Ottavio Serra

La costante *C* di Eulero-Mascheroni e la funzione Gamma.

1. la costante ***C*** di Eulero – Mascheroni è definita come il limite della seguente successione:
[1] $a_n = 1+1/2+1/3+\ldots+1/n - \log(n+1)$. Il termine a_n è la differenza tra la ridotta n^{ma} della serie armonica e il logaritmo naturale di n+1. Ma è anche il limite della successione
[2] $b_n = 1+1/2+1/3+\ldots+1/n - \log(n)$.

Dimostriamo che la [1] è crescente e la [2] è decrescente.
$a_n - a_{n-1} = 1/n - \log(n+1) + \log(n) = 1/n - \log(1+1/n) > 0$ perchè $(1+1/n)^n < e \rightarrow n\log(1+1/n) < 1$.
Analogamente, $b_n - b_{n-1} = 1/n - \log(n) + \log(n-1) = 1/n - \log[1+1/(n-1)] < 0$ perché $[1+1/(n-1)]^n > e \rightarrow n\log(1+1/n) > 1$.

Segue che la [1] è monotòna crescente e il suo limite è l'estremo superiore dell'insieme dei suoi valori, così come il limite della [2] è l'estremo inferiore dell'insieme dei suoi valori.

Siccome $a_n < b_n$, ogni b_n è un maggiorante della [1] e ogni a_n è un minorante della [2]. Ma
$b_n - a_n = \log(1+1/n) \to 0$ per $n \to \infty$, perciò, per $n \to \infty$ $\lim a_n = \lim b_n = C$.

Questo risultato ci dice che la serie armonica diverge come il logaritmo. Però ci dice poco sul valore numerico di ***C*** o per lo meno occorre arrivare a un valore di n molto grande per ottenere ***C*** con un numero abbastanza grande di cifre.

La tabella seguente contiene i calcoli da me effettuati direttamente con le successioni [1] e [2].

n	*C* per difetto	*C* per eccesso
16	a=0.547515649173	b=0.608140270989
32	a=0.561987633970	b=0.592759292637
64	a=0.569503633810	b=0.585007820346
128	a=0.573334688228	b=0.581116828670
256	a=0.575268877922	b=0.579167518338
512	a=0.576240689379	b=0.578191909510
1024	a=0.576727780706	b=0.577703866679
2048	a=0.576971623579	b=0.577459785658
4096	a=0.577093619419	b=0.577337730247
8192	a=0.577154635953	b=0.577276698816
16384	a=0.577185148876	b=0.577246182169
32768	a=0.577200406501	b=0.577230923613
65536	a=0.577208035604	b=0.577223294277
131072	a=0.577211850229	b=0.577219479594
262144	a=0.577213757559	b=0.577217572249
524288	a=0.577214711229	b=0.577216618576
1048576	a=0.577215188065	b=0.577216141739
2097152	a=0.577215426483	b=0.577215903320
4194304	a=0.577215545692	b=0.577215784111
8388608	a=0.577215605297	b=0.577215724506
16777216	a=0.577215635099	b=0.577215694704
33554432	a=0.577215650000	b=0.577215679803
67108864	a=0.577215657451	b=0.577215672352
134217728	a=0.577215661176	b=0.577215668627
268435456	a=0.577215663039	b=0.577215666764

Come si vede, per ottenere tre cifre decimali di ***C*** n deve essere 4096 e per avere ***C*** a meno di un centesimo di milionesimo (8 cifre decimali esatte) occorre un valore di n maggiore di 268 milioni (n=268 435 456).

Il calcolo bruto di cui sopra ci dà ***C* =0.57721566.** Per ottenere una precisione maggiore con n meno grande occorre procedere diversamente, con tecniche più raffinate.

2. Studiamo dapprima la successione

[3] $s_n = 1/(n+1)+1/(n+2)+\ldots+1/(2n)$.

La successione [3] è crescente, perché $s_{n+1}-s_n = \frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-(\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n})$

$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$. Inoltre la [3] è limitata, perché $s_n < n/(n+1) < 1$.

Perciò la [3] converge a un numero positivo) s<1 e, per ogni n, $s_n < s$.

Cerchiamo ora una maggiorazione di s_n considerando la successione estratta

$$s_{nk} = (\frac{1}{kn+1}+...+\frac{1}{kn+n})+...+(\frac{1}{2kn-n+1}+...+\frac{1}{2kn}).$$

Risulta $s_{nk} < \frac{n}{kn+1}+...+\frac{n}{2kn-n+1} < \frac{1}{k}+...+\frac{1}{2k-1}$. Posto k=n, si ottiene

$s < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}$ **= s_n + 1/(2n),** cioè **$s_n < s < s_n + 1/(2n)$.**

3. Torniamo ora alla costante ***C***, cercando una maggiorazione a partire dalla [1] che dà valori per difetto (la [1] è crescente), considerando la successione estratta

$$a_{2n} = 1+...+\frac{1}{n}+(\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n})-\log(2n+1) = a_n + s_n + \log\frac{n+1}{2n+1}.$$

Ma Lim a_{2n} = Lim a_n = ***C*** → s = lim s_n = log(2). Abbiamo così ottenuto per la successione [3]

[3 bis] $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}) = \log 2$.

Torniamo ora alla maggiorazione di ***C***. Ricordando che $s_n < \log 2$, otteniamo

$a_{2n} < 1+...+\frac{1}{n}+\log 2-\log(2n+1)$ e quindi

[4] $C < 1+...+\frac{1}{n}-\log\frac{2n+1}{2}$. In definitiva,

[5] $a_n < C < a_n + \log\frac{2n+2}{2n+1}$.

La doppia limitazione [5] non è molto stringente: infatti, per ottenere il valore di ***C*** arrotondato alla terza cifra decimale occorre che n sia almeno uguale a 1000 $(\log\frac{2n+2}{2n+1} < \frac{1}{2}10^{-3})$.

Per avere molte cifre esatte di ***C*** con piccoli valori di n (limitando tra l'altro la propagazione degli errori di troncamento) occorre sommare la serie con metodi più potenti, come la formula di Eulero – Mac Laurin[1]

[6] $$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \int_n^{+\infty} y(x)dx + \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{12}y'(n) + \frac{1}{720}y'''(n) + E_{Tr},$$

con E_{Tr} in modulo minore di $|y^{(5)}(n)|/(42.6!)$, (nell'ipotesi che la seie [6] converga).

[1] Cugiani: "Metodi dell'Analisi numerica", UTET; Collana Schaum: "Analisi numerica", ETAS.

Nel nostro caso, poniamo $y_n = \dfrac{1}{k} - \log\dfrac{k+1}{k}$.   **N.B.** $\log(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \log\dfrac{k+1}{k}$.

Si noti che l'integrale che compare nella [6] vale (-1+1)-(n+1)log(n/(n+1)) = (n+1)log((n+1)/n), perciò, fatti i conti, una buona approssimazione per ***C*** , troncando al termine –(1/12)y'(n) incluso, è data dalla formula seguente:

[7]
$$C \cong \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2(n+1)} .$$

Per l'implementazione, sia diretta, sia con l'accelerazione **[7]**, vedi[2].

Scegliendo n maggiore o uguale a 500, l'errore scende al di sotto di 10^{-15}, come si evince dalla seguente tavola:

```
n [0 per fine]=100
Costante di Eulero_Mascheroni=0.577215664903172
n [0 per fine]=200
Costante di Eulero_Mascheroni=0.577215664901585
n [0 per fine]=300
Costante di Eulero_Mascheroni=0.577215664901540
n [0 per fine]=400
Costante di Eulero_Mascheroni=0.577215664901535
n [0 per fine]=500
Costante di Eulero_Mascheroni=0.577215664901533
n [0 per fine]=600
Costante di Eulero_Mascheroni=0.577215664901533
n [0 per fine]=700
Costante di Eulero_Mascheroni=0.577215664901533
```

3. La formula **[4]** si presta per ottenere un'approssimazione (per difetto) dell ridotta n[ma] della serie armonica:

[8]
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \cong C + \log\frac{2n+1}{2} ,$$

l'approssimazione essendo tanto migliore quanto maggiore è n.

n	Som[1..n](1/k)	C+log(n+1/2)
10	2.92896825396825	2.92859092206501
20	3.59773965714368	3.59764055104590
40	4.27854303893638	4.27851763901403
80	4.96547927894552	4.96547284932605
160	5.65551122493974	5.65550960747160
320	6.34709834689402	6.34709794126226
640	7.03946488780478	7.03946478623832
1280	7.73222159595257	7.73222157054111
2560	8.42517350215948	8.42517349580414
5120	9.11822303600617	9.11822303441703
10240	9.81132139082530	9.81132139042798
20480	10.50444415791879	10.50444415781946
40960	11.19757913159650	11.19757913157167
81920	11.89072020867807	11.89072020867187
163840	12.58386433748952	12.58386433748797
327680	13.27700999217289	13.27700999217250
655360	13.97015640979396	13.97015640979387
1310720	14.66330320888433	14.66330320888430
2621440	15.35645019870944	15.35645019870944
5242880	16.04959728390197	16.04959728390197

.(Nota [2])

[2] Vedi il mio sito *http://digilander.libero.it/ottavioserra0* cartella *Eseguibili* sottocartella *Calcolo* programma *Eulero*.

4. Nota storica e complementi.

Eulero, nel 1781, calcolò le prime 16 cifre dello sviluppo decimale di questa costante. Mascheroni, nel 1790, nel suo “Adnotationes ad calculum integrale Euleri”, arrivò fino alla trentaduesima cifra. Ma, di queste 32, come fece notare Johann von Soldner nel 1809, solo le prime 19 erano corrette. Naturalmente, i calcoli erano effettuati con carta e penna.

E’ interessante sapere che non si è ancora riusciti a stabilire se la costante di Eulero-Mascheroni sia o meno un numero trascendente, come “e” e “ π“ , e neanche se sia un numero razionale o un numero irrazionale.

Ora con grossi calcolatori sono state ottenute (Jon Borwein) 170 000 cifre; quelle che riporto sono le prime 233 cifre:

0,577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767234884867726777664670936947063291746749514631447249807082480960504014486542836224173997644923536253500333742937337737673942792595258247094916008735203948165670853233151776 61.

La costante ***C*** trova diversi legami con importanti funzioni dell’analisi, per esempio con la funzione euleriana Γ(z) definita come l’integrale improprio

[9] $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, assolutamente convergente se la parte reale del numero complesso z è positiva.

Integrando per parti, si trova

[10] Γ(z+1) = z Γ(z).

Siccome Γ(1) = 1, per ogni intero positivo n risulterà Γ(n+1) = n! Dunque, la funzione Γ(z) generalizza il fattoriale.

Calcolo ora Γ(1/2) partendo dal famoso risultato dello stesso Eulero

[11] $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, che si ottiene dall’integrale doppio $\int_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi$, facile da calcolare. La [11] è importante nel calcolo statistico (distribuzione normale di Gauss).

Dalla [11], per sostituzione (x^2=t), si ottiene:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

. (Vedi la [9]). Dunque

[12] $$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} .$$

Dalla relazione ricorsiva [**10**] si ottiene poi $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}, ecc.$

La costante ***C*** è poi legata alla funzione Γ(z) dalla relazione: ***C*** = $\underset{x\to+\infty}{Lim}[x - \Gamma(\frac{1}{x})]$.

Inoltre, detti p_1=2, p_2=3, p_3=5, … la successione dei numeri primi, risulta

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{1}{\log p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1} = e^C .$$

Sempre Eulero dimostrò che la costante ***C*** e la funzione Γ(z) sono legate dall’identità:

[13]
$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{z}{n})^{-1} e^{z/n}$$.

Siccome la dimostrazione è difficile, ho testato l’identità [13] per z = 1, per z =0.5, per z = 1.5, per z = - 0.5, perché più su ho calcolato Γ(1)=1, Γ(0.5)=1.7724539, Γ(1.5)= 0.8862269, Γ(–0.5)=–3.5449077.

```
n=   1000000    Gamma(1)=0.9999995
n=   2000000    Gamma(1)=0.9999998
n=   3000000    Gamma(1)=0.9999998
n=   4000000    Gamma(1)=0.9999999
n=   5000000    Gamma(1)=0.9999999
n=   6000000    Gamma(1)=0.9999999
n=   7000000    Gamma(1)=0.9999999
n=   8000000    Gamma(1)=0.9999999
n=   9000000    Gamma(1)=0.9999999
n=  10000000    Gamma(1)=1.0000000
n=  11000000    Gamma(1)=1.0000000
```

```
n=   1000000    Gamma(0.5)=1.7724536
n=   2000000    Gamma(0.5)=1.7724537
n=   3000000    Gamma(0.5)=1.7724538
n=   4000000    Gamma(0.5)=1.7724538
n=   5000000    Gamma(0.5)=1.7724538
n=   6000000    Gamma(0.5)=1.7724538
n=   7000000    Gamma(0.5)=1.7724538
n=   8000000    Gamma(0.5)=1.7724538
```

```
n=   1000000    Gamma(1.5)=0.8862259
n=   2000000    Gamma(1.5)=0.8862264
n=   3000000    Gamma(1.5)=0.8862266
n=   4000000    Gamma(1.5)=0.8862267
n=   5000000    Gamma(1.5)=0.8862267
n=   6000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=   7000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=   8000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=   9000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=  10000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=  11000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=  12000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=  13000000    Gamma(1.5)=0.8862268
n=  14000000    Gamma(1.5)=0.8862269
n=  15000000    Gamma(1.5)=0.8862269
n=  16000000    Gamma(1.5)=0.8862269
n=  17000000    Gamma(1.5)=0.8862269
n=  18000000    Gamma(1.5)=0.8862269
```

```
n=   1000000    Gamma(-0.5)=-3.5449073
n=   2000000    Gamma(-0.5)=-3.5449075
n=   3000000    Gamma(-0.5)=-3.5449076
n=   4000000    Gamma(-0.5)=-3.5449076
n=   5000000    Gamma(-0.5)=-3.5449076
n=   6000000    Gamma(-0.5)=-3.5449076
n=   7000000    Gamma(-0.5)=-3.5449076
n=   8000000    Gamma(-0.5)=-3.5449076
n=   9000000    Gamma(-0.5)=-3.5449077
n=  10000000    Gamma(-0.5)=-3.5449077
n=  11000000    Gamma(-0.5)=-3.5449077
```

La [9] non converge se la parte reale di z è minore o uguale a zero, però la relazione ricorsiva [10] ci fa capire che la funzione ***Γ***(z) è prolungabile analiticamente anche a valori negativi di Re(z), purchè non interi (provate a calcolare $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ applicando la [10]). Siccome però l'integrale improprio [9] non converge per Re(z)<0, anche se non intera, l'identità [13] consente il calcolo per Re(z)<0 (non intero).

```
n=   1000000   Gamma(-2.5)=-0.9453058
n=   2000000   Gamma(-2.5)=-0.9453072
n=   3000000   Gamma(-2.5)=-0.9453077
n=   4000000   Gamma(-2.5)=-0.9453080
n=   5000000   Gamma(-2.5)=-0.9453081
n=   6000000   Gamma(-2.5)=-0.9453082
n=   7000000   Gamma(-2.5)=-0.9453083
n=   8000000   Gamma(-2.5)=-0.9453084
n=   9000000   Gamma(-2.5)=-0.9453084
n=  10000000   Gamma(-2.5)=-0.9453084
n=  11000000   Gamma(-2.5)=-0.9453085
n=  12000000   Gamma(-2.5)=-0.9453085
n=  13000000   Gamma(-2.5)=-0.9453085
```

(Questo lo potete verificare con carta e penna)

```
n=   1000000   Gamma(-2.7)=-0.9310794
n=   2000000   Gamma(-2.7)=-0.9310811
n=   3000000   Gamma(-2.7)=-0.9310817
n=   4000000   Gamma(-2.7)=-0.9310819
n=   5000000   Gamma(-2.7)=-0.9310821
n=   6000000   Gamma(-2.7)=-0.9310822
n=   7000000   Gamma(-2.7)=-0.9310823
n=   8000000   Gamma(-2.7)=-0.9310824
n=   9000000   Gamma(-2.7)=-0.9310824
n=  10000000   Gamma(-2.7)=-0.9310824
```

(Questo invece non potete verificarlo con carta e penna).

Nota: tutte le tabelle sono state ottenute col mio programma *Eulero*. Vedi il mio sito in nota [2].