che l'angolo AOB è 1/5 di angolo giro, calcolandone il coseno col teorema di Carnot applicato al triangolo AOB; prerequisito: in un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36°, la base è la sezione aurea del lato obliquo; da qui ricavare il seno di 18° che è uguale al coseno di 72°=1/5 di giro.
Si sarebbe potuto procedere diversamente? Certamente, costruita la sezione aurea del raggio, con il noto metodo seguito da Euclide negli *Elementi*, essa è il lato del decagono regolare; basta poi congiungere alternativamente i vertici del decagono per ottenere il pentagono.
Nota: Sapreste costruire (sempre con riga e compasso) il poligono regolare di 15 lati? (non propongo quello di 8 o di 12 o di 16 lati, perché si procede banalmente per bisezione; né quello di 7, 9, 11 o 14 lati, dopo che Gauss e Wantzel hanno dimostrato che ciò è impossibile).
Che cosa hanno dimostrato precisamente Gauss e Wantzel?
5. Un altro bel problema di geometria è quello che va sotto il nome di "Teorema di Napoleone": *Dato un triangolo qualunque ABC, si dimostri che i centri dei tre triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di ABC sono vertici di un triangolo equilatero.* (Vedi figura seguente).



Si proceda così: detti A', B', C' i centri dei triangoli costruiti rispettivamente su BC, CA, AB, si calcoli A'B' in funzione dei lati a, b, c del triangolo ABC e si faccia vedere che A'B' è espresso in modo *simmetrico* rispetto ai lati a, b, c. (Applicare il teorema del coseno al triangolo A'CB'). Detto γ l'angolo ACB, quanto vale l'angolo A'CB'?

6. Per non parlare solo di geometria, propongo ora alcuni quesiti aritmetici assegnati alcuni anni fa all'esame di ammissione alla "*Normale*" di Pisa.

6a. *Si immagini la successione dei numeri naturali colorati nel modo seguente: 1 Rosso, 2 Verde, 3 e 4 Rossi, 5 e 6 Verdi, 7, 8 e 9 Rossi, 10, 11 e 12 Verdi e così via, quattro numeri Rossi e quattro Verdi, cinque Rossi e cinque Verdi, eccetera. Si chiede il colore del numero 1000000 (un milione).*
Se non vedete subito la risposta, continuate la sequenza, cercate qualche regolarità, avanzate una congettura. Provate la congettura sui numeri già scritti (colorati), poi dimostratela, se è corretta, col principio di "*induzione "completa" di Peano"*. Di che colore sarà mille miliardi? Generalizzate il problema: come calcolare il colore del generico numero n? (queste ultime due domande le ho aggiunte io).

6b. *Quali sono le ultime quattro cifre di* 5^{3129}*?*
Non provate a calcolare la potenza, viene un numero gigantesco (di 2188 cifre: controllate). Procedete così: per esponente >0 l'ultima cifra è sempre 5, per esponente >1 le ultime due sono 25, e poi … Come si alternano le ultime tre cifre? Andate avanti. Se avete intuito una regolarità, dite con quale periodicità si ripetono le ultime 4 cifre. Ora siete in grado di rispondere al quesito. (In realtà il quesito proposto alla Normale era più complicato: trovare le ultime 6 cifre).
Risolvete il quesito analogo: determinare le ultime due cifre di 3^{5297}.

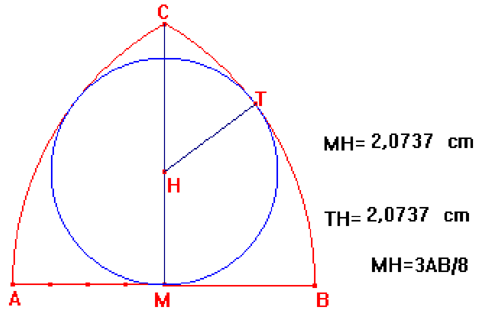
7. Un quesito di trigonometria. *Calcolare 10000.sen(36°).sen(72°).sen(108°).sen(144°),* ovviamente senza usare la calcolatrice. L'unico prerequisito è conoscere il teorema che dice: "La base di un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36° è la sezione aurea del lato obliquo". Ciò consente di calcolare il sen(18°) e il resto segue facilmente.

8. Un bel problema è il seguente: *Calcolare il* ***massimo*** *della funzione 105.cos(x)-208.sen(x)+103.*
Naturalmente, non occorre scomodare le derivate. Tutto sta a trovare il massimo della finzione f(x) = 105cos(x)-208sen(x), ma come fare? Come dice Polya, **generalizzare per semplificare**. Conviene considerare la funzione g(X,Y)=aX+bY soggetta al vincolo $X^2+Y^2=1$. Considerato il fascio di rette parallele aX+bY=k, k sarà il massimo o il minimo di g(X,Y) per le due rette del fascio tangenti al cerchio di equazione $X^2+Y^2=1$. Siamo passati da un problema di trigonometria a un problema di programmazione lineare in due variabili, in cui si tratta di determinare il massimo dell'obiettivo g(X,Y) sotto il vincolo dato. Verificare che il massimo di g(X,Y) è

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

e perciò il massimo di f(x) è 233. Il massimo richiesto è infine 233+103=336.

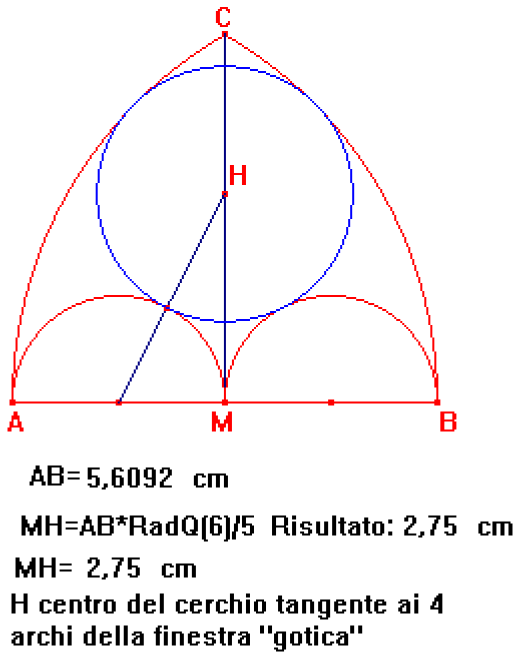
9. E ora ancora un po' di geometria. "Determinare il centro del cerchio (*rosone*) inscritto nella finestra *gotica* avente per base (*davanzale*) il segmento AB di lunghezza c e limitata lateralmente dai due archi di cerchio AC di centro B e raggio c e BC di centro A e raggio c. (Vedi figura sottostante)



H centro del cerchio tangente ai lati della finestra "gotica"

Dimostrare che il centro H sta sull'asse di AB (bella forza!) e che MH = (3/8)AB.

10. Generalizziamo. "Determinare il centro H del rosone inscritto nella finestra *bifora* della figura sottostante.



Dimostrare che

$$MH = \frac{\sqrt{6}}{5} AB$$

Nota. Tutte le figure sono state realizzate con Cabri.