Ottavio Serra
MOTI PIANI

1. Generalità.

a) La velocità è un vettore tangente alla traiettoria.

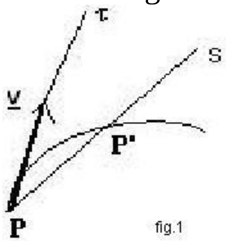


fig.1

La particella sia in P all'istante t e in P' all'istante t' = t+Δt; allora la velocità vettoriale media è

$\underline{\mathbf{v}}_m = \dfrac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t}$. La velocità istantanea in P (all'istante t) è $\underline{\mathbf{v}}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t}$ (vedi fig.1).

Ma se Δt→0, P' → P e la secante, s, tende alla tangente τ, perciò **v** è tangente alla traiettoria.

Si noti che la velocità scalare media è l'arco PP' diviso Δt e perciò è maggiore del modulo della velocità vettoriale media (l'arco è più lungo della corda); però, al limite per P→P', l'arco tende alla corda e la velocità scalare istantanea è uguale al modulo della velocità vettoriale istantanea.

b) L'accelerazione **a** è diretta verso l'interno (la concavità) della traiettoria e, se il modulo di **v** è costante, **a** è perpendicolare a **v**.

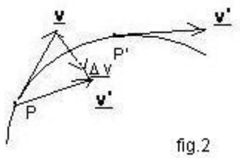


fig.2

L'accelerazione media è $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ diretta verso l'interno (la concavità) della traiettoria (vedi fig.2).
L'accelerazione all'istante t (in P) è

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m \; .$$

Decomponendo **a** in accelerazione tangenziale $\mathbf{a}_\tau$ parallela a **v** e accelerazione normale $\mathbf{a}_n$ perpendicolare a **v**, si vede che $\mathbf{a}_\tau$ modifica il modulo di **v**, $\mathbf{a}_n$ la direzione di **v** (vedi fig.3).

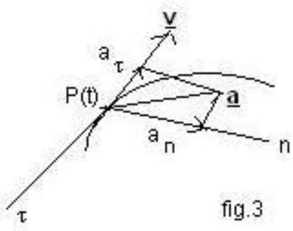


fig.3

Perciò, se $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, la traiettoria è rettilinea; se è $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{0}$, la velocità è costante in modulo: moto uniforme; se poi il raggio di curvatura è costante, la traiettoria è circolare (moto circolare uniforme).
Ah! ah! Il raggio di curvatura in un punto P di una curva è il raggio del cerchio *osculatore* (dal latino *osculo*: baciare), cioè del cerchio che ha in comune con la curva (<u>almeno</u>) **tre punti coincidenti in P.**

2. Moto circolare uniforme.

Siccome il moto è uniforme e la traiettoria è chiusa, il punto P passa a intervalli di tempo costante per una data posizione. Questo intervallo di tempo si chiama periodo: T; risulta $T = \dfrac{2\pi r}{v}$, essendo r il raggio del cerchio, v il modulo (costante) della velocità. Frequenza f è l'inverso di T, velocità angolare ω è l'angolo descritto dal raggio vettore OP nell'unità di tempo: ω $= \dfrac{2\pi}{T}$ = 2πf; v = ωr.

La ω si misura in $rad.s^{-1}$ (radianti al secondo, perché è opportuno misurare gli angoli in radianti e non in gradi: chissà perché!). La frequenza f si misura ovviamente in s^{-1} (Hz, Hertz).

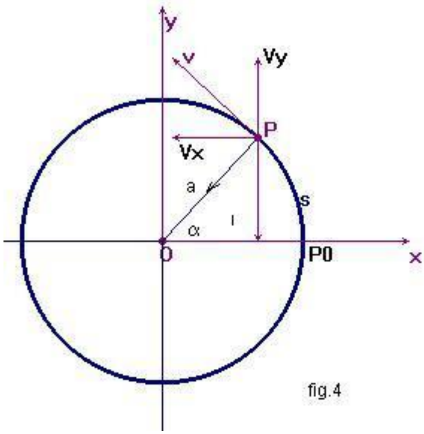


fig.4

(Vedi fig.4)

Assunto uguale a zero l'istante in cui il punto mobile passa per P_0, l'angolo α = s/r =vt/r,

$$\alpha = \frac{2\pi r}{T}\frac{t}{r} = \frac{2\pi}{T}t = \omega t$$

Nel riferimento cartesiano xOy per il punto mobile P avremo:

$$\vec{r} = \vec{OP} = \begin{cases} x = r.\cos(\alpha) = r.\cos(\omega t) \\ y = r.sen(\alpha) = r.sen(\omega t) \end{cases};$$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = -v.sen(\alpha) = -\omega r.sen(\omega t) \\ v_y = +v.\cos(\alpha) = +\omega r.\cos(\omega t) \end{cases};$$

Per determinare l'accelerazione conviene riferirsi alla figura 5.

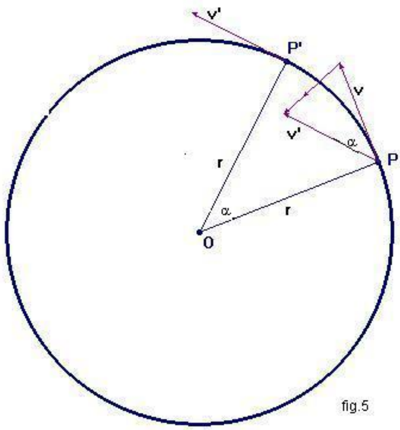


fig.5

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Se Δt→0, P'→P e anche α→0, perciò **a**, diventando perpendicolare a **v**, cioè alla tangente al cerchio, si allinea col raggio r e punta verso il centro O: ***accelerazione centripeta***.
Per calcolarne il modulo, si osservi che i triangoli P**vv**' e POP' sono simili (vedi fig.5), perché entrambi isosceli e con lo stesso angolo al vertice (angoli tra rette perpendicolari…). Perciò

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{PP'}{r}=\frac{\Delta r}{r}\Rightarrow \Delta v=\frac{v}{r}\Delta r=\approx \frac{v}{r}\Delta s=\frac{v}{r}r\alpha=v\alpha \quad .$$

Segue che a=v.ω, da cui si ricava anche a=ω^2r e ancora a = $\frac{v^2}{r}$.

Vediamo ora le componenti x,y dell'accelerazione:

$$\vec{a}=\begin{cases} a_x=-a.\cos(\alpha)=-\omega^2 r.\cos(\omega t) \\ a_y=-a.sen(\alpha)=-\omega^2 r.sen(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \vec{a}=-\omega^2\vec{r}$$

3. Moto armonico

È la proiezione su una retta (un diametro) di un moto circolare uniforme. Scelto il diametro come asse delle x, le formule del moto armonico sono:

$$\begin{cases} x=r.\cos(\omega t) \\ v=-\omega r.sen(\omega t) \\ a=-\omega^2 r.\cos(\omega t)=-\omega^2 x \end{cases}$$

Siccome la traiettoria è un segmento percorso avanti e indietro, la ω si suole chiamare, in tale contesto, *pulsazione* o *frequenza angolare*.

Moto dovuto a una forza elastica.

Una forza elastica è una forza di richiamo la cui intensità (modulo) è proporzionale allo spostamento: $\vec{F}=-k\vec{x}$. La costante positiva k si chiama costante elastica. Siccome il moto è unidimensionale, possiamo evitare la notazione vettoriale e scrivere: F = -kx. Segue che l'accelerazione a = F/m = -(k/m)x.

Confrontando con le formule del moto armonico, si vede che la forza elastica produce un moto armonico con $\omega^2 = k/m$ e periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ .$$

Una forza elastica è approssimativamente quella esercitata da un elastico teso o da una molla elicoidale d'acciaio quando la deformazione (allungamento o compressione) è piccola: Legge di Hooke. (Come si fa a stabilire se una deformazione è *piccola*?)

4. Moto pendolare.

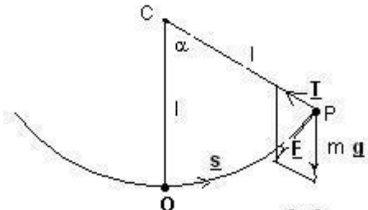


fig.6

Una pallina, di massa m, è appesa a un chiodo C mediante un filo *inestensibile* di lunghezza l.

Sotto l'azione del peso m<u>g</u> e della tensione <u>T</u> del filo la pallina si muove lungo un arco di circonferenza; la risultante delle due forze è <u>F</u>, tangente all'arco di circonferenza. Dalla figura si vede che <u>F</u> = -mg.senα.(vers <u>s</u>) , essendo vers <u>s</u> il versore della tangente alla traiettoria; l'arco s si misura a partire dal punto *più basso* O (Vedi fig.6). L'accelerazione **<u>a</u>** = -g.senα.(vers <u>s</u>) = -g.sen(s/l).(vers <u>s</u>). Se α è *piccolo**, sen(s/l) $\approx$ s/l. Da qui segue **<u>a</u>** = -g. s/l.(vers **<u>s</u>**) ovvero **<u>a</u>** = $-\frac{g}{l}$**<u>s</u>**. Si conclude che le piccole oscillazioni sono approssimativamente armoniche e perciò ***isocrone*** con $\omega^2 = \frac{g}{l}$ e periodo T = $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Isocrone vuol dire che il periodo delle oscillazioni è indipendente dall'ampiezza α, se questa è inizialmente *piccola* (se un angolo α di 3° si vuole considerare piccolo e se il periodo è, poniamo, di 2 secondi, questo resta di 2 secondi anche quando, per attrito, l'angolo è sceso a 1°).

Osservazione *. Come si fa a stabilire che α è *piccolo?*

La tensione del filo di sospensione.

La tensione **T** del filo (vedi fig.6) si ricava facilmente nel caso statico (P è fermo). In tal caso il modulo è $T = mg.\cos\alpha$. Durante il moto, però, il filo deve non solo reagire alla componente radiale del peso, ma esercitare la forza centripeta mv^2/l necessaria a tenere la pallina P sulla traiettoria:

$$\mathbf{T = mg.\cos\alpha + mv^2/l.}$$

Per determinare v ricorriamo alla legge di conservazione dell'energia.

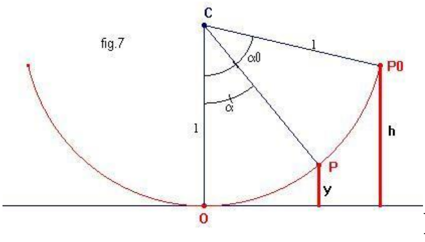


Fig. 7

Dalla fig.7 si vede che $mgh = mgy+mv^2/2$; $h=l(1–\cos\alpha_0)$, $y=l(1–\cos\alpha)$, perciò $v^2 = 2gl(\cos\alpha– \cos\alpha_0)$, che permette di determinare la velocità nel punto generico P (la velocità è assunta uguale a zero nel punto iniziale P_0). Perciò la tensione T nel punto P è

$$\mathbf{T = mg.\cos\alpha+2mg(\cos\alpha– \cos\alpha_0) = mg(3\cos\alpha–2\cos\alpha_0).}$$

Si noti che il calcolo di v e di T **non è limitato** al caso delle **piccole oscillazioni**, ma vale per ogni angolo iniziale α_0. In particolare, se α_0 è di 90°, nel punto più basso O la tensione è il triplo del peso; se poi α_0 è 180° (il pendolo è inizialmente *in* *piedi* su C, il ché richiede che il filo sia sostituito da un'asticina rigida e di peso trascurabile), T (in O) è 5 volte il peso.

Esercizi.

1) Al soffitto di un veicolo è sospeso un pendolo di massa m=200 grammi. In fase di accelerazione il filo di sospensione forma un angolo di 20° con la verticale. Calcolare l'accelerazione del veicolo e la tensione del filo (accelerazione di gravità g = 9,8 m/s^2).

2) Una pallina di 300 grammi è appesa a una molla tenuta verticale che, allungata di tre centimetri, oscilla compiendo due oscillazioni al secondo. Calcolare la costante elastica della molla e la velocità massima della pallina.

5. Moti centrali.

Il moto di una particella P di massa m soggetta a una forza **F** diretta verso un punto fisso O, centro del moto, si chiama centrale. Rientra nei moti centrali anche il moto in cui la direzione della forza è fissa (il centro della forza va all'infinito).
Posto **r** = OP (raggio vettore), **F** = α(r).**r**, diretta verso il centro O se α>0, divergente se α<0.
Il momento della forza è

[1] $$\vec{\tau} = \vec{r} \times F = \vec{r} \times \alpha \vec{r} = \vec{0}.$$

Il momento angolare (momento della quantità di moto) è

[2] $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, la cui derivata rispetto al tempo è

[3]

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{\tau} = \vec{0}.$$

(Ho indicato, come è d'uso, con un punto la derivata temporale). Perciò il momento angolare è costante nel tempo. Siccome il momento angolare è ortogonale al raggio vettore **r** = ***OP***, il puto

P descrive una traiettoria piana (giacente nel piano passante per O e perpendicolare ad ***L***. (***Si conclude che i moti centrali sono moti piani***).

Velocità areale. L'elemento d'area (vedi fig. 8) $d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}dt = \frac{1}{2}\frac{\vec{L}}{m}dt$.

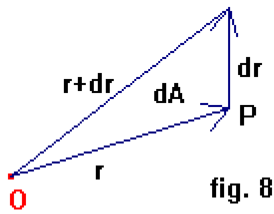


fig. 8

Perciò la velocità areale è $\frac{d\vec{A}}{dt} \equiv \dot{\vec{A}} = \frac{\vec{L}}{2m}$ costante (in modulo, direzione e verso).

È la **2ª legge di Keplero**, **che vale per tutti i moti centrali e non solo per i moti planetari.**

Energia. I campi centrali sono conservativi.

Il lavoro W compiuto dalla forza *F* quando P si sposta da P_0 a P_1 lungo un arco di curva γ è

$$W = \int_{\gamma(P_0,P_1)} \vec{F}(\vec{r}).d\vec{s} = \int_{\gamma(P_0,P_1)} \alpha(r)r.ds\cos(\theta) =$$

$$= \int_{\gamma(P_0,P_1)} \alpha(r)rdr = \beta(r_1) - \beta(r_0)$$

indipendente dall'arco γ **(i campi di forza centrale sono conservativi**).

E' d'uso porre U(r) = -β(r) : U si chiama energia potenziale. Perciò

$$W = U_0 - U_1.$$

N.B. Ho indicato con r il modulo del raggio vettore ***r***, con d***s*** il vettore che nella fig. 8 ho chiamato d***r***, in modo che nell'ultimo integrale ho potuto chiamare dr la proiezione di ds sul raggio vettore: dr=ds.cos(θ).
Siccome il lavoro di una forza è la variazione di energia cinetica K:

$$K_1 - K_0 = \int_{\gamma(P_0,P_1)} \vec{F}(\vec{r}).d\vec{s} = \int_{\gamma(P_0,P_1)} m\vec{a}.\vec{v}dt = \int_{\gamma(P_0,P_1)} m\vec{v}d\vec{v} = \int_{v_0}^{v_1} mvdv \Rightarrow$$

$$W = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 ,$$

Confrontando si ottiene K_1-K_0 = U_0 – U_1, da cui segue la legge di conservazione dell'energia: **In un campo centrale la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica si mantiene costante nel tempo: U + K = E.**
(Questo è il motivo per cui i campi nei quali il lavoro della forza è indipendente dalla traiettoria, come i campi centrali, si chiamano *conservativi*: *conservano* l'energia totale E).
Si giustifichi la seguente affermazione: ***La forza d'attrito non è conservativa.***
Nota. I campi centrali sono conservativi, ma esistono campi conservativi che non sono centrali, come, per esempio, $\vec{F} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$.

6. Campi coulombiani.

Tra i campi centrali sono particolarmente importanti quelli colombiani, tra i quali rientra quello della gravitazione universale di Newton: $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.
Per esso vale, come abbiamo visto in generale, la 2ª legge di Keplero.

L'energia potenziale U è

$$U=-\int \vec{F}(r).d\vec{r}=-\int \frac{-GMm}{r^2}\frac{\vec{r}.d\vec{r}}{r}=\int \frac{GMm}{r^2}dr=\frac{-GMm}{r}$$

e vale la conservazione dell'energia: $E=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}$.

Più difficile è dimostrare che, nel caso newtoniano, le orbite sono coniche, ellittiche se l'energia totale è negativa (**1ª legge di Keplero**)[1]. Se poi l'esponente del raggio vettore r nel modulo della forza (GMm/r^2) non è 2, l'orbita non è neanche chiusa[2].
Per quanto riguarda la 3ª legge di Keplero, una dimostrazione generale esula da questa esposizione elementare[3]. Una dimostrazione è possibile nel caso di orbite circolari. Uguagliando la forza di Newton alla forza centripeta, si ha: $\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{r}$ e il periodo del moto è $T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$, da cui $\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$, uguale per tutti i pianeti e dipendente solo dalla massa M del Sole. E' chiaro che per i satelliti di Giove o di Saturno il rapporto tra T^2 ed r^3 dipende dalla massa di Giove o di Saturno.

Sostituendo l'espressione di v^2 nella formula dell'energia, si ricava $E=\frac{-GMm}{2r}$: l'energia totale è la metà dell'energia potenziale (che, si noti bene, è negativa: (il sistema Sole – Pianeta è *legato*) o anche è uguale all'energia cinetica (positiva!) cambiata di segno.

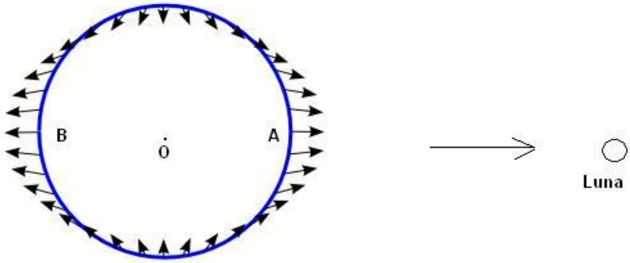
---

[1] Landau e Lifsic: *Meccanica*, Boringhieri 1965; Goltstein: *Meccanica classica*, pag. 68 e seg., Zanichelli, 1971.
[2] Landau e Lifsic: Ibidem.
[3] Vedi nota 1.

Osservazione. Nei testi di fisica è detto che l'energia potenziale di gravità su un pianeta di gravità g è U = mgh, essendo h l'altezza dal suolo del grave di massa m. Ciò implica che se un grave cade dall'altezza h, compie il lavoro (positivo) W= mgh – 0 = mgh.
Noi abbiamo trovato che U = –GMm/r, essendo M la massa del pianeta. Calcoliamo il lavoro W compiuto dalla gravità quando il grave passa da quota h a quota 0. Posto r = R +h (R raggio del pianeta), si ha: $W = \frac{-GMm}{R+h} - \frac{-GMm}{R} = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) = m\frac{GM}{R(R+h)}h$. Se il dislivello h è piccolo rispetto al raggio R del pianeta, R+h si può approssimare con R, e perciò U = mgh, come era da attendersi.
Si noti che $\frac{GM}{R^2} = g$, accelerazione di gravità al livello del suolo.
Si osservi anche che conoscendo la costante di gravitazione universale G = $6{,}67.10^{-11}$, il raggio del pianeta e l'accelerazione g di gravità alla superficie del pianeta, si ricava la massa M del pianeta. Così è stata calcolata la massa della Terra.
Esercizio. Come si calcola la massa del Sole? Più difficile era nel passato determinare la massa della Luna, ma ora si può calcolare con grande precisione: come?

Maree

La forza di marea è la differenza tra la forza di attrazione gravitazionale che un corpo celeste esercita sull'unità di massa posta alla superficie del pianeta e quella che esercita al centro.
La forza di marea sulla superficie terrestre ad opera della Luna si calcola in modo semplice solo nei punti A e B della Terra allineati con la Luna (vedi figura).



In A:

$$F_{marea} = \frac{GM_{Luna}}{(r-R)^2} - \frac{GM_{Luna}}{r^2} = GM_{Luna}\frac{2Rr - R^2}{(r-R)^2 r^2} \approx GM_{Luna}\frac{2R}{r^3}$$

essendo R il raggio della Terra, r la distanza tra il centro O della Terra e la Luna.
Siccome r è circa 60R, ho trascurato R rispetto ad r.

Nel punto B

$$F_{marea} = \frac{GM_{Luna}}{(r+R)^2} - \frac{GM_{Luna}}{r^2} = GM_{Luna}\frac{-2Rr - R^2}{(r-R)^2 r^2} \approx -GM_{Luna}\frac{2R}{r^3}$$

La forza di marea in B è diretta in senso opposto alla Luna, ma in modulo è la stessa che in A, nei limiti di approssimazione fatta (approssimazione di **dipolo**).
Dunque la forza di marea è (circa) inversamente proporzionale **al cubo della dist**anza del corpo che la provoca.
Il Sole ha una massa di circa 27 milioni di masse lunari, ma la sua distanza da noi è circa 400 volte quella Terra-Luna, perciò la forza mareale provocata dal Sole sulla Terra è meno della metà di quella dovuta alla Luna ($\frac{27.10^6}{400^3} \approx 0,4$).

7. Caduta di una particella nel centro di una forza centrale attrattiva.

Se il campo è attrattivo, si definisce velocità di fuga la velocità v tale che $E = ½\, mv^2 + U(r) = 0$.

Quindi la velocità di fuga è $v_f = -2U/m$. (Si ricordi che se la forza è attrattiva, U <0).

Se $v < v_f$, il moto è limitato e, nel caso che il momento angolare L è zero (la particella *punta* verso O), la particella cade certamente nel centro di forza O.

Ma se **L** ≠ **0**, sotto quale condizione la particella cade in O?

Riscriviamo la formula dell'energia totale E, dopo aver decomposto la velocità in velocità *radiale* $\dot{r}$ *e trasversa* $r\dot{\theta}$ si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U(r) - \frac{1}{2}mr^2\,\frac{L^2}{m^2r^4} > 0.$$

Ciò perché l'energia cinetica *radiale* $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ è (ovviamente) positiva.

Dunque $E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2} > 0.$ (la grandezza $\frac{L^2}{2mr^2}$ si chiama energia potenziale centrifuga).

Segue che $r^2U(r) + \frac{L^2}{2m} < Er^2 < 0$ (perché nel caso attrattivo E è negativa come U).

Siccome $\frac{L^2}{2m}$ è una costante positiva, si conclude che r può tendere a zero ***solo*** se U(r) tende a $-\infty$ come $1/r^n$, essendo n >2 oppure come $-\alpha/r^2$, con $\alpha > L^2/2m$.[4]

[4] Landau e Lifsic: Ibidem.

Nel caso newtoniano U(r) = –GMm/r: si conclude che la particella non può cadere nel centro del campo.
Come mai allora i meteoriti cadono sulla Terra (o sulla Luna o sul Sole), anche se non puntano direttamente verso il centro del corpo che li attrae?
Perché la Terra (o la Luna o il Sole) non è un punto, il suo raggio è diverso da zero; l’impatto avviene se la traiettoria del meteorite lo porterebbe a una distanza dal centro minore del raggio.