

Ottavio Serra
La caduta dei gravi
filo conduttore della meccanica
da Galilei a Newton, ad Einstein.

1. Secondo Aristotele i corpi cadono con velocità tanto maggiore quanto più sono pesanti e, se sono come piume o pezzetti di carta, non cadono neanche verticalmente, ma oscillando. L'errore di Aristotele è stato di non aver tenuto conto della resistenza dell'aria e delle lievi e impercettibili correnti d'aria, anche in ambiente chiuso.

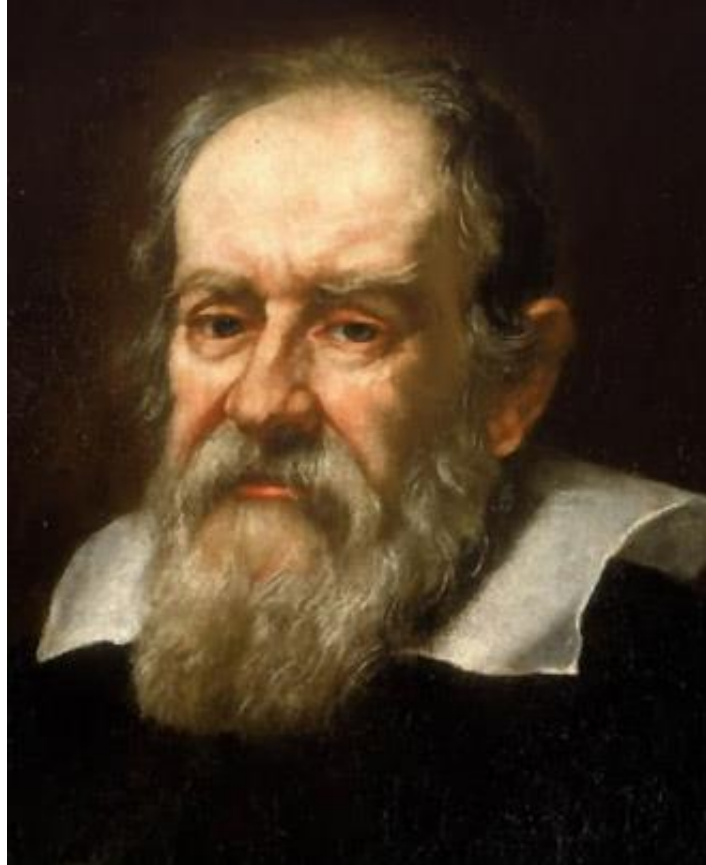


(Stagira, 384 a.C. – Calcide, 322 a.C.)



Il disegno riportato qui sopra si riferisce alla caduta in presenza dell'aria.

Galilei ritiene invece che è la resistenza dell'aria a produrre le differenze osservate e che, in assenza d'aria, tutti i corpi debbano cadere con la stessa rapidità, altrimenti un mattone dovrebbe cadere più o meno velocemente a seconda che lo si pensi intero o costituito da due mezzi mattoni, il ch     assurdo. (Esperienza della caduta di sassi di diverso peso dalla torre di Pisa).

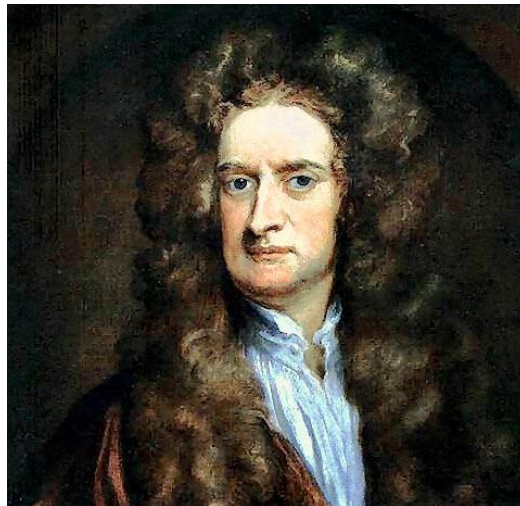


(Pisa, 1564 - Arcetri, 1642)

Galilei, dopo alcune incertezze iniziali, trova le leggi corrette per la caduta dei gravi:

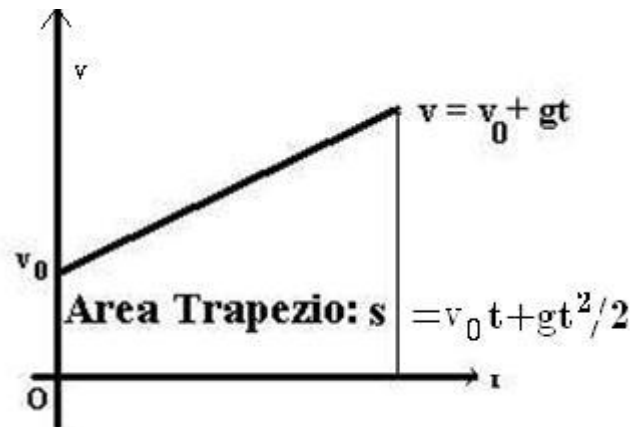
$$\mathbf{v=v_0+gt,}$$
$$\mathbf{s=s_0+v_0t+gt^2/2.}$$

Fu però Newton che portò a compimento l'opera di Galilei, creando anche la nuova matematica (l'analisi infinitesimale), necessaria per descrivere le nuove leggi fisiche e trarne tutte le conseguenze.



(Woolsthorpe, 1642 – Londra, 1727)

In particolare, se si conosce come varia l'accelerazione in funzione del tempo e si fa il grafico di questa funzione ponendo il tempo in ascissa e l'accelerazione in ordinata, l'area sottostante al grafico rappresenta la velocità; analogamente, nel diagramma tempo – velocità l'area sottostante rappresenta lo spazio percorso. Per esempio, nella caduta dei gravi, moto ad accelerazione costante g (uniformemente accelerato, come si dice), lo spazio percorso è dato dall'area del trapezio e si riottiene la formula trovata da Galilei $s=[v_0+(v_0+gt)]t/2$. (somma delle basi per altezza diviso 2).



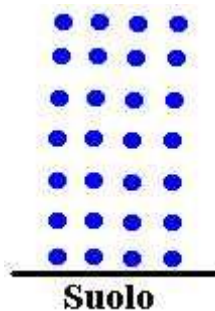
Naturalmente, per moti più complicati, occorre il calcolo integrale di Newton (e Leibnitz).

In presenza dell'aria il moto di una piuma o di un pezzetto di carta è talmente complicato da risultare praticamente imprevedibile, ma in assenza d'aria un pezzetto di carta cade come un sasso.

Come togliere l'aria, senza una macchina pneumatica, per fare la verifica? Mettete un pezzetto di carta su una moneta abbastanza larga, per esempio una da due euro, e fatela cadere di piatto: la moneta, cadendo, fa il vuoto davanti a sé e il pezzetto di carta cade con la stessa accelerazione della moneta. (Se non vi riesce, ripetete l'esperimento).

Osserviamo ora come cadono le gocce di pioggia: perché vicino al suolo (e in assenza di vento) le goccioline cadono con velocità costante? (Vedere il disegno a pagina 1).

Dobbiamo introdurre il concetto di resistenza del mezzo, che è una specie di attrito; ma mentre questo si manifesta al contatto di due corpi solidi, e non dipende dalla velocità, la resistenza del mezzo è la resistenza che un fluido (liquido o gas) oppone al moto di un corpo. La resistenza del mezzo, almeno finché la velocità della particella è *piccola*, è proporzionale alla velocità e discorde con essa: $R = -kv$. Siccome il peso della goccia di pioggia è mg , la forza totale agente sulla goccia è diretta verso il basso e vale $F = mg - kv$. La velocità della goccia inizialmente è zero e la forza totale è $F = mg$; man mano che la goccia cade, la sua velocità aumenta, finché (se nel frattempo la goccia non è arrivata al suolo con moto accelerato, cosa che accade se la goccia è grossa o per grossi chicchi di grandine) $kv = mg$ e la forza totale $F = 0$. Da quel punto il moto continua verticalmente verso il basso con velocità costante $v_{\text{finale}} = mg/k$.

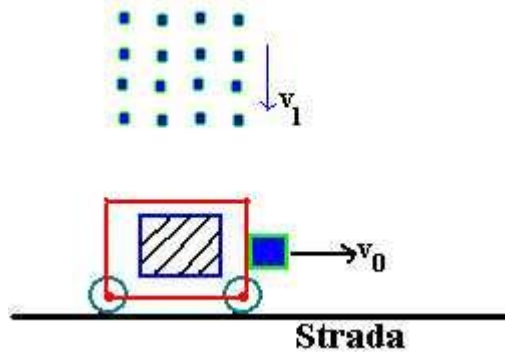


Il coefficiente k dipende dalla viscosità η dell'aria, in generale del mezzo, e dalle dimensioni della particella, dal suo raggio r se essa è sferica: $k = 6\pi\eta r$ (legge di Stokes). Perciò la velocità finale è tanto più piccola quanto minore è r (verificare che è, più precisamente, proporzionale al quadrato di r : $v_{\text{finale}} = (2/9)gr^2/\eta$). La v_{finale} costante teoricamente si raggiunge dopo un tempo infinito e perciò si chiama velocità asintotica e si indica con v_{∞} . Se il raggio si dimezza, v_{∞} diventa quattro volte più piccola. Perciò le gocce piccole hanno il tempo di raggiungere una velocità praticamente costante prima di arrivare a terra.

Nota. Il coefficiente di viscosità η nel sistema SI (MKS) si misura in $\text{Kg}/(\text{ms})$: verificarlo. Questa unità di viscosità si chiama dekapoise.

Nel caso del paracadute le cose vanno diversamente: occorre una grande superficie per avere una velocità finale piccola: **come mai?** Fate un esperimento con un ombrello, muovendolo di punta prima chiuso (piccola superficie esposta al moto) e poi aperto (grande superficie).

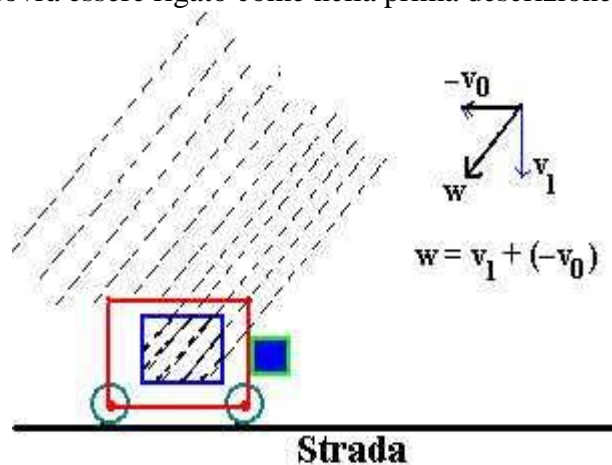
Come è possibile verificare che le gocce di pioggia arrivano al suolo con velocità costante? Si consideri nel riferimento della crosta terrestre un'auto in corsa con velocità costante v_0 . In assenza di vento le gocce cadono verticalmente, ma l'auto va loro incontro, perciò le gocce rigano obliquamente il vetro del finestrino dall'angolo superiore destro (anteriore) all'angolo inferiore sinistro (posteriore). Vedere il sottostante disegno.



Se, come è vero, le gocce rigano il vetro rettilineamente, vuol dire che le gocce hanno raggiunto una velocità v_1 costante.

Esercizio: sapreste calcolare la velocità v_1 delle gocce, conoscendo la velocità v_0 dell'auto e l'inclinazione delle righe di pioggia sul vetro?

Ora applicheremo il principio di relatività di Galilei: per i passeggeri dell'auto questo è fermo e le gocce hanno, oltre che la velocità di caduta v_1 , anche la velocità $-v_0$, cioè quella dell'auto cambiata di segno. Perciò il vetro dovrà essere rigato come nella prima descrizione. Vedi figura seguente.



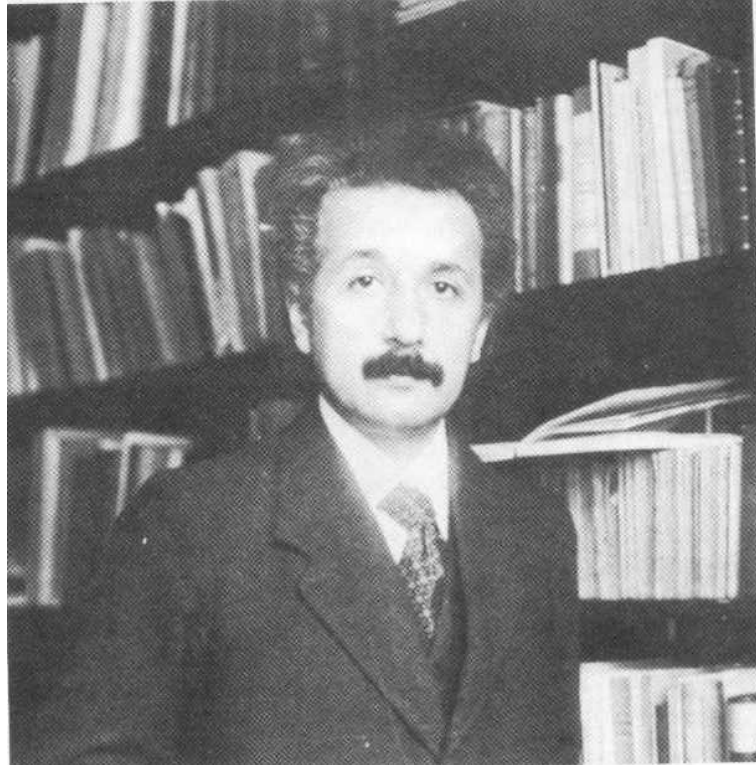
Esercizio: se le gocce arrivassero con moto accelerato (uniformemente), le tracce di pioggia sul vetro, anziché rettilinee, sarebbero curve; sapreste dire come? Determinate l'equazione di tali curve nell'ipotesi che la resistenza dell'aria sia nulla. (Nel caso che non si voglia trascurare la resistenza dell'aria, vedere nel mio sito il programma *Galileo*¹).

Ma perché tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione (in assenza d'aria)? Perché i satelliti di Giove girano intorno al loro pianeta, come se il Sole non ci fosse? Lo stesso dicasi della Luna intorno alla Terra. Perché in un'astronave in orbita *inerziale* (cioè a motori spenti) intorno alla Terra gli astronauti e gli oggetti fluttuano *senza peso*? Perché la forza peso di un corpo, la forza di gravità, è proporzionale alla sua massa? E' l'unica forza per cui ciò accade. Per esempio, la forza elastica che una molla tesa o compressa esercita su una particella dipende dall'elasticità della molla, non dalla massa della particella e perciò l'accelerazione impressa da una data molla, a parità di allungamento, varia con la massa della particella. Anche la forza elettrica è indipendente dalle

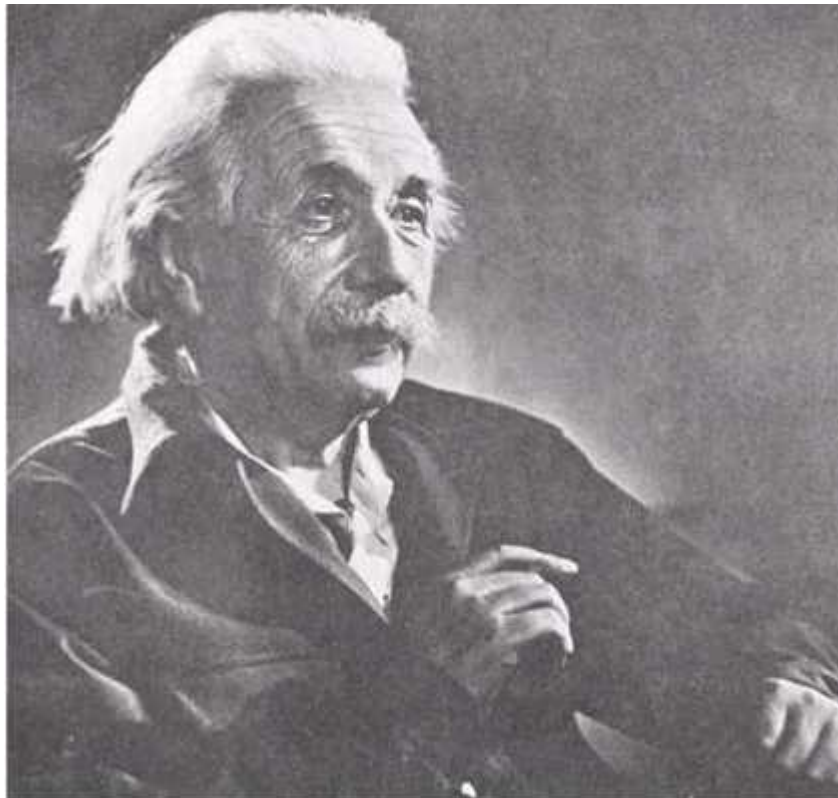
¹ Digilander.libero.it/ottavioserra0

masse, per cui l'accelerazione che un campo elettrico imprime a una particella α (nucleo di elio) è metà di quella che imprime a un protone (carica doppia, forza doppia; ma massa quadrupla, accelerazione metà).

Per capire queste cose e in particolare il ruolo eccezionale della forza di gravità nella fisica, dobbiamo aspettare Einstein e la sua teoria della Relatività generale del 1916.



Einstein nel 1916

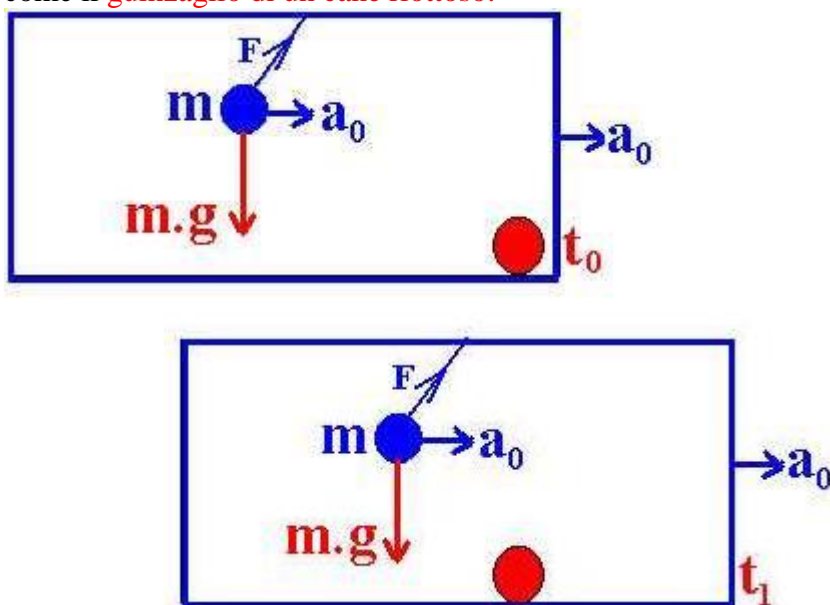


(Ulm 1879 – Princeton 1955)

2. Da Newton ad Einstein

La forza di Inerzia e la forza di Gravità.

Se un carrello accelera verso destra in un riferimento inerziale, i corpi interni ad esso non sono soggetti ad alcuna forza; se erano fermi restano fermi: **è il carrello che gli va addosso**. E' il caso della pallina poggiata sul pavimento. Il pendolo invece tenta, sì, di restare dov'è, ma è trascinato dal filo di sospensione fissato al soffitto, per cui è costretto ad accelerare verso destra e il filo si tende, come il **guinzaglio di un cane riottoso**.



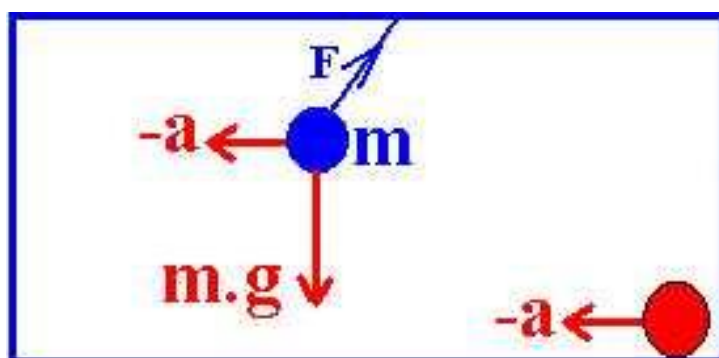
(Riferimento inerziale)

Carrello in moto verso destra con accelerazione a_0 visto in due istanti successivi da un riferimento "esterno" (inerziale).

(N.B. Il pavimento del carrello si supponga privo di attrito).

La risultante tra la forza peso del pendolo e la tensione del filo dà la forza di trascinamento del pendolo, che divisa per la sua massa, fa sì che la pallina del pendolo si muova verso destra con la stessa accelerazione a_0 del carrello.

Lo stesso carrello assunto come sistema di riferimento "Per chi è all'interno":



Tutti i corpi appaiono soggetti a una forza diretta verso **sinistra** **proporzionale alla massa di questi corpi**, per cui tutti i corpi sono soggetti **alla stessa accelerazione**, cadono verso sinistra con la stessa accelerazione.

Il disegno si riferisce a un carrello posto nel campo di gravità terrestre, per cui il "basso" non è veramente la parete verticale sinistra del carrello, ma il piano perpendicolare al filo di sospensione

del pendolo, che si allinea con la risultante tra la forza peso del pendolo e la *misteriosa forza* agente sul pendolo e diretta verso sinistra.

Componendo questa *forza* con la forza di tensione del filo e con la forza peso, risulta che la pallina del pendolo è soggetta a forza totale **0** e perciò resta ferma nel riferimento del carrello.

Invece la pallina *rossa* poggiata sul pavimento (privo di attrito), sotto l'azione della *misteriosa forza* agente su di essa, si sposta verso sinistra con accelerazione $a = -a_0$.

Ma *questa forza* non è di *gravità*, non è *elettrica*: fu detta forza *apparente*.

Però quando la pallina va a sbattere contro la parete sinistra del carrello si può deformare e, se è una persona, si fa un *bernoccolo* che è *reale, non apparente*.

E' meglio perciò chiamarla *forza di inerzia*, perché si manifesta in un riferimento *accelerato* rispetto a un riferimento *inerziale esterno*.

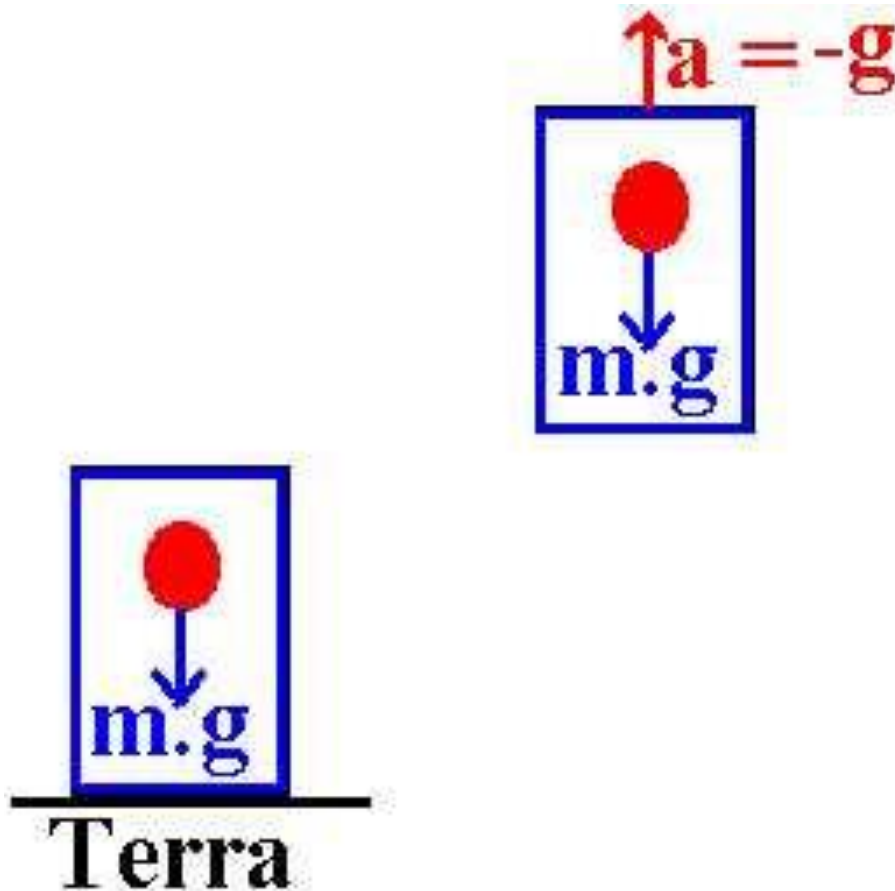
Anche un autobus in corsa lungo un tratto curvilineo è un riferimento **non inerziale**. La forza che costringe l'autobus a seguire la curva è l'attrito tra le ruote e la strada (forza *centripeta* che, fin quando l'autobus tiene la strada, uguaglia il prodotto tra massa dell'autobus e l'*accelerazione centripeta*: $a_c = v^2/r$).

Chi è dentro l'autobus, risente però una forza *apparente* che lo spinge verso la fiancata esterna e perciò è detta **forza centrifuga**: essa è il prodotto della massa del passeggero per l'accelerazione centripeta cambiata di segno:

$$F = m \cdot (-a_c).$$

Einstein interpreterà la situazione in modo genialmente diverso.

Prima però parliamo del famoso **ascensore di Einstein**, anche se ora preferiamo sostituire **l'ascensore con un'astronave**.



A sinistra abbiamo l'astronave ferma sulla Terra. **La pallina** cade sotto l'azione della gravità con accelerazione **g** rivolta verso il **basso**.

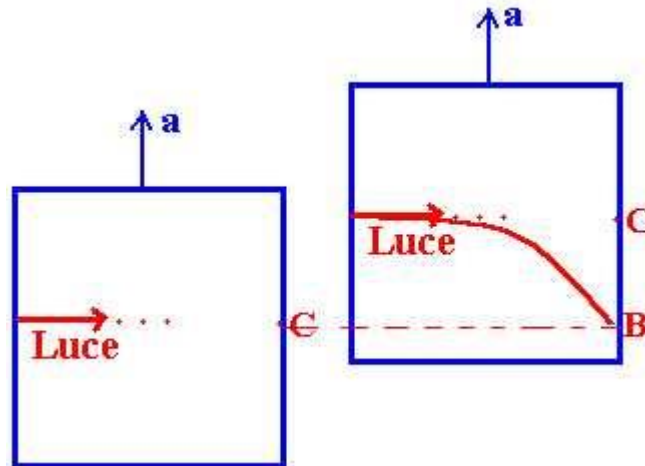
A destra l'astronave è negli spazi intersiderali e sta accelerando verso *l'alto* con l'accelerazione, impressa dai motori, $a = -g$. Per chi è dentro l'astronave le cose vanno come se questa fosse ferma

sulla Terra e la pallina **cade** verso il pavimento (verso il suo **basso**) con accelerazione $g = -a$, **come se fosse soggetta alla forza di gravità**.

Nessuna osservazione interna all'astronave consente di distinguere tra le due descrizioni.

Einstein enuncia perciò il **Principio di equivalenza**: "A tutti gli effetti, un sistema di riferimento **accelerato** rispetto a un riferimento **inerziale** è **equivalente** a un riferimento **inerziale** nel quale agisce un campo di **gravità**."

La luce cade in un campo di gravità?



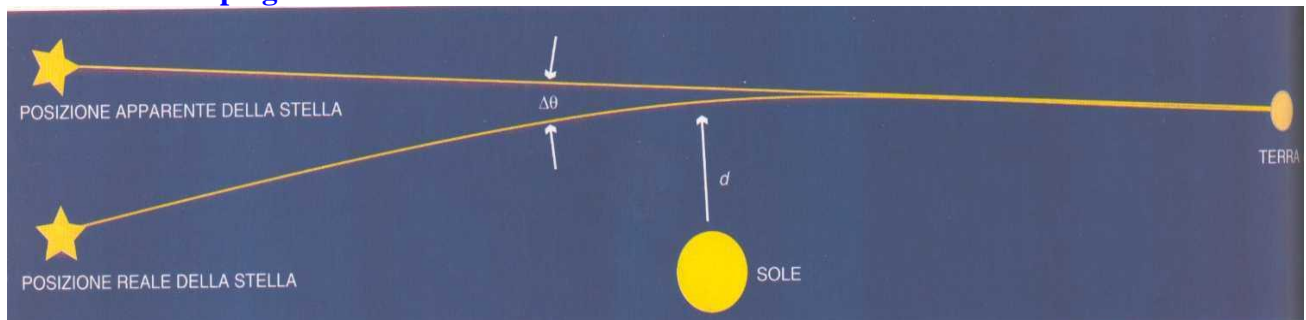
L'astronave sta accelerando verso l'alto con accelerazione $a = -g$, mentre un raggio di luce punta orizzontalmente verso il centro **C** della parete di destra.

Però, nell'intervallo di tempo in cui la luce arriva a destra l'astronave si è spostata verso l'alto di un certo tratto, perciò la **luce** colpisce la parete non al **centro**, ma **in un punto più in basso B**. **Nell'interno dell'astronave le cose vanno come se questa fosse ferma** (o in moto rettilineo uniforme), **ma immersa in un campo di gravità $g = -a$** .

Siccome un **sistema accelerato** rispetto a un riferimento inerziale privo di gravità si comporta come un **riferimento inerziale** nel quale agisca un campo di gravità, per il principio di equivalenza si deve concludere che la luce cade in un campo di gravità.

Si noti che nel riferimento inerziale nel quale l'astronave si muove di moto accelerato la luce va in linea retta. (Vedi Fig. precedente).

La Fig. seguente mostra, ingrandita in modo esagerato, la deflessione di un raggio di luce stellare nel campo gravitazionale del Sole.



Va ricordato che Newton aveva calcolato la **deflessione** di un raggio di luce stellare passante in prossimità del **bordo del Sole** e aveva trovato un angolo di 0,87 secondi di grado, applicando la sua legge di gravitazione alla luce considerata di natura corpuscolare (Nella teoria ondulatoria non si dovrebbe avere nessuna deflessione). Einstein dapprima trovò lo stesso angolo, perché non aveva tenuto conto del **rallentamento del tempo**, però nel lavoro definitivo del 1916 trovò il risultato corretto di 1,75" (**il doppio del valore trovato da Newton**), come fu confermato in seguito dalle osservazioni astronomiche, a cominciare da quelle condotte dal grande astronomo inglese Artur Eddington durante l'eclissi di Sole del 1919. E' chiaro che più

intenso è il campo gravitazionale, maggiore è la deflessione, come accade per la luce che sfiora una **nana bianca** o, meglio ancora, una **pulsar**.

Nota storica.

Newton si era accorto che l'agente fisico che provoca l'attrazione gravitazionale, detto **massa gravitazionale**, era proporzionale alla massa (inerziale), con la precisione dell'1%. All'inizio del '900 il fisico ungherese Eotvos aveva confermato questa proporzionalità con un errore minore di 10^{-11} . Nessuno però aveva spiegato questa proporzionalità (**questa identità**) prima di Einstein. **La gravità è una manifestazione dell'inerzia**. Da qui scaturisce il principio di *equivalenza* e la teoria relativistica della *gravitazione*.

Recentemente (vedi Le "Scienze", novembre 2006: *Lunga vita alla Relatività*, pag. 22) la relatività generale ha ricevuto nuove conferme con una precisione record dello **0,05 %**, studiando un sistema binario di una coppia di pulsar distanti da noi 2000 anni luce e *molto vicine tra loro, appena un milione di chilometri*. Inoltre pare definitivamente confermato l'emissione di **onde gravitazionali** previste dalla relatività generale. Come una **carica elettrica accelerata** irradia **onde elettromagnetiche**, così una **massa (gravitazione) accelerata** irradia **onde gravitazionali**.